

오차분석을 통한 개선된 EFG 균열해석기법의 해석계수 영향평가

A Study on the Analysis Parameter Used in Improved EFG Crack Analysis Technique Based on Error Estimate

이 상 호†

윤 영 철*

Lee, Sang-Ho

Yoon, Young-Cheol

(논문접수일 : 2002년 6월 22일 ; 심사종료일 : 2002년 11월 26일)

요 지

최근에 불연속 근사변위함수와 보조받침을 이용한 특이기지함수를 도입하여 균열의 불연속성과 특이성을 구현한 개선된 EFG(Element-Free Galerkin) 균열해석기법이 제안되었다. 개선된 EFG 균열해석기법은 균열의 성장에 따른 해석 모형의 수정 없이도 높은 정확도로 균열전파해석을 수행할 수 있지만, 다른 무요소법과 마찬가지로 해석결과가 사용되는 해석계수에 의존하게 된다. 본 연구에서는 개선된 EFG 균열해석기법에서 사용하는 해석계수 즉, compact 받침 크기, 팽창계수, 선단주변에서의 형상함수의 평활화, 보조받침을 사용하는 절점개수가 수치해석 결과에 미치는 영향을 분석하였다. 균열문제에 대한 patch 시험을 통해 응력에 대한 L_2 오차노름과 응력확대계수를 산정하여 해석계수의 영향을 분석하였으며, 그 결과는 해석계수의 선택에 대한 지침으로 제시된다.

핵심용어 : EFG, 균열해석기법, 특이기지함수, 해석계수, L_2 오차노름, 응력확대계수

Abstract

Recently, an improved EFG(Element-Free Galerkin) crack analysis technique, which includes a discontinuous approximation and a singular basis function on the auxiliary supports, was developed. The technique is able to accurately analyze the crack propagation problem without any modification of the analysis model; however, it shows some dependency on the analysis parameters used. In this study, the effect of analysis parameters such as the size of compact support, dilation parameter, the smoothness of shape function around the crack tip, and the number of node using auxiliary supports on the accuracy of solution has been investigated. Through a patch test with a crack, relative L_2 error norm of stresses and the stress intensity factor were computed and compared for various analysis parameters and the results were presented as guidelines for adequate choice of analysis parameters.

Keywords : EFG, crack analysis technique, analysis parameters, L_2 error norm, stress intensity factor

† 책임저자, 정회원 · 연세대학교 토목공학과 부교수
전화: 02-2123-2808; Fax: 02-364-5300
E-mail: lee@yonsei.ac.kr
* 정회원 · 연세대학교 토목공학과 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2003년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2003년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

이동최소제곱법에 근간을 두고 요소의 연관성(connectivity)을 이용하지 않고 절점들 간의 상관관계를 이용하여 해를 찾는 무요소(mesh-free)법 중에서 Belytschko 등¹⁾이 제안한 Element-Free Galerkin (EFG) 법은 특히 균열전파문제에 다양하게 적용되어져 왔다.^{2),3)} 또한 수치적으로 파괴역학계수를 보다 정확히 산정하기 위한 노력도 활발히 진행되었는데, 기본적인 선형의 다항기저함수로는 균열선단에서 나타나는 응력의 특이성을 정확히 묘사할 수 없기 때문에 특이성을 반영할 수 있는 항을 근사변위함수에 포함시키려는 시도가 계속되어 왔다. Fleming 등⁴⁾은 이미 알려진 균열주변 변위장에 대한 Westergaard 이론해로부터 추출한 기저함수를 EFG 근사변위함수와 다항기저함수에 포함시킨 확장기법들을 제안하였고, 균열면을 묘사하기 위해 사용하는 불연속 형상함수가 균열선단 주변에서도 근사변위함수를 불연속하게 만듦으로써 발생한 문제를 처리하기 위해 형상함수를 부드럽게 처리해주는 기법⁵⁾을 제안하기도 하였다. Belytschko와 Fleming⁶⁾도 유사한 방법으로 확장된 EFG 근사변위함수를 선형 다항기저함수를 사용한 근사변위함수와 조합하는 기법을 제시하였다. 이러한 시도들이 기존의 EFG법에서 정확하게 묘사하지 못했던 균열선단의 특이성을 표현한 반면에, 다소 복잡한 계방정식과 상당한 계산량이 추가로 요구되거나, 조합된 근사변위함수가 전체영역에 동일하게 적용되는 못하는 비효율성 등이 단점으로 지적될 수 있었다. 최근에는 EFG 근사변위함수의 확장기법과 유사하게 전통적인 유한요소법의 근사변위함수를 균열의 특이성을 표현하는 확장항과 균열면의 불연속성을 묘사하는 계단함수(step function)를 갖는 확장항을 추가하여 요소망의 재구성을 최소화하거나 재구성 없이 균열전파해석을 수행할 수 있는 기법(X-FEM)이 제안되기에 이르렀다.^{7),8)}

국내에서도 이상호와 윤영철^{13),14)}이 EFG법을 이용한 균열전파문제를 다루어 왔으며, 공학적인 응용을 위해 강부재 절취부에 발생한 피로균열의 성장해석문제에 적용되기도 했다.¹⁵⁾ 최근에는 균열면을 묘사하는 불연속 근사변위함수와 균열선단의 특이성을 묘사할 수 있는 특이기지함수를 갖는 개선된 EFG 균열해석기법¹⁶⁾을 제안하였으며, 이 방법 역시 요소망 없이 균열전파현상을 해석모형의 수정 없이 약간의 추가 자유도

를 도입해서 해석할 수 있었다. 그러나 개선된 EFG 균열해석기법은 다른 mesh-free법들과 마찬가지로 해석결과가 compact 받침(support) 크기나 팽창계수와 같은 기중함수 특성이나 특이기지함수를 적용하는 절점의 수 등, 해석계수 값에 의존하는 경향을 나타냈다. 기존의 mesh-free법을 이용한 균열해석 기법들에서 이러한 해석계수 인자들에 대한 연구가 부족했던 점에 착안하여, 본 연구는 균열문제에 대한 조각(patch) 시험을 통해 다양한 해석계수 인자들에 따른 응력의 L_2 상대오차를 평가하여 적절한 해석계수의 선택과 개선된 EFG 균열해석기법의 특성에 대한 고찰을 수행한다.

2. 특이기지함수를 이용하여 개선된 EFG 균열해석기법의 개요

2.1 이동최소제곱근사법에 의한 근사변위함수

Mesh-free법 중 하나인 EFG법은 이동최소제곱근사법(Moving Least Square Approximation)으로 형상함수를 구성하고, Galerkin 정식화 과정을 통해 약형식으로부터 계방정식을 유도한다.¹⁾ 그러나 유한요소법과 다르게 2,3절과 같이 필수경계조건을 추가적으로 만족시켜 주어야 한다. EFG 법에서 근사변위함수 $u^h(x)$ 는 기준점 x 를 중심으로 이웃한 절점들을 포함하는 영향영역 내에서의 이동최소제곱법에 의해서 형상함수 $S_I(x)$ 와 절점해 u_I 를 포함하는 식(1a)와 같이 구해진다.

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^{n_N} S_I(x) u_I \tag{1a}$$

$$S_I(x) = \sum_{j=1}^m p_j^0(x)(A^{-1}(x)C(x))_{ji} \tag{1b}$$

$$A(x) = \sum_{I=1}^{n_N} w_I(x) p(x_I) p^T(x_I) \tag{1c}$$

$$C(x) = [w_I(x)p(x_I), \dots, w_{n_N}(x)p(x_{n_N})] \tag{1d}$$

여기서, $p^T(x)$ 는 임의의 차수를 갖는 다항기저함수이고, m 은 다항기저함수의 항의 개수, n_N 은 영향영역 내

표 1 본 연구에서 사용된 가중함수들

Classification	Weight function
Simple exponential form	$w(d_I) = \begin{cases} \exp\{-((d_I/d_{\max})/\alpha)^2\} & d_I \leq d_{\max} \\ 0 & d_I > d_{\max} \end{cases}$
Gaussian exponential form	$w(d_I) = \begin{cases} \frac{\exp\{-(d_I/\alpha)^2\} - \exp\{-(d_{\max}/\alpha)^2\}}{1 - \exp\{-(d_{\max}/\alpha)^2\}} & d_I \leq d_{\max} \\ 0 & d_I > d_{\max} \end{cases}$
Quartic spline form	$w(d_I) = \begin{cases} 1 - 6(d_I/d_{\max})^2 + 8(d_I/d_{\max})^3 - 3(d_I/d_{\max})^4 & d_I \leq d_{\max} \\ 0 & d_I > d_{\max} \end{cases}$

에 포함된 절점의 개수를 의미한다.

한편, 가중함수 $w(x)$ 는 임의의 기준점의 영향영역 내에 포함된 절점들의 거리에 따른 상대적인 가중치를 결정하고 형상함수의 모양을 지배하는데, 특히 가중함수의 compact 받침의 크기를 나타내는 d_{\max} 와 지수형 가중함수의 형상을 조절하는 팽창계수 α 를 주목할 필요가 있다. 단 spline 가중함수는 팽창계수를 필요로 하지 않는다. 표 1에는 본 연구에서 대상으로 하는 세 가지의 가중함수를 제시하였는데, 여기서, $d_I = \sqrt{(x-x_I)^2 + (y-y_I)^2}$ 는 기준점에서 대상절점까지의 거리, d_{\max} 는 영향영역의 크기, α 는 가중함수의 팽창계수를 각각 의미한다.

2.2 불연속함수와 특이기저함수로 확장하여 개선된 EFG균열해석기법

개선된 EFG 균열해석기법에서는 균열면을 모형화하기 위해 불연속 근사변위함수를 도입하였다. 그림 1과 같이 임의의 균열선분들이 이루는 각에 대해 기준점과 이웃절점들이 이루는 각의 관계로부터 식(2a)와 같은 두 개의 부호함수를 정의하고 다시 식(2b)와 같은 계단함수(step function) 형태의 불연속함수를 정의할 수 있다.

$$G(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{for } \theta_\alpha/\theta_C \geq 1 \\ -1 & \text{for } \theta_\alpha/\theta_C < 1 \end{cases} \quad \text{그리고,}$$

$$H(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{for } \theta_\beta/\theta_C \geq 1 \\ -1 & \text{for } \theta_\beta/\theta_C < 1 \end{cases} \quad (2a)$$

$$I(\theta) = G(\theta) \cdot H(\theta) \quad (2b)$$

불연속함수 사용의 물리적인 의미는 자신의 compact 받침 내부에 균열면을 포함하는 절점들의 형상함수에는 계단함수가 곱해져서 근사변위함수를 불연속하게 만들어 주는 것이다. 즉, $I(\theta)$ 값이 1이면 절점 x_m 이 이 균열면을 중심으로 기준점과 같은 편에 위치하기 때문에 형상함수 계산에 포함하고, $I(\theta)$ 값이 -1인 경우에는 제외시킨다.

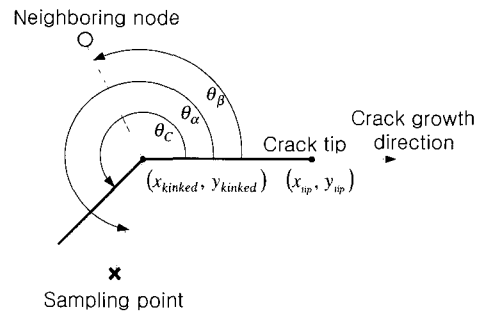


그림 1 불연속함수를 정의하기 위한 각들의 정의

한편, 선형탄성 조건 하에서 균열선단 주변에 대한 변위장으로부터 식(3)과 같은 성분을 갖는 특이기저함수를 정의할 수 있다. 특이기저함수는 기존의 형상함수를 곱해줌으로써 절점단위로 국부화된 거동을 할 수 있게 되며, 추가적으로 특이기저함수에 상응하는 절점상의 미지계수들이 필요하게 된다.

$$g(x) = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (3)$$

위 식에서, r 은 균열선단에서의 거리, θ 는 균열에 대한 각을 의미한다. 그림 2에는 균열선단을 중심으로

특이기저함수 성분들을 도시하였는데, 그림 2(a)의 $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ 항이 균열의 불연속면을 표현하고 있는 것을 주목할 필요가 있다.

식(4)는 확장된 EFG 근사변위함수를 나타내는데 절점의 형상함수로 국부화된 특이기저함수들이 포함된 확장부분이 기존의 EFG 근사함수에 추가된 것을 볼 수 있다.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_N} S_I(\mathbf{x}) u_I + \sum_{I=1}^{n_E} \sum_{k=1}^4 \bar{S}_I(\mathbf{x}) g_k(\mathbf{x}) a_{Ik} \quad (4)$$

여기서, $S_I(\mathbf{x})$ 와 n_N 는 기존의 EFG 형상함수와 영향 영역 내에 포함된 이웃절점들의 개수이며, n_E 와 a_{Ik} 는 와는 각각 영향영역에 포함된 절점 중에서 특이기저함수를 사용하는 균열선단 근처의 절점개수, 특이기저함수의 적용으로 추가된 절점계수이다. 특이기저함수의 적용은 이미 언급했듯이, EFG 형상함수 $\bar{S}_I(\mathbf{x})$ 를 이용해서 절점단위에서 국부적으로 이루어지며 이것은 해석모형에서 대부분 절점들이 특이기저함수가 필요

없는 영역에 속한다는 것을 감안할 때 매우 고무적이라 할 수 있다. 식(4)의 형태를 보면 단위분할(partition of unity) 개념⁹⁾을 만족시키는 형태를 갖고 있음을 알 수 있다. 한편, 특이기저함수를 갖는 확장부분의 국부화를 위한 EFG 형상함수 $\bar{S}_I(\mathbf{x})$ 는 보조받침(auxiliary support) 역할을 하여 임의의 위치에서 특이기저함수를 절점단위로 고려될 수 있도록 해준다. 그러나 이것은 특이기저함수의 도입으로 인해 EFG 근사변위함수에 대한 완전성(completeness) 조건이나 재생(reproducing) 조건¹⁰⁾이 부분적으로 나빠질 수 있다는 것을 암시한다.

특이기저함수를 사용하는 개선된 EFG 기법에서 Galerkin 정식화 과정을 통해 얻은 최종적인 계방정식은 식(5a)와 같다. 이때, 계방정식의 각 성분들은 식(5b) ~ (5f)와 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IJ} \\ K_{IJ}^T & K_{JJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{f}_I \\ \tilde{f}_J \end{Bmatrix} \quad (5a)$$

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} T_I^T D T_J d\Omega \quad (5b)$$

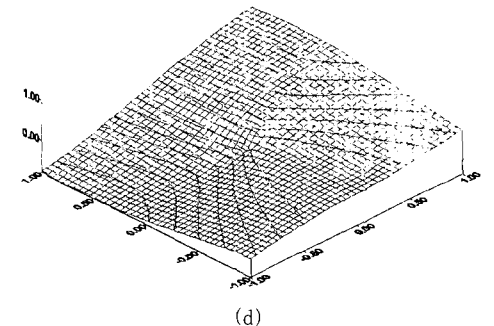
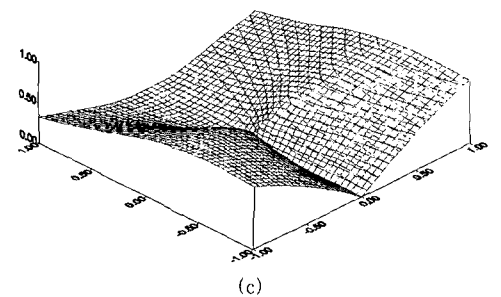
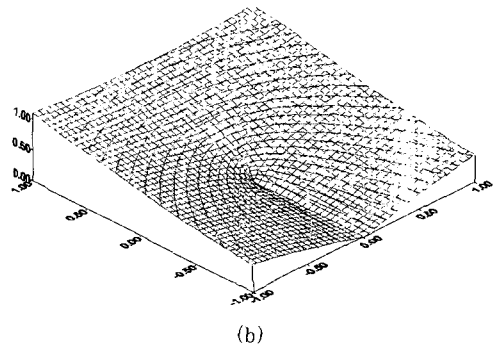
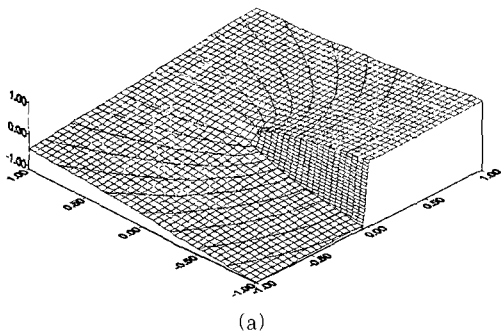


그림 2 특이기저함수의 성분들 (a) $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ (b) $\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}$ (c) $\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta$ (d) $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta$

$$K_{ll} = \int_{\Omega} T_l^T D (\bar{T}_J g_l + \bar{S}_J h_l) d\Omega, \quad l=1, \dots, 4 \quad (5c)$$

$$K_{llkl} = \int_{\Omega} (g_k^T \bar{T}_l^T + h_k^T \bar{S}_l^T) D (\bar{T}_J g_l + \bar{S}_J h_l) d\Omega, \quad k, l=1, \dots, 4 \quad (5d)$$

$$\tilde{f}_l = \int_{\Omega} S_l^T b d\Omega + \int_{\Gamma} S_l^T \bar{t} d\Gamma \quad (5e)$$

$$\tilde{f}_{lk} = \int_{\Omega} g_k^T \bar{S}_l^T b d\Omega + \int_{\Gamma} g_k^T \bar{S}_l^T \bar{t} d\Gamma, \quad k=1, \dots, 4 \quad (5f)$$

여기서, T 와 h 는 각각 형상함수와 특이기저함수의 미분형태이다. 식(5)에 대한 자세한 유도과정은 이상호와 윤영철(2001)¹⁶⁾ 또는 Lee와 Yoon(2002)¹²⁾을 참조할 수 있다.

2.3 경계조건 처리의 영향

EFG법과 같은 mesh-free법에서는 이동최소제곱법에 의한 근사변위함수를 사용한다. 이는 필수경계상에서 그 값이 정확하게 '0'으로 떨어지는 시험함수(test function)를 선택하는 것은 불가능하기 때문에 형상함수가 갖아야 하는 kronecker delta 조건을 만족시키지 못하게 되고 결과적으로 필수경계조건을 완벽하게 만족시키기 어렵게 된다. 이와 같은 필수경계조건 처리의 개선에 관한 문제는 이미 다양하게 소개되었으며,^{1),2),12),13)} 본 연구에서는 벌칙기법(Penalty method)을 이용하여 약형식에 추가적인 구속조건을 부여하였다. 벌칙기법을 적용하면 기존의 계방정식에 벌칙계수 β 를 포함한 구속에 대한 추가항이 강성도 행렬과 힘벡터에 각각 더해져서 수정된 계방정식이 얻어지고 추가적인 미지계수의 도입 없이도 필수경계조건을 만족시켜 줄 수 있게 된다. 상세한 유도과정은 이상호와 윤영철(2001)¹⁶⁾ 또는 Lee와 Yoon(2002)¹²⁾을 참조할 수 있다.

3. 균열을 포함한 patch 시험과 오차

해석계수에 대한 오차평가를 위해 이론적으로 그 해가 알려진 모드 I 균열문제에 대한 변위장(식(6a)와 (6b))을 해석모형의 경계에 미리 규정하고 응력해석을 수행

하여 계산된 응력값을 이론적으로 계산된 응력장(식 (6c)와 (6d))과 비교하는 방법을 사용하였다.

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (6a)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (6b)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (6c)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (6d)$$

해석모형은 그림 3과 같이 균열의 선단이 좌표 (1.0a, 1.0a)에 위치하며, 균열길이는 a이고, 해석모형의 가로, 세로의 길이가 각각 2a이다. 응력확대계수는 단위값 $1Nm^{-3/2}$ 로 미리 규정하였다. 균열해석시 특이기저함수를 사용하는 절점과 J-적분을 위한 영역은 그림 3에 표시된 바와 같다. Patch 시험시 해석모형의 내부에서도 평형조건을 만족시켜야 하므로 이론적으로 계산된 응력은 식(6c), (6d)와 그리고 응력확대계수 값은 미리 규정된 단위값과 같아야 한다. 균열해석시 균열선단 주변에서 부드러운 해를 얻기 위해 형상함수를 평활화 해주는 회절(diffraction) 기법^{4)~6)}을 적용하였으며, 응력확대계수의 산정은 J-적분을 영역적분의 형태로 변환한 M-적분기법¹¹⁾을 이용하였다.

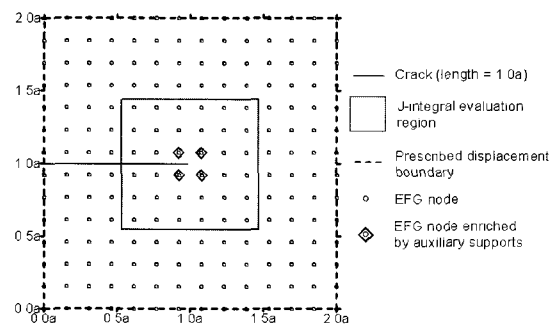


그림 3 균열문제의 patch 시험을 위한 모형

한편, 응력에 대한 이론해의 L_2 노름과 응력오차의 L_2 노름의 상대적인 비로부터 식(7)과 같은 상대오차를 정의할 수 있다.

$$\eta = \frac{\left[\int_{\Omega_e} (\sigma_{ex} - \hat{\sigma})^T (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_{\Omega_e} \sigma_{ex}^T \sigma_{ex} d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\|e_\sigma\|_{L_2}}{\|\sigma\|_{L_2}} \quad (7)$$

여기서, σ_{ex} 와 $\hat{\sigma}$ 는 각각 응력에 대한 이론해와 수치해이며, Ω_e 는 오차를 계산한 영역을 나타낸다. 본 연구에서는 patch 시험시의 오차산정 영역을 균열선단을 중심으로 $[0.4a \times 0.4a]$ 으로 제한하였는데, 이는 필수경계조건 처리를 위해 추가된 구속조건식으로 인해 발생할 수 있는 오차의 영향을 최대한 배제시키기 위함이다. 상대오차는 compact 받침의 크기, 팽창계수와 같이 가중함수 정의에 필요한 해석계수와 특이기저함수의 사용하는 절점의 개수, 형상함수의 평활화 등의 인자들이 개선된 EFG 균열해석기법에 미치는 영향을 평가할 때 응력확대계수와 함께 사용될 것이다.

본격적인 해석계수에 대한 영향평가에 앞서 그림 4에서는 식(8)로 정의되는 에너지 노름을 이용하여 불연속함수 만을 사용하는 경우와 불연속함수와 특이기저함수를 같이 사용하여 개선한 해석기법에 대한 수렴률(convergence rate)을 도시하였다. 해석시 특이기저함수를 적용하는 절점의 개수는 전체 자유도 개수에 상관없이 균열선단 주변의 4개의 절점으로 고정하였다. 수렴률 곡선의 기울기는 큰 차이가 없지만, 단지

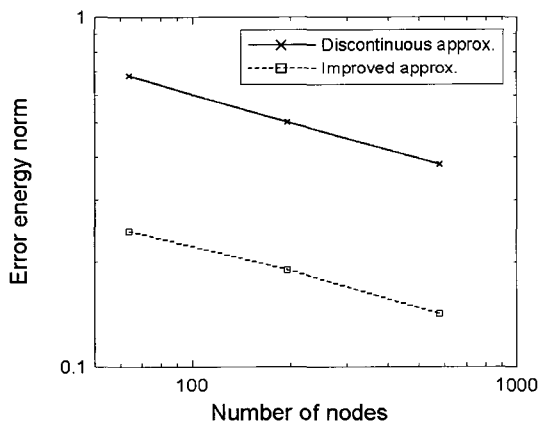


그림 4 불연속 근사변위함수와 특이기저함수로 개선된 근사 변위함수의 수렴률

균열선단 주변에 위치한 절점 4개의 근사변위함수를 개선하는 것 만으로도 오차의 절대값을 크게 감소시킬 수 있음을 확인할 수 있었다.

$$\eta = \frac{\left[\int_{\Omega_e} (\sigma_{ex} - \hat{\sigma})^T D^{-1} (\sigma_{ex} - \hat{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_{\Omega_e} \sigma_{ex}^T D^{-1} \sigma_{ex} d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\|e_\sigma\|_{H_1}}{\|\sigma\|_{H_1}} \quad (8)$$

4. L_2 상대오차와 응력확대계수에 의한 해석계수의 영향 평가

4.1 Compact 받침 크기와 팽창계수의 영향

Compact 받침은 일정한 절점분포로 인해 그 크기가 전체 영역에서 일정한 경우에 '영향영역(domain of influence)'과 같은 의미로 이해 할 수 있으며, 형상함수의 구성 시 포함되는 절점개수와 역행렬을 계산해야 하는 행렬 $A(x)$ (식(1c))의 크기를 결정한다. 본 연구에서는 가중함수로서 단순 지수함수(simple exponential), 가우스 지수함수(Gaussian exponential) 그리고 4차 spline 가중함수를 사용하였다. 여기서 특이기저함수 또는 보조받침을 적용하는 절점의 개수는 4.3절을 제외하고 균열선단에서 가장 가까운 절점 4개로 고정하였고, 균열선단주변에서 평활화된 형상함수를 사용하였다.

그림 5에는 절점 간의 거리로 정규화 된 compact 받침의 크기(d_{max}/h)와 지수형 가중함수에서 사용되는 팽창계수(α)의 변화에 따른 L_2 상대오차노름 및 응력확대계수를 도시하였다. 그림 5(a)를 보면 compact 받침의 크기를 증가시키면 약간의 오차감소 효과를 얻을 수 있음을 알 수 있는데, 이것은 근사변위함수 계산에 더 많은 절점들이 사용되어 좀더 정확한 이동최소제곱근사를 할 수 있음을 의미한다. 그림 6은 몇 가지 compact 받침 크기에 대해 팽창계수 값의 변화에 따른 상대오차와 응력확대계수를 계산한 결과인데, 좀더 정확한 결과를 주는 팽창계수 값이 존재하는 것을 알 수 있다. 예를 들어 정규화 된 compact 받침의 크기(d_{max}/h)가 3.45, 2.83, 2.12 일 때, 단순가중함수는 약 0.35, 가우스가중함수는 약 1.0의 값을 갖는 것이 가장 좋은 결과를 주었다. 그러나 주목할 것은 compact 받침의 크기나 팽창계수의 변화에도 응력확대계수 값은 높은 정확도를 유지하고 있다는 것이다.

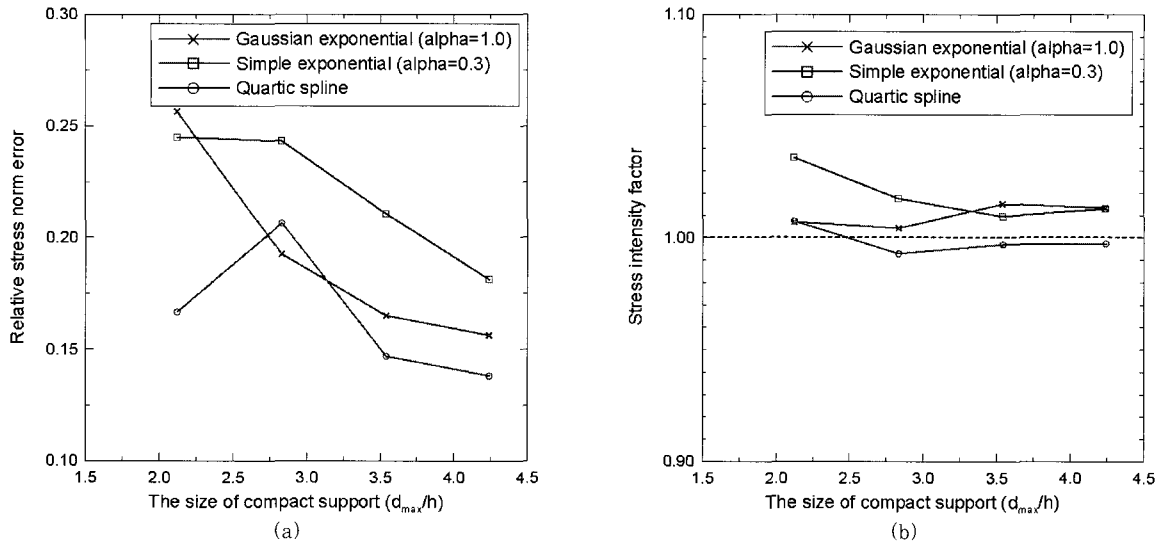


그림 5 Compact 받침의 크기에 따른 (a) 응력의 상대오차 (b) 응력확대계수

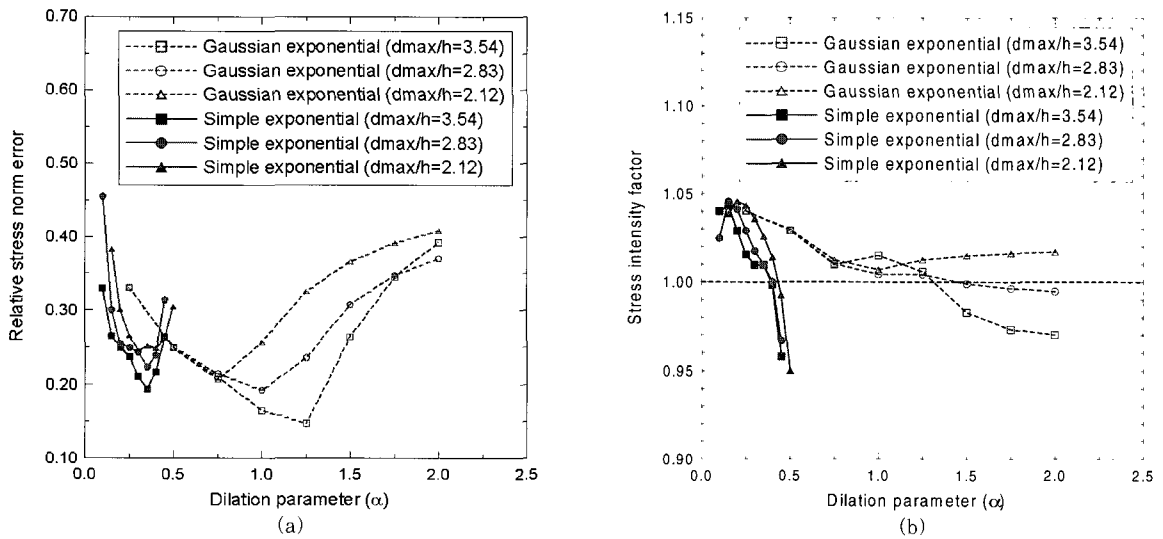


그림 6 팽창계수의 크기에 따른 (a) 응력의 상대오차 (b) 응력확대계수

또한, 정도 높은 결과를 주는 팽창계수의 가용범위도 가우스 가중함수가 단순 가중함수보다 4배 정도 넓었으며, 단순 가중함수는 상대적으로 큰 오차를 발생시켰다.

4.2 형상함수의 평활화(smoothing)의 영향

균열면을 모사하기 위해 2.2절에서 제시한 불연속 근사변위함수는 실제적으로 불연속면을 지날 때 균열

면 반대편의 형상함수 부분을 고려하지 않기 때문에 필연적으로 균열선단 주변에서도 근사변위함수가 불연속하게 된다. 실제 균열에서의 거동과 차이를 보이는 이러한 현상은 해의 정도를 떨어뜨리기 때문에 기존의 연구들^{4)~6)}에서 형상함수를 부드럽게 만들어 주는 기법을 도입하였다. 즉, 회절기법은 기준점과 절점 사이의 거리($d_0(x) = \|x - x_l\|$)를 균열선단의 위치를 고려하여 식(9)와 같이 회절계수(λ)를 도입한 수정된 거리함수

를 사용함으로써 형상함수 또는 근사변위함수가 평활화 되도록 해준다.

$$d_I(x) = \left(\frac{d_1 + d_2(x)}{d_0(x)} \right)^\lambda d_0(x) \quad (9)$$

여기서, d_1 와 $d_2(x)$ 는 각각 균열선단에서 절점과 기준점까지의 거리이다.

균열선단 부근에서 $\theta = 0$ 일 때의 수직응력 단면도(profile)를 그림 7의 (a), (b), (c)에 나타냈다. 불연속한 형상함수를 그대로 사용하면 변위장 또는 응력장의 평활도(smoothness)를 떨어뜨리고 그 결과, 응력이 과소평가되며, 이것은 균열선단 주변에서 근사변위함수를 부드럽게 연속이 되도록 해주지 않으면 특이기저함수 사용시 정확성이 떨어진다는 것을 의미한다.

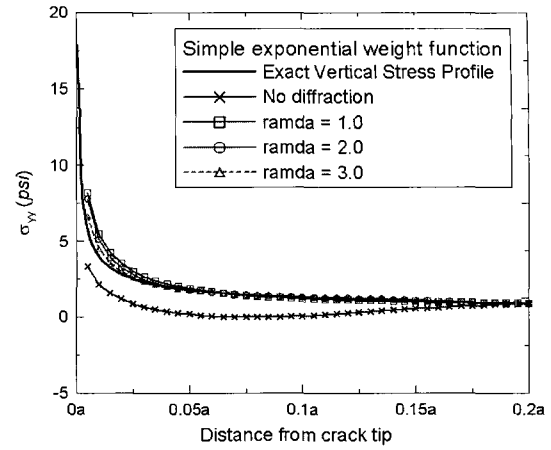
응력에 대한 L_2 상대오차의 경우, 그림 8의 (a)와 (b)에서 보듯이 선단주변에서 부드러운 형상함수를 사용하지 않으면 오차는 급격히 증가하고 응력확대계수 값이 과소평가 된다. 단, 평활화된 형상함수를 사용하면 회절계수 값의 크기와는 별 상관 없이 좋은 결과를 주었다. 이러한 현상은 보조받침을 이용하여 임의의 위치에서의 특이기저함수 값을 절점값으로 도입하면서 발생하는 문제이다. 그러나 식(10)과 같이 확장된 기저다항식을 도입하면 이와 같은 현상을 피할 수 있다.

$$p(x)^T = \left\{ 1, x, y, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (10)$$

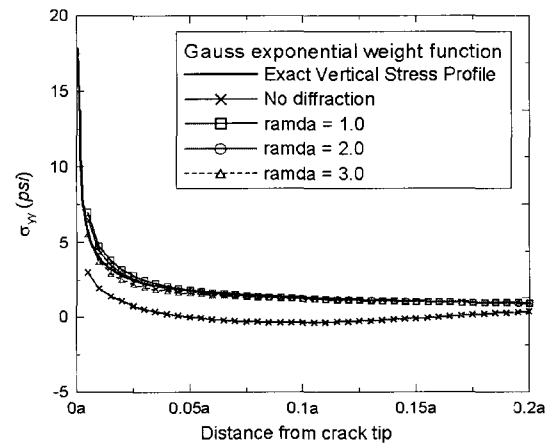
4.3 특이기저함수를 적용하는 절점개수의 영향

균열선단 주변에서 응력의 특이성을 묘사할 수 있도록 수정된 근사변위함수를 적용하는 절점개수는 수치해의 정도에 영향을 미친다. 본 절에서는 몇 가지 보조받침 크기에 대해 특이기저함수를 적용하는 절점개수의 증가에 따른 상대오차를 평가하였다. 팽창계수는 가우스 가중함수의 경우, 1.0, 단순 가중함수의 경우는 0.3을 사용하였다.

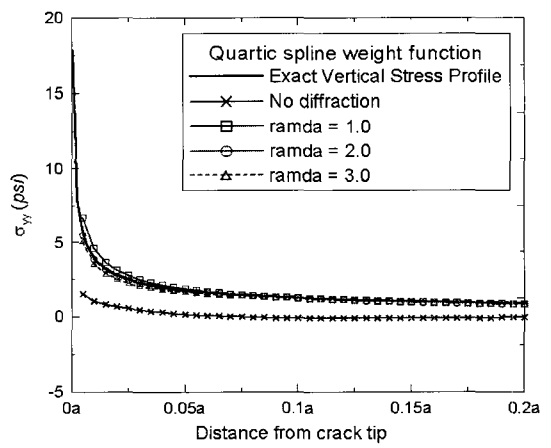
그림 9(a)와 같이 특이기저함수 또는 보조받침을 적용하는 절점개수를 늘릴수록 오히려 오차가 증가하였다. 그림 9(b)는 단순 가중함수가 다른 두 가중함수에 비해 상대적으로 큰 오차를 발생시켰고 spline 가



(a) 단순 가중함수



(b) 가우스 가중함수



(c) spline 가중함수

그림 7 회절계수(λ)에 따른 응력 profile

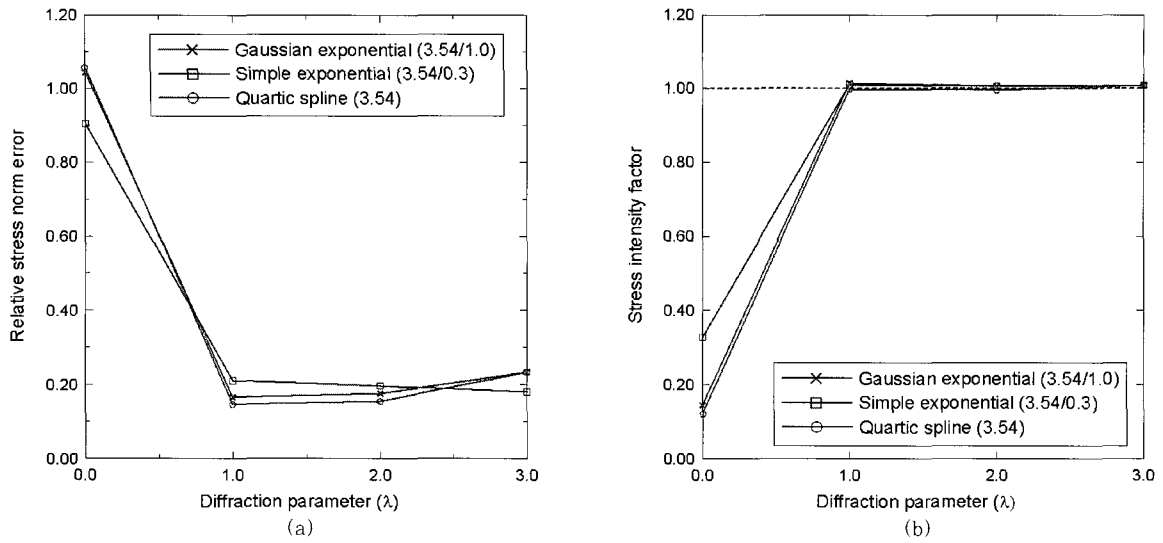


그림 8 회절계수 (λ)에 따른 (a) 응력의 상대오차 (b) 응력확대계수

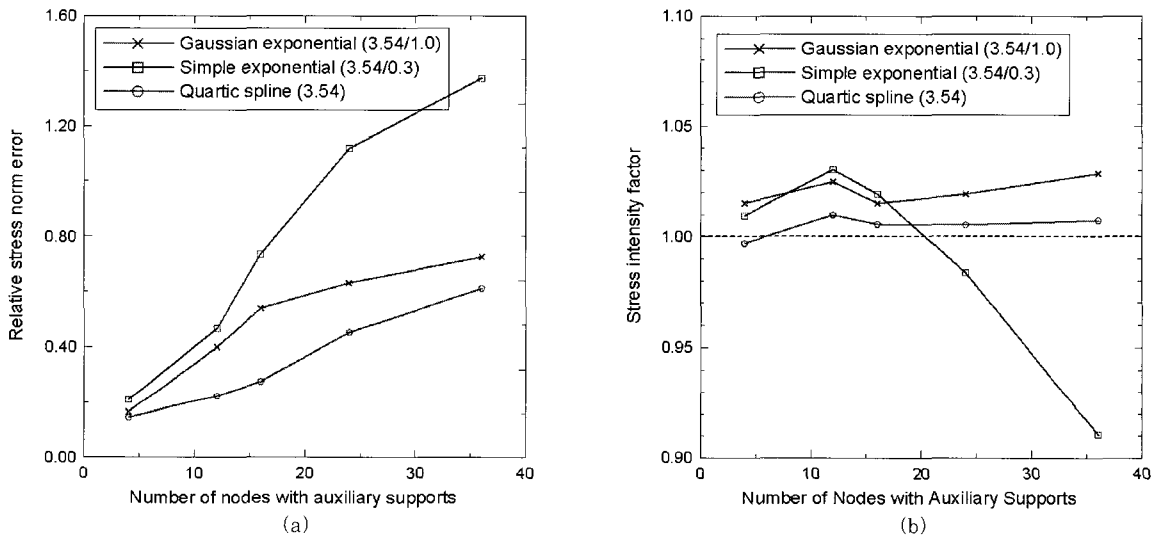
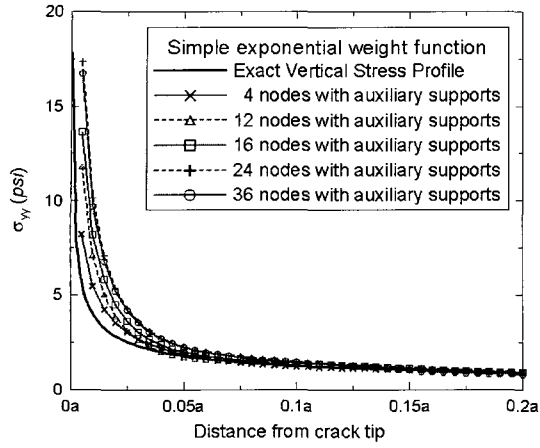


그림 9 보조받침을 사용하는 절점개수에 따른 (a) 응력의 상대오차 (b) 응력확대계수

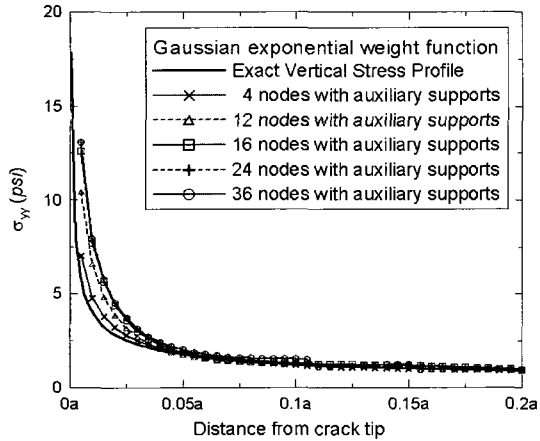
중합수가 가장 좋은 결과를 주는 것을 보여준다. 그러나 이 때에도 응력확대계수는 충분한 정확도를 유지하고 있음을 알 수 있다. 또한, 본 해석방법이 J-적분 경로에 관계없이 정확한 응력확대계수 값을 주는 것을 이상호와 윤영철(2002)¹⁷⁾에서 이미 제시한 바 있다.

그림 10의(a), (b), (c)는 보조받침을 사용하는 절점개수의 증가가 가중합수의 종류에 상관없이 응력을

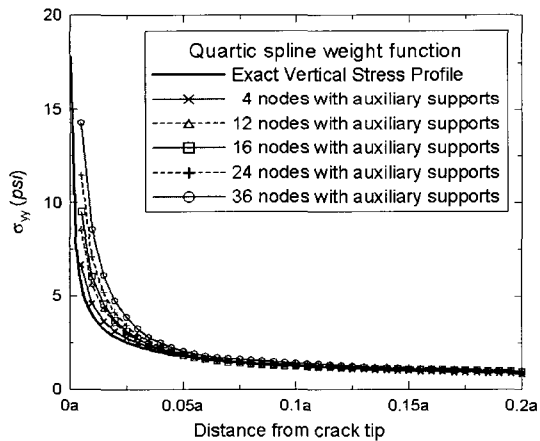
과대평가할 수 있음을 보여준다. 이는 개선된 EFG기법에서 보조받침을 이용하여 특이기저함수를 도입할 때, EFG 근사변위함수가 갖춰야 하는 완전성(completeness) 조건 또는 재생(reproducing) 조건⁹⁾이 어느 정도 회생될 수 있음을 암시한다. 결국, 특이기저함수를 균열선단 주변의 몇몇 절점에 국한하여 적용하는 것이 바람직하다는 것을 알 수 있다.



(a) 단순 가중함수



(b) 가우스 가중함수



(c) spline 가중함수

그림 10 보조받침을 사용하는 절점개수에 따른 응력 profile

5. 토의 및 결론

본 연구는 기존의 EFG 근사변위함수에 보조받침을 이용하여 특이기저함수를 추가함으로써 균열선단의 응력특이성을 모형화할 수 있는 개선된 EFG 균열해석기법에서 사용하는 해석계수의 영향을 분석하였다. 균열에 대한 조각(patch)시험을 통하여 에너지 노름을 이용하여 수렴률을 평가하였고, 응력에 대한 L_2 오차 노름과 응력확대계수 및 응력 단면도를 산정함으로써 compact 받침의 크기, 팽창계수, 회전계수, 보조받침을 사용하는 절점개수가 정확도에 미치는 영향을 연구하였다. 개선된 EFG 균열해석기법에서 해의 정도를 향상시키기 위해 다음과 같은 사항을 유의할 필요가 있다. 보조받침을 사용하는 절점을 새롭게 추가하려면 특이성의 영향이 지배적인 균열선단에 가까운 쪽으로 배치해야 하며 이때, 약형식의 적분을 위한 background cell도 추가된 절점배치와 일치하도록 수정해 주는 것이 좋다. EFG법이 전형적인 Galerkin 정식화 과정을 따르므로 약형식에 대한 정확한 적분이 요구되고, 특이성을 보이는 균열선단 주변에서 다른 영역보다 더 높은 차수의 가우스 적분을 사용하는 것이 바람직하다.

본 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같이 정리할 수 있다. 개선된 EFG 균열해석기법에 대한 해석계수의 영향분석을 통해 정확한 해석에 요구되는 compact 받침의 크기와 팽창계수 및 특이기저함수를 적용하는 절점개수와 같은 해석계수를 선택할 수 있는 지침(guideline)을 제시하였으며 동시에 균열선단 주변에서 부드러운 근사변위함수의 필요성을 검증하였다. 구체적으로 보면 첫째, compact 받침의 크기를 크게 해 줄 때 약간의 오차감소 효과를 얻을 수 있었고, 좀 더 정확한 결과를 주는 compact 받침의 크기가 존재하는 것을 알 수 있었다. 둘째, 불연속 근사변위함수 또는 불연속 형상함수의 사용은 균열선단주변에서 평활도(smoothness)의 결여로 인해 해의 정도를 떨어뜨렸으며, 정확한 해석을 위해 근사변위함수가 부드러운 형상을 갖도록 해 주어야 한다. 셋째, 특이기저함수 또는 보조받침을 사용하는 절점개수를 증가시키면 오차도 함께 증가했으며, 균열선단 주변에서의 응력도 과대평가되는 경향을 보였다.

이와 같은 결과는 모드 I 변위장에 대한 조각시험을 바탕으로 얻어진 것이지만, 모드 II 변위장을 적용한 경우에 대한 해석계수에 대한 영향을 조사해 본 결과

유사한 결과를 얻을 수 있었다. 이는 모드 II나 혼합모드 균열문제의 경우에도 본 연구의 결과가 일관성 있게 적용될 수 있음을 나타내는 것으로 이해할 수 있다.

감사의 글

이 논문은 2002년도 두뇌한국21 사업 핵심분야에 의하여 지원되었습니다.

참 고 문 헌

- Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., "Element-free Galerkin methods," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1994, pp.229~256
- Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. and Tabbara, M., "Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32, 1995, pp.2547~2570
- Belytschko, T. and Tabbara, M., "Dynamic fracture using element-free Galerkin methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, 1996, pp.923~938
- Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B. and Belytschko, T., "Enrichment element-free Galerkin methods for crack tip fields," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, 1997, pp.1483~1504
- Organ, D. J., Fleming, M., Terry, T. and Belytschko, T., "Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency," *Computational Mechanics*, Vol. 18, 1996, pp.225~235
- Belytschko, T. and Fleming, M., "Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method," *Computer and Structures*, Vol. 71, 1999, pp.173~195
- Belytschko, T. and Black, T., "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, 1999, pp. 601~620
- Moes, N., Dolbow, J. and Belytschko, T., "A finite element method for crack growth without remeshing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, 1999, pp.131~150
- Melenk, J. M. and Babu? ka, I., "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, 1996, pp.289~314
- Belytschko, T. Krongauz, Y. Dolbow, J. and Gerlach, C., "On the completeness of meshfree particle methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, 1998, pp.785~819
- Moran, B. and Shih C. F., "Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance" *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27, 1987, pp.615~641
- Lee, S-H and Yoon, Y-C., "An improved crack analysis technique by element-free Galerkin method with auxiliary supports", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, accepted for publication, 2002
- 이상호, 윤영철, "Element-Free Galerkin법을 이용한 혼합모드상태 균열의 균열진전해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제12권, 제3호, 1999, pp.485~494
- 이상호, 윤영철, "EFG법을 이용한 다수균열 함유 강부재의 피로균열 성장거동 해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제12권, 제4호, 1999, pp.691~700
- 이상호, 윤영철, "Mesh-Free법을 이용한 강부재 절취부 발생 피로균열의 성장해석", 대한토목학회 논문집, 제22권, 제4-A호, 2002, pp.739~749
- 이상호, 윤영철, "특이기저함수를 이용하여 개선한 Mesh-Free 균열해석기법", 한국전산구조공학회 논문집, 제14권, 제3호, 2001, pp.381~390
- 이상호, 윤영철, "균열선단의 특이성을 반영한 개선된 EFG 해석기법들의 비교", 2002년도 한국전산구조공학회 봄 학술발표회 논문집, 제15권, 제1집, pp.69~76