

능동보의 고유진동수 계산을 위한 휘트릭-윌리엄즈 알고리즘의 유도

Formulation of a Wittrick-Williams Algorithm for Computing Natural Frequencies of an Active Beam

김 주 흥† 이 우 식*
Kim, Joohong Lee, Usik

(논문접수일 : 2001년 8월 9일 ; 심사종료일 : 2002년 7월 16일)

요 지

구조물의 고유진동수가 너무 밀집되어 있거나 특성방정식의 부호가 영을 지나지 않고 갑자기 무한대가 되는 등의 불연속성이 존재하는 주파수 대역에 속해있는 고유진동수를 단순히 근을 찾는 수치해석 알고리즘만을 이용하여 모두 찾아내어 계산한다는 것은 그다지 쉬운 일이 아니다. 따라서, 본 연구에서는 이러한 문제점을 극복할 수 있는 휘트릭-윌리엄즈 알고리즘을 탄성재층과 압전소재층의 두개의 층이 적층되어 구성된 능동보의 스펙트럴요소모델에 대하여 유도하였다. 유도된 알고리즘은 균일적층 능동보와 부분적층 능동보의 두 경우에 적용하여 그 결과를 평가하였다.

핵심용어 : 휘트릭-윌리엄즈 알고리즘, 스펙트럴요소모델, 능동보, 고유진동수

Abstract

In this paper, a Wittrick-Williams algorithm is developed for the spectral element model of an elastic-piezoelectric two-layer active beam. This algorithm may help calculate all the required natural frequencies, which lie below any chosen frequency, without the possibility of missing any due to close grouping or due to the abrupt sign changes of the determinant of spectral element matrix via infinity instead of via zero. A uniform active beam and a partially patched active beam are considered as the illustrative examples to confirm the present algorithm.

Keywords : Wittrick-Williams algorithm, spectral element model, active beam, natural frequency

1. 서 론

구조동역학 해석에서 구조물의 고유진동수를 정확하게 예측하는 일은 매우 중요하다. 구조물의 고유진동수를 구하는 방법으로써 일반적으로 동강성행렬(dynamic stiffness matrix)의 행렬식으로부터 유도되는 특성

방정식의 근을 구하는 방법이 널리 사용되고 있다.¹⁾ 유한요소법(FEM, finite element method)을 이용하여 구조물을 유한개의 자유도를 갖는 유한요소모델로 나타낼 때 유도되는 동강성행렬은 주파수 ω 의 제곱에 대한 선형함수가 된다. 이 경우에는 자유도의 개수와 일치하는 수의 고유진동수를 모두 구할 수 있는 수

† 책임저자, 인하대학교 산업과학기술연구소 연구원
전화: 031-860-8780; Fax: 031-886-1434
E-mail: vano93@yahoo.co.kr

* 정희원 · 인하대학교 기계공학부 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2003년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2003년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

치해석 알고리즘이 많이 개발되어 있다. 그러나, 유한 요소모델의 자유도의 개수를 축소하게 될 때 얻어지게 되는 축약된 유한요소모델의 경우 또는 구조물을 무한한 자유도를 갖는 연속체 모델로 나타낸 경우의 동강성 행렬은 더 이상 주파수의 제공에 대한 선형함수가 아니다. 따라서 특성방정식은 자연히 복잡한 주파수에 대한 초월함수(transcendental function)가 되기 때문에 요구되는 고유진동수를 빠짐없이 찾아내기 위해서는 수치해석 과정에서 상당한 시행착오가 요구된다.

임의의 주파수 ω 아래에 존재하는 고유진동수의 개수를 알고 있고 또한 특성방정식에서 불연속점이 존재하는 주파수를 알고 있다면 잘 알려진 근을 찾기 위한 상용 알고리즘을 반복적으로 사용함으로써 파악된 개수의 고유진동수를 모두 찾아낼 수 있을 것이다. 이러한 목적으로 Wittrick과 Williams²⁾가 임의의 주파수 대역에 몇 개의 고유진동수가 존재하는지를 정확히 파악할 수 있는 일반이론을 개발하였으며 문헌에서는 통상 '휘트릭-윌리엄즈 알고리즘'이라고 부른다. 이 일반이론을 실제로 응용하기 위해서는 응용 대상 구조물에 대한 휘트릭-윌리엄즈 알고리즘을 먼저 유도해야 한다. 그러나, 휘트릭-윌리엄즈 알고리즘의 유도는 동강성행렬 자체의 복잡성으로 인하여 매우 제한적으로 이루어져 왔다. 그 동안 휘트릭-윌리엄즈 알고리즘이 유도되어 적용된 구조물의 예로서 골조물,³⁾ 해양 구조물,⁴⁾ 나선형 스프링⁵⁾ 등이 있다.

엄밀한 동적형상함수(dynamic shape function) 또는 파동해(wave solution)를 이용하여 주파수의 함수로 유도되는 동강성행렬은 그 유도과정 자체가 엄밀하기 때문에 FEM(finite element method)과 같은 근사해법으로 유도되는 일반 동강성 행렬과 구별하여 엄밀한 동강성행렬이라 하며 문헌에서는 이를 스펙트럴요소행렬(spectral element matrix)이라고도 한다.⁶⁾⁻⁸⁾ 소위 SEM(spectral element method)은 기존의 유한요소행렬을 사용하는 대신에 스펙트럴요소행렬을 사용하며 FFT-알고리즘을 해석과정에서 효율적으로 활용하여 주파수 및 시간영역에서의 진동응답을 매우 정확하게 제공하는 구조동역학 해석기법이다. SEM의 이러한 장점에도 불구하고 스펙트럴요소행렬의 유도가 매우 어려운 복잡한 구조물에 대하여는 실제 응용이 제한적이라는 단점을 갖고 있다. SEM은 초기에는 탄성과 문제에 주로 응용되어 왔으나^{9),10)} 최근에는 다양한 구조동역학 문제에도 확장되어 응용되고 있다.^{11),12)}

지능형 구조물의 능동제어계를 보다 성공적으로 설계하기 위해서는 필요한 모든 고유진동수를 요구되는 정확도의 수준으로 예측하는 것이 매우 중요하다. 최근에 탄성재층(elastic layer)과 압전재료층(piezoelectric layer)으로 구성된 능동보(active beam)에 대하여 Lee와 Kim¹³⁾이 연성된 연립 편미분 지배방정식으로 부터 SEM모델을 유도한 바 있다. 능동보의 스펙트럴요소행렬은 주파수의 제공에 대한 선형함수가 아니므로 특성방정식은 매우 복잡한 형태의 초월함수 형태를 갖는다. 이러한 특성방정식에 기존의 근을 찾는 범용 수치해석 알고리즘을 단순히 적용하는 경우 임의의 주파수 아래에 존재하는 고유진동수를 모두 찾아내지 못하는 경우가 종종 발생한다. 이는 동강성행렬의 행렬식에 불연속점이 존재하여 이러한 불연속점 부근에 위치하는 고유진동수를 수치해석적으로 제대로 인지하지 못하거나 고유진동수가 존재하는 것으로 잘못 오판할 수 있기 때문이다.

따라서, 본 연구에서는 능동보에 대하여 임의의 주파수 대역에 존재하는 모든 고유진동수를 빠짐없이 찾을 수 있는 휘트릭-윌리엄즈 알고리즘을 유도하였다.

2. 능동보의 스펙트럴요소행렬

본 연구에서는 탄성재층과 작동기의 역할을 담당하는 압전재료층의 두 개의 층을 적용하여 제작한 능동보를 생각한다. 이 능동보가 주파수 ω 로 조화운동을 한다고 가정하면 다음과 같은 지배방정식을 유도할 수 있다.¹⁴⁾

$$\begin{aligned} EIW'''' - \omega^2 \rho AW &= \omega^2 (\alpha U' - \gamma W'') + \beta U''' \\ EAU'' + \omega^2 \rho AU &= \omega^2 \alpha W' + \beta W'' \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $W(x)$ 와 $U(x)$ 는 각각 능동보의 횡방향과 축방향의 진동변위에 대한 주파수 스펙트럼(또는 Fourier 계수)를 나타내며 ω 는 주파수를 나타낸다. 또한 EI , EA 및 ρA 는 각각 탄성재층과 압전재료층의 물성치와 기하학적 치수에 의해 결정되는 능동보 전체에 대한 등가적인 굽힘강성, 인장강성 및 단위 길이당 질량을 나타낸다. 또한, α , β , γ 는 다음과 같이 정의된다.¹³⁾

$$\alpha = \frac{1}{2} \rho_p A_p h, \quad \beta = \frac{1}{2} E_p A_p h, \quad \gamma = \frac{1}{4} \rho_p A_p h^2 \quad (2)$$

여기서, ρ_p 와 A_p 는 각각 압전재료층의 질량밀도와 단면적을 나타내고, h 는 능동보의 전체 두께를 나타낸다. 능동보의 스펙트럴요소행렬을 유도하기 위하여 먼저 식(1)의 일반해를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} W(x, \omega) &= [\Phi(x; \omega)]\{A\} \\ U(x, \omega) &= [\Phi(x; \omega)]\{B\} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} [\Phi(x; \omega)] &= [\cos(k_1 x) \quad \sin(k_1 x) \quad \cos(k_2 x) \\ &\quad \sin(k_2 x) \quad \cosh(k_3 x) \quad \sinh(k_3 x)] \\ \{A\} &= [A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5 \quad A_6]^T \\ \{B\} &= [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4 \quad B_5 \quad B_6]^T \end{aligned} \quad (4)$$

식(3)에서 k_1 은 축방향 진행파(propagating longitudinal wave), k_2 는 굽힘 진행파(propagating bending wave), k_3 는 굽힘 비진행파(non-propagating bending wave)의 파동수(wavenumber)를 나타내며 다음의 분산관계식(dispersion relation)에 의해 결정된다.

$$\begin{aligned} (\beta^2 - EA EI)k^6 + \omega^2 L^2 (\rho AEI + \gamma EA - 2\alpha\beta)k^4 \\ + \omega^2 (\alpha^2 \omega^2 - \gamma \rho A \omega^2 + \rho A EA)k^2 - \omega^4 \rho A^2 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

또한, 식(3)에서 상수벡터 $\{A\}$ 와 $\{B\}$ 는 경계조건에 의해 결정된다. 식(3)을 지배 방정식 식(1)에 대입하면 벡터 $\{A\}$ 와 $\{B\}$ 의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \lambda_1 \tan(k_1 x), & B_2 &= -A_2 \lambda_1 \cot(k_1 x) \\ B_3 &= A_3 \lambda_2 \tan(k_2 x), & B_4 &= -A_4 \lambda_2 \cot(k_2 x) \\ B_5 &= A_5 \lambda_3 \tanh(k_3 x), & B_6 &= A_6 \lambda_3 \coth(k_3 x) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ 는 다음식으로 주어진다.

$$\lambda_i = \frac{k_i (\beta k_i^2 - \alpha \omega^2)}{\rho A \omega^2 - EA k_i^2} \quad (i=1, 2, 3) \quad (7)$$

Fig. 1은 능동보 요소의 양 끝 절점(node)에 정의된 변위와 기울기 ($U_i, W_i, \Theta_i; i=1, 2$) 그리고 힘과 모

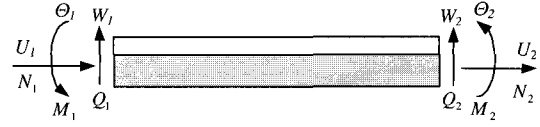


Fig. 1 Spectral element of active beam and its sign convention

멘트 ($N_i, Q_i, M_i; i=1, 2$)를 보이고 있다. 식(3)을 힘과 변위 및 모멘트와 변위에 관한 재료역학적 관계식¹⁴⁾에 대입하면 절점힘과 절점 모멘트는 모두 벡터 $\{A\}$ 만의 함수로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{f\} = [P(\omega)]\{A\} \quad (8)$$

여기서 $\{f\}$ 는 절점모멘트를 포함하는 절점힘 벡터로서 다음과 같이 정의된다.

$$\{f\} = [N_1 \quad Q_1 \quad M_1 \quad N_2 \quad Q_2 \quad M_2]^T \quad (9)$$

또한, 식(3)을 이용하여 능동보 요소의 양 끝단에서의 절점변위와 절점기울기를 구하면 이들도 모두 벡터 $\{A\}$ 만의 함수로 다음과 같이 표현된다.

$$\{y\} = [Q(\omega)]\{A\} \quad (10)$$

여기서 $\{y\}$ 는 절점변위와 절점기울기로 구성된 자유도 벡터로서 다음과 같다.

$$\{y\} = [U_1 \quad W_1 \quad \Theta_1 \quad U_2 \quad W_2 \quad \Theta_2]^T \quad (11)$$

행렬 $[P]$ 와 $[Q]$ 는 모두 주파수의 함수로서 부록 A에 수록하였다. 식(8)과 식(10)으로부터 벡터 A 를 소거하면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.¹³⁾

$$\{f\} = [P(\omega)][Q(\omega)]^{-1}\{y\} = [s(\omega)]\{y\} \quad (12)$$

여기서 행렬 $[s]$ 는 절점힘 벡터와 자유도 벡터를 연결하는 대칭성을 갖는 행렬로서 스펙트럴요소행렬이라 한다.

전체 구조물에 대한 지배방정식은 스펙트럴요소를 결합함으로써 유도되며 이는 FEM과 전적으로 동일함

방법에 의해 수행된다. 분할된 모든 스펙트럴요소를 결합한 후 경계조건을 적용하면 전체 구조물에 대한 지배방정식은 다음식과 같이 유도된다.

$$[S(\omega)]\{Y\} = \{F\} \quad (13)$$

여기서 $[S]$ 는 결합된 스펙트럴행렬, $\{F\}$ 는 결합된 절점힘 벡터, $\{Y\}$ 는 결합된 자유도 벡터를 나타낸다. 따라서, 능동보의 고유치 문제는 다음과 같이 주어진다.

$$[S(\omega)]\{Y\} = \{0\} \quad (14)$$

FEM에서와는 달리 식(14)의 동강성행렬은 주파수 ω 의 제곱에 대한 선형함수가 아니므로 고유진동수를 구하기 위해 문헌에 소개되는 일반적인 고유치해석 기법¹⁶⁾을 바로 적용할 수 없으며, 부득이 결합된 스펙트럴행렬의 행렬식 $\Delta(\omega) = \det[S]$ 이 영이라는 조건으로부터 구하게 된다.

3. 휘트릭-윌리엄즈 알고리즘의 유도

FEM모델과 SEM모델은 모두 유한개의 자유도를 갖는다. 그러나, SEM모델은 FEM모델과는 달리 무한개의 엄밀한 고유진동수를 제공한다. 스펙트럴요소행렬은 주파수의 제곱에 대한 선형함수가 아니므로 특성방정식은 자연히 매우 복잡한 초월함수의 형태를 갖는다. 이러한 특성방정식에 근을 찾기 위한 수치해석 알고리즘을 단순히 적용하여 임의의 주파수 대역에 존재하는 고유진동수를 모두 찾아내기 위한 시도가 실패하는 경우가 흔히 발생하며 상당한 시행착오 과정이 요구된다. 따라서, 엄밀하게 유도된 SEM모델로부터 엄밀한 고유진동수를 어떻게 하면 빠짐없이 찾아낼 수 있는가는 매우 중요한 문제이다. 이러한 문제의 해결로써, 임의로 선택한 주파수 아래에 존재하는 모든 고유진동수의 개수를 파악하기 위한 알고리즘을 Wittrick과 Williams²⁾이 다음과 같이 제안하였다.

$$J(\omega) = J_0(\omega) + \text{sgn}[S(\omega)] \quad (15)$$

여기서, $J(\omega)$ 는 임의로 선택한 주파수를 ω 라 할 때 주파수 ω 보다 낮은 모든 고유진동수의 개수를 나타

내며, $J_0(\omega)$ 는 변위 Y 의 값이 영이 되도록 완전 구속한 경우 주파수 ω 보다 낮은 모든 고유진동수의 개수를 나타낸다. 또한, 식(15)에서 $\text{sgn}[S]$ 는 결합된 스펙트럴행렬 $[S]$ 의 'sign count'²⁾를 나타내며 이는 상삼각행렬(upper triangular matrix)로 변환했을 때 음의 부호를 갖는 대각요소의 개수와 동일하다. 스펙트럴행렬 $[S]$ 에 대한 상삼각행렬은 가우스 소거법(Gauss elimination method)¹⁴⁾을 사용하여 얻을 수 있다.

식(15)를 실제문제에 적용하기 위해서는 실제문제에 대한 $J_0(\omega)$ 의 값을 알고 있어야 한다. 균일한 단순보의 경우 $J_0(\omega)$ 는 다음의 공식으로 주어진다.³⁾

$$J_0 = j - \frac{1}{2} \left\{ 1 - (-1)^j \text{sign}(1 - \cosh kL \sinh kL) \right\} \quad (16)$$

여기서 k 는 파동수, L 은 보의 길이, j 는 kL/π 보다 크지 않는 최대 정수이다. 식(16)에서 $\text{sign}(\)$ 는 괄호안의 함수가 갖는 부호에 의해 결정되며 +1 또는 -1의 값을 가진다. 즉, 식(16)의 $J_0(\omega)$ 는 보의 양 끝단을 모두 구속한 경우 주파수 ω 보다 낮은 고유진동수의 개수를 나타낸다. 능동보는 균일한 단순보에 비하여 훨씬 복잡한 스펙트럴요소행렬을 갖기 때문에 $J_0(\omega)$ 의 유도가 요구된다.

정의에 의해 $J_0(\omega)$ 는 식(14)에 양단고정의 경계조건을 적용하여 계산한 주파수 ω 보다 낮은 고유진동수의 개수이다. 균일한 능동보의 경우, 식(14)의 결합된 스펙트럴행렬 $[S]$ 는 보의 길이에 상관없이 하나의 스펙트럴요소행렬로 표현된다. 이 경우 $J_0(\omega)$ 를 유도하기 위해 양단고정 경계조건을 직접 적용할 수 없는 어려움이 발생한다. 따라서, 본 연구에서는 다음과 같은 간접적인 방법을 사용하였다.

먼저, 양단이 단순지지된 능동보에 대한 고유진동수의 개수 $J_{ss}(\omega)$ 와 $\text{sgn}[S_{ss}]$ 를 구한다. $\text{sgn}[S_{ss}]$ 는 수치해석적인 방법으로 계산할 수 있다. 본 연구에서 양단이 단순 지지된 능동보에 대한 $J(\omega)$, 즉 $J_{ss}(\omega)$ 를 먼저 구하는 이유는 다른 경계조건에 비하여 $J(\omega)$ 를 구하는 것이 훨씬 용이하기 때문이다.

$J_0(\omega)$ 의 정의에 따르면 양단이 단순지지된 능동보에 사용되는 $J_0(\omega)$ 와 임의의 경계조건을 갖는 능동보에 사용되는 $J_0(\omega)$ 는 동일해야 한다. 이 사실을 이용하면 식(15)에서 요구되는 $J_0(\omega)$ 는 양단이 단순지지된 능동보의 $J_{ss}(\omega)$ 와 $\text{sgn}[S_{ss}]$ 를 활용하여 다음과 같

이 계산할 수 있다.

$$J_0(\omega) = J_{SS}(\omega) - \text{sgn}[S_{SS}(\omega)] \quad (17)$$

식(17)으로부터 $J_0(\omega)$ 가 결정되면 임의의 경계조건에 대한 $J(\omega)$ 는 식(15)에 의해 최종 결정된다.

식(17)의 $J_{SS}(\omega)$ 를 유도하기 위한 절차로서, 먼저 양단이 단순지지된 능동보에 대한 특성방정식을 식(14)으로부터 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\sin(k_1 L) \sin(k_2 L) f_{SS}(\omega) = 0 \quad (18)$$

여기서 $f_{SS}(\omega)$ 는 주파수에 관한 함수로서 주파수 ω 가 영인 경우를 제외하고 언제나 영이 아닌 값을 갖는다 (부록 B). 따라서, 식(18)로부터 다음의 조건식을 구할 수 있다.

$$k_1 L = n\pi \quad \text{or} \quad k_2 L = n\pi \quad (19)$$

위의 결과로부터 식(17)의 $J_{SS}(\omega)$ 는 다음식에 의해 구할 수 있다.

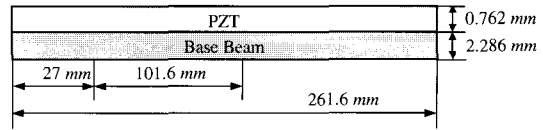
$$J_{SS}(\omega) = J_1(\omega) + J_2(\omega) \quad (20)$$

여기서

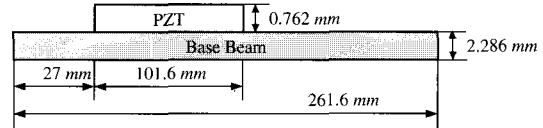
$$\begin{aligned} J_1(\omega) &= \text{the largest integer} < k_1 L / \pi \\ J_2(\omega) &= \text{the largest integer} < k_2 L / \pi \end{aligned} \quad (21)$$

4. 수치예제 및 고찰

본 연구에서는 압전재료층이 보 길이의 전체에 걸쳐



(a) The uniform active beam



(b) The patched active beam

Fig. 2 Two example active beams

균일하게 적층되어 있는 균일적층 능동보와 유한한 길이의 압전재료층 조각이 보에 부분적으로 적층되어 있는 부분적층 능동보에 대해 생각하였다. Fig. 2는 본 연구에서 생각하는 두 능동보의 기하학적 형상을 보여주고 있으며 모두 외팔보의 경계조건을 갖는다. 탄성체층의 탄성계수와 질량밀도는 각각 71GPa와 2700kg/m³이며, 압전체층의 탄성계수와 질량밀도는 각 64.9GPa와 7600kg/m³ 이고 압전상수(d_{31}) 값은 -175×10^{-12} m/V이다.

먼저, 능동보의 SEM모델에 대한 정확성을 검증하기 위하여 FEM으로 구한 고유진동수와 SEM으로 구한 고유진동수를 비교하였다. FEM해석에서는 균일적층 능동보와 부분적층 능동보 모두에 대하여 요소분할을 증가시켜가면서 고유진동수를 계산하였다. SEM해석에서는 균일적층 능동보의 경우 단 하나의 스펙트럴 요소를 사용하였으며 부분적층 능동보의 경우 세 개의 스펙트럴요소를 사용하였다. Table 1과 2는 두 가지 능동보 모두에 대하여 FEM으로 구한 고유진동수가 요소분할을 증가시켜감에 따라 SEM으로 구한 고유진동수에 점차 수렴해가고 있음을 보이고 있다. 따라서, SEM모델이 기존의 FEM모델에 비하여 상대적으로

Table 1 Comparison of the natural frequencies obtained by SEM and FEM: cantilevered uniform active beam (n =total number of finite elements)

Mode Number	ω_{SEM} (Hz)	ω_{FEM} (Hz)			
	$n=1$	$n=10$	$n=20$	$n=50$	$n=100$
1	30.038	30.046	30.040	30.038	30.038
2	188.217	188.584	188.308	188.232	188.221
3	526.888	529.398	527.498	526.985	526.912
4	1032.131	1041.559	1034.358	1032.482	1032.219
5	1705.415	1731.478	1711.358	1706.340	1705.645

Table 2 Comparison of the natural frequencies obtained by SEM and FEM: cantilevered patched active beam(n = total number of finite elements)

Mode Number	$\omega_{SEM}(Hz)$		$\omega_{FEM}(Hz)$		
	$n=3$	$n=10$	$n=20$	$n=50$	$n=100$
1	32.944	32.948	32.945	32.944	32.944
2	165.319	165.411	165.341	165.322	165.320
3	482.434	483.088	482.580	482.456	482.439
4	938.389	940.897	938.901	938.465	938.408
5	1604.396	1612.900	1605.952	1604.616	1604.450

극히 적은 수의 요소를 이용하면서도 보다 우수한 동특성을 제공할 수 있다.

양단이 단순지지된 능동보의 경우, 선택된 임의의 주파수 아래에 존재하는 고유진동수의 개수는 식(20)의 $J_{ss}(\omega)$ 로 주어진다. 식(20)에서 파동수 k_1 와 k_2 는 축방향 모드와 굽힘모드 각각에 대해 식(5)로부터 구할 수 있다. Fig. 3은 축방향 모드와 굽힘모드의 분산곡선과 임의의 주파수 ω 보다 작은 고유진동수의 개수를 나타내는 $J_{ss}(\omega)$ 의 값을 ω 의 변화에 따라 수평선으로 보여주고 있다. 굽힘모드에 해당하는 고유진동수가 하나씩 증가할 때마다 $J_{ss}(\omega)$ 의 값은 굽힘모드에 대한 분산곡선을 따라가면서 1씩 증가함을 알 수 있다. 그러나, 8041Hz 부근에서 $J_{ss}(\omega)$ 를 나타내는 수평선이 굽힘모드에 대한 분산곡선 위로 점프하는 현상이 발생하는데 이는 첫번째 축방향 모드의 고유진동수가 이 부근에 존재하기 때문이다.

Fig. 4와 Fig. 5는 균일적층 능동보와 부분적층 능동보 각각에 대하여 주파수 응답함수(FRF), 결합된

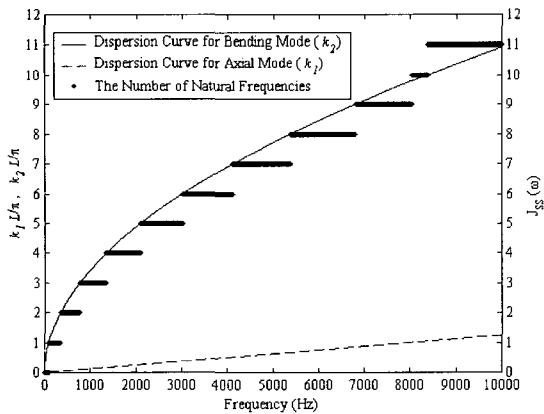


Fig. 3 Dispersion curves and the number of natural frequencies $J(\omega)$ for the simply supported uniform active beam

스펙트럴행렬의 행렬식 $\Delta(\omega) = \det[S]$ 및 고유진동수의 개수 $J(\omega)$ 를 상호 비교하여 보여주고 있다. 두 그림으로부터 우선 다음의 사실을 확인할 수 있다.

- (1) $J(\omega)$ 가 1씩 증가하는 위치가 FRF의 공진피크 위치와 정확히 일치한다.
- (2) $\Delta(\omega)$ 가 영의 값을 갖는 주파수 위치에서 공진피크가 발생한다.

Fig. 4와 Fig. 5에 나타난 것처럼 행렬식 $\Delta(\omega)$ 는 곳곳에 불연속점을 가지고 있으며 세가지 유형의 불연속속점을 Fig. 6에 나타내었다. Fig. 6에 나타난 세가지 유형의 불연속속점 가운데 Type-1과 Type-2는 불연속점 바로 근처에 $\Delta(\omega) = 0$ 를 만족하는 고유진동수가 실제로 존재하는 경우이고 Type-3의 경우는 고유진동수가 존재하지 않는 경우에 해당한다. 그러나, $\Delta(\omega) = 0$ 의

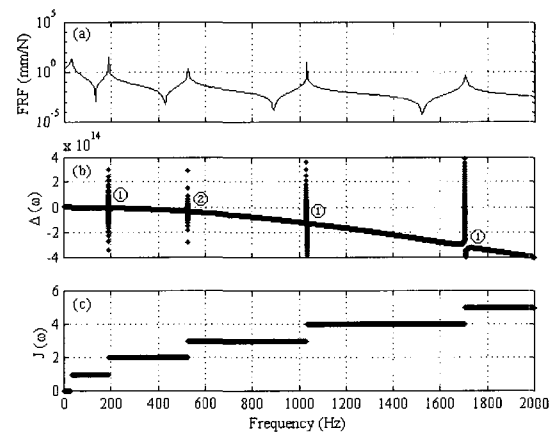


Fig. 4 Frequency response function(FRF), determinant of spectral matrix $\Delta(\omega)$ (the circled numbers in the figure denote the types of discontinuity illustrated in Fig. 6), and the number of natural frequencies $J(\omega)$ for the cantilevered uniform active beam

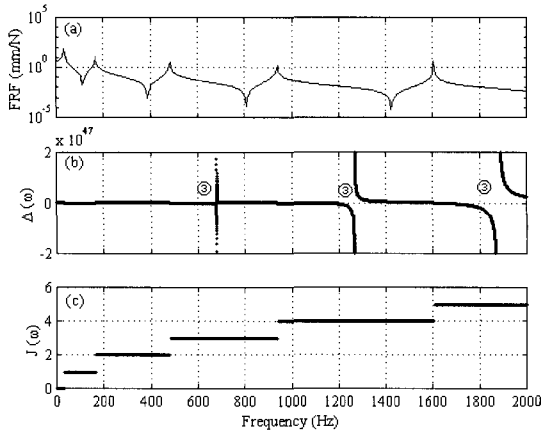


Fig. 5 Frequency response function(FRF), determinant of spectral matrix $\Delta(\omega)$ (the circled numbers in the figure denote the types of discontinuities detailed in Fig. 6), and the number of natural frequencies $J(\omega)$ for the cantilevered patched active beam

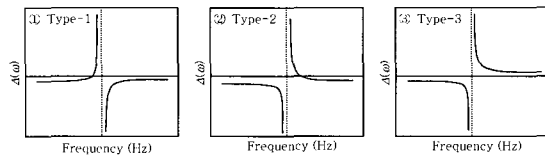


Fig. 6 Types of discontinuity for the function $\Delta(\omega)$, all indicated in Figs. 4 and 5

근을 찾기 위해 단순히 근을 찾기 위한 수치해석 알고리즘만을 사용하는 경우, 가파른 기울기의 변화를 동반하는 Type-1과 Type-2의 불연속점들은 불연속점 바로 근처에 존재하는 고유진동수를 인지하여 찾는 데 방해할 수 있으며, Type-3의 불연속점은 불연속점 위치에 마치 공진주파수가 존재하는 것으로 오판하는 결과를 제공할 수도 있다. 본 연구에서 유도한 휘트릭-윌리엄

즈 알고리즘은 이러한 문제점을 극복할 수 있게 한다.

본 연구에서 유도된 휘트릭-윌리엄즈 알고리즘을 사용하여 단락(short-circuit) 상태, 개회로(open-circuit) 상태, 그리고 피드백제어(feedback-control) 상태에서의 고유진동수를 계산하였다. 단락 상태에서의 압전재료의 탄성계수를 E_c 라고 하면, 개회로 및 피드백제어 상태에서의 압전재료의 탄성계수 C_{11}^D 는 다음으로 주어진다.¹⁵⁾

$$C_{11}^D = E_c + h_{31}^2 / \beta_{33}^S \quad (22)$$

여기서 β_{33}^S 와 h_{31} 는 각각 유전체상수(dielectric constant)와 압전상수(piezoelectric constant)이다. 식(22)의 우변의 두 번째 항이 양의 값을 갖기 때문에 C_{11}^D 는 E_c 보다 크다. Table 3과 Table 4에 나타낸 단락 상태와 개회로 상태에서의 고유진동수를 비교하면 일반적으로 단락 상태에서의 고유진동수가 개회로 상태에 비하여 작음을 알 수 있다. 이는 압전효과가 단락 상태에서는 나타나지 않기 때문이다.¹⁶⁾ Table 3과 Table 4의 마지막 두 행은 두 종류의 피드백제어 상태에서의 고유진동수를 보여주고 있다. 본 연구에서 사용된 비례미분제어 법칙은 다음과 같다.

$$V(t) = -k_p w(t) - k_d \dot{w}(t) \quad (23)$$

여기서 $w(t)$ 와 $\dot{w}(t)$ 는 각각 능동보의 진동변위와 속도, $V(t)$ 는 압전재료층에 공급되는 전압, k_p 는 비례이득(proportional gain), k_d 는 미분이득(derivative gain)을 나타낸다. 비례제어 법칙은 식(23)에서 $k_d = 0$ 인 경우에 해당한다. Table 3과 Table 4로부터 능동보의 고유진동수는 단락 상태나 개회로 상태에 비하여 피

Table 3 Comparison of the natural frequencies of the cantilevered uniform active beams with short-circuit, open-circuit, and feedback controls: k_p =proportional gain (V), k_d =derivative gain (V-s) Mode

Mode Number	Short Circuit (Hz)	Open Circuit (Hz)	Feedback-Control(Hz)	
			$k_p = 1 \times 10^6$ $k_d = 0$	$k_p = 1 \times 10^6$ $k_d = 600$
1	30.007	30.038	51.066	51.009
2	188.022	188.217	207.283	206.837
3	526.340	526.888	538.893	538.353
4	1031.058	1032.131	1040.854	1040.288
5	1703.642	1705.415	1712.260	1711.681

Table 4 Comparison of the natural frequencies of the cantilevered patched active beams with short-circuit, open-circuit, and feedback controls: k_p proportional gain (V), k_d =derivative gain (V-s)

Mode Number	Short Circuit (Hz)	Open Circuit (Hz)	Feedback-Control(Hz)	
			$k_p = 1 \times 10^6$ $k_d = 0$	$k_p = 1 \times 10^6$ $k_d = 600$
1	32.932	32.944	49.859	49.804
2	165.280	165.319	181.567	181.161
3	482.230	482.434	457.024	454.834
4	938.059	938.389	947.362	946.874
5	603.702	1604.396	1608.902	1608.668

드백제어 상태에서 보다 큰 값을 갖음을 알 수 있다. 이는 일반적으로 비례이득이 능동보의 강성을 증가적으로 증가시키는 효과가 있기 때문이다. Table 3과 Table 4의 마지막 두 행을 비교해 보면 미분이득이 마치 점성감쇠(viscous damping)처럼 작용하기 때문에 고유진동수를 낮추는 경향이 있음을 확인할 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 탄성재층과 압전재료층의 두 층으로 구성된 능동보의 SEM 모델에 대하여 휘트릭-윌리엄즈 알고리즘을 유도하였으며, 본 연구에서 사용한 SEM모델의 엄밀성을 FEM으로 구한 고유진동수와 비교함으로써 입증하였다. 균일적층 능동보와 부분적층 능동보를 예제로 하여 스펙트럴요소 행렬식이 갖는 세가지 유형의 불연속점을 고찰하였다. 또한, 외팔보형 경계조건을 갖는 능동보에 대하여 단락 상태, 개회로 상태, 그리고 피드백제어 상태에서의 고유진동수를 고찰하였으며, 압전효과가 나타나지 않는 단락 상태에서 가장 낮은 고유진동수를 갖는 반면에 예상되는 바와 같이 피드백제어 상태에서 가장 큰 고유진동수를 갖는 것을 고찰하였다.

참 고 문 헌

1. Leung, A. Y. T., *Dynamic Stiffness and Substructures*, Springer-Verlag, London, 1993
2. Wittrick, W. H. and Williams, F. W., "A General Algorithm for Computing Natural Frequencies of Elastic Structures," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*,

- Vol. 24, Part 3, 1971, pp.263~284
3. Williams, F. W. and Wittrick, W. H., "An Automatic Computational Procedure for Calculating Natural Frequencies of Skeletal Structures," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 12, 1970, pp.781~791
4. Williams, F. W. and Wittrick, W. H., "Efficient Calculation of Natural Frequencies of Certain Marine Structures," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 15, No. 10, pp.833~843
5. Pearson, D. and Wittrick, W. H., "An Exact Solution for the Vibration of Helical Springs Using a Bernoulli-Euler Model," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 28, No. 2, pp.83~96
6. Leung, A. Y. T. and Zeng, S. P., "Analytical Formulation of Dynamic Stiffness," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 177, No. 4, 1994, pp.555~564
7. Banerjee, J. R., "Dynamic Stiffness Formulation for Structural Elements: A General Approach," *Computers & Structures*, Vol. 63, No. 1, 1997, pp.101~103
8. Doyle, J. F., *Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*, Springer-Verlag, New York, 1997
9. Doyle, J. F., "A Spectrally Formulated Finite Element for Longitudinal Wave Propagation," *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 3, 1988, pp. 1~5

10. Doyle, J. F. and Farris, T. N., "A Spectrally Formulated Finite Element for Wave Propagation in 3-D Frame Structures," *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 5, 1990, pp.223~237
11. Lee, U. and Lee, J., "Spectral-Element Method for Levy-Type Plates Subject to Dynamic Loads," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, No. 2, 1999, pp.243~247
12. Lee, U., Kim, J. and Leung, A. Y. T., "Spectral Element Method in Structural Dynamics," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 32, No. 6, 2000, pp.451~465
13. Lee, U. and Kim, J., "Dynamics of Elastic-Piezoelectric Two-Layer Beams Using Spectral Element Method," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, 2000, pp.4403~4417
14. Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, New York, 1980
15. Liao, W. H., *Active-Passive Hybrid Structural Control: An Enhanced Active Constrained Layer Damping Treatment with Edge Elements*, Ph. D. Thesis, The Pennsylvania State University, PA, 1997
16. Kim, M. C., Jung, H. J., Oh, J. W., and Lee, I. W., "Solution of Eigenvalue Problems for Nonclassically Damped Systems with Multiple Frequencies," *Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, Vol. 11, No. 1, 1998, pp.205~216

부 록 A

$$\begin{aligned}
 [P] &= \begin{bmatrix} -k_1 p_{11} & 0 & -k_2 p_{12} & 0 & -k_3 p_{13} & 0 \\ 0 & -p_{21} & 0 & -p_{22} & 0 & p_{43} \\ k_1 p_{31} & 0 & k_2 p_{32} & 0 & -k_3 p_{73} & 0 \\ C_1 k_1 p_{11} & k_1 S_1 p_{11} & C_2 k_2 p_{12} & k_2 S_2 p_{12} & Ch_3 k_3 p_{53} & k_3 Sh_3 p_{53} \\ -S_1 p_{21} & C_1 p_{21} & -S_2 p_{22} & C_2 p_{22} & Sh_3 p_{63} & Ch_3 p_{63} \\ -C_1 k_1 p_{31} & -k_1 S_1 p_{31} & -C_2 k_2 p_{32} & -k_2 S_2 p_{32} & Ch_3 k_3 p_{73} & k_3 Sh_3 p_{73} \end{bmatrix} \quad (A1) \\
 [Q] &= \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \lambda_3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ \lambda_1 S_1 & -\lambda_1 C_1 & \lambda_2 S_2 & -\lambda_2 C_2 & \lambda_3 Sh_3 & \lambda_3 Ch_3 \\ C_1 & S_1 & C_2 & S_2 & Ch_3 & Sh_3 \\ -\lambda_1 S_1 & \lambda_1 C_1 & -\lambda_2 S_2 & \lambda_2 C_2 & \lambda_3 Sh_3 & \lambda_3 Ch_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 p_{1n} &= EA \lambda_n + \beta k_n, & p_{2n} &= EI_w k_n^3 - \gamma \omega^2 k_n + \lambda_n (\beta k_n^2 - \alpha \omega^2) \\
 p_{3n} &= \beta \lambda_n + EI_w k_n, & p_{4n} &= EI_w k_n^3 + \gamma \omega^2 k_n + \lambda_n (\alpha \omega^2 + \beta k_n^2) \\
 p_{5n} &= EA \lambda_n - \beta k_n, & p_{6n} &= \lambda_n (\alpha \omega^2 + \beta k_n^2) - k_n (\gamma \omega^2 + EI_w k_n^2) \\
 p_{7n} &= EI_w k_n - \beta \lambda_n
 \end{aligned} \quad (A2)$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sin(k_n L), & C_n &= \cos(k_n L) \\
 Sh_n &= \sinh(k_n L), & Ch_n &= \cosh(k_n L)
 \end{aligned} \quad (n=1,2,3)$$

부 록 B

식(17)의 함수 $f_{SS}(\omega)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$f_{SS}(\omega) = \sinh(k_3 L) c_{SS}^2 g_{SS}(\omega) h_{SS}(\omega) \quad (B1)$$

여기서

$$\begin{aligned}
 c_{SS} &= \beta^2 - EA EI_w \\
 g_{SS}(\omega) &= \frac{-\omega^8 \rho A^2 (k_1^2 - k_2^2)^2 (k_1^2 + k_3^2)^2 (k_2^2 + k_3^2)^2}{(\rho A \omega^2 + EA k_3^2)^2} \\
 h_{SS}(\omega) &= \frac{(EA \alpha - \rho A \beta)^2}{(\rho A \omega^2 - EA k_1^2)^2 (\rho A \omega^2 - EA k_2^2)^2}
 \end{aligned} \quad (B2)$$

위식에서 초월함수 $\sinh(k_3 L)$ 는 주파수 ω 가 영일 때를 제외하고는 영이 아니며, c_{ss} 는 재료특성과 기하학적 특성에 의해서만 결정되는 상수로서 또한 영이 아니다. 또한 축방향파와 굽힘파의 파동수 k_1 와 k_2 는 동일한 주파수에서 서로 다른 값을 가지므로 함수 $g_{ss}(\omega)$ 도 역시 주파수 ω 가 영일 때를 제외하고 영이 아니다. 따라서, $h_{ss}(\omega)$ 가 영일 경우에만 함수 $g_{ss}(\omega)$ 가 영이 되며, 식(B3)으로부터 함수 $h_{ss}(\omega)$ 은 다음의 조건이 만족할 때 영이 됨을 알 수 있다.

$$EAk_1^2 - \rho A \omega^2 \neq 0, \quad EAk^2 - \rho A \omega^2 \neq 0, \quad \text{and} \quad EA\alpha = \rho A \beta \quad (\text{B3})$$

식(B3)의 마지막 조건을 본문의 분산관계식 식(4)에 대입하면 파동수 k_1 이 다음과 같이 주어진다.

$$k_1^2 = \frac{\alpha}{\beta} \omega^2 \quad (\text{B4})$$

식(B4)와 식(B3)의 마지막 조건을 식(B3)의 첫번째 조건식에 대입하면 좌변이 영이 된다. 이는 함수 $f_{ss}(\omega)$ 가 주파수 ω 가 영일 때를 제외한 임의의 주파수에서 영이 되기 위한 첫번째 조건을 위반한다. 이는 곧 함수 $f_{ss}(\omega)$ 가 주파수가 영일 때를 제외하고는 영이 될 수 없음을 반증한다.