

# 가중 라게르 다항식과 전장적분식을 이용한 도체의 과도 산란 해석

## Analysis of Transient Scattering from Conducting Objects using Weighted Laguerre Polynomials and Electric Field Integral Equation

정 백 호 · 정 용 식\*

Baek-Ho Jong · Young-Seek Chung\*

### 요 약

본 논문에서는 도체로부터의 안정된 전자기 산란 응답을 계산하는 새로운 해법을 제안한다. 이 방법은 기존의 MOT (marching-on in time) 기법을 이용하지 않고, 가중 라게르 (Laguerre) 다항식으로 유기전류의 과도 응답을 표현하여 시간 영역의 적분방정식을 푼다. 이 시간 영역의 기저함수를 사용함으로써 적분식의 미분항을 해석적으로 처리하여 과도 응답을 구할 수 있다. 또한 적용되는 이 기저함수는 시간이 진행함에 따라 영으로 수렴하는 특성 때문에, 유기전류의 과도응답도 후기 진동을 가지지 않고 영으로 수렴한다. 제안되는 방법의 타당성을 보이기 위하여 시간 영역 전장 적분방정식의 해를 MOT 및 해석해와 주파수 영역으로부터 구한 해의 이산 푸리에 역변환 (inverse discrete Fourier transform, IDFT)과도 비교한다.

### Abstract

In this paper, we present a stable solution of the transient electromagnetic scattering from the conducting objects. This method does not utilize the conventional marching-on in time (MOT) solution. Instead we solve the time domain integral equation by expressing the transient behavior of the induced current in terms of weighted Laguerre polynomials. By using this basis functions for the temporal variation, the time derivative in the integral equation can be handled analytically. Since these temporal basis functions converge to zero as time progresses, the transient response of the induced current does not have a late time oscillation. To show the validity of the proposed method, we solve a time domain electric field integral equation and compare the results of MOT, Mie solution, and the inverse discrete Fourier transform (IDFT) of the solution obtained in the frequency domain.

Key words : Laguerre, Transient, Scattering, Electric Field, Integral Equation

### I. 서 론

입의 형태의 3 차원 구조물에 대한 전자파 산란 해석 문제에서 삼각형 표면 조각 모델링을 이용한 적분방정식이 널리 사용된다<sup>[1]</sup>. 특히 과도 산란 응

답을 계산하기 위하여, 시간영역 전장 적분방정식에 관한 연구에 많은 관심이 집중되었다<sup>[2]</sup>. 전장 적분방정식의 경우 자기 벡터 전위의 미분항이 있으며, 이를 처리하기 위하여 적분식 전체를 시간에 대하여 미분한 다음, 2차 유한차분으로 근사하여 일정한 시

「본 연구는 MA전자 지원으로 수행되었음.」

호서대학교 전기정보통신공학부(Department of Information and Communication Engineering, Hoseo University)

\*시라큐스대학교 전기 및 컴퓨터공학과(Department of Electrical Engineering and Computer Science, Syracuse University)

· 논문 번호: 20020625-073

· 수정완료일자: 2002년 8월 29일

간 간격( $\Delta t$ )으로 계산을 반복하는 방법(MOT)으로 해를 구하였다<sup>[3]</sup>. 이 경우 계산 진행 과정의 시간 간격  $c\Delta t$  ( $c$ 는 전파속도)는 삼각형 조각간의 최소 중심거리 ( $R_{\min}$ )보다 작아야 되는 (explicit solution) 제약을 가진다. 그리고 그 계산 결과는 시간이 증가하면 진동을 하여 불안정하였다. 이 단점을 극복하기 위하여 진동하는 과도응답의 평균을 취함으로써 그 불안정성을 제거하였다<sup>[4]</sup>. 그러나 이 방법은 안정성을 일부 개선시키더라도 오히려 해의 정확성을 감소시켰다. 그 후 다른 방법으로서 자기 벡터 전위의 미분항에 후방 유한차분을 이용하는 방법이 제시되었으며, 시간 간격 또한 삼각형 간의 최소 중심거리보다 큰 경우(implicit solution)에도 계산이 가능하도록 하였다<sup>[5],[6]</sup>. 이 외에도 적분방정식을 중앙유한차분으로 근사하여 해의 안정성을 개선시켰으나, 단순한 해석 구조를 제외하면 MOT의 방법으로는 해의 진동을 근본적으로 제거할 수는 없었다<sup>[7],[8]</sup>.

본 논문에서는 삼차원 임의 형태의 도체 구조로부터 무조건 안정된 과도 응답을 구하는 새로운 해법을 제안한다. 공간영역에서는 MOT와 동일하게 도체 표면을 모델링하는 삼각형 조각의 유기 전류 표현에 적합한 RWG (Rao-Wilton-Glisson) 함수를 전개함수로 사용하며, 동일한 함수를 시험함수로 사용하는 갤러킨 방법으로 공간 내적을 취한다. 그리고 시간 영역의 전개함수로서 감쇄하는 지수함수를 라게르 함수에 곱한 가중 라게르 다항식 (weighted Laguerre polynomials)을 사용하며, 또한 이 함수를 시간 영역의 시험함수로도 사용한다. 라게르 다항식은 그 변수가 0부터 무한대까지 구간에서 정의되며, 시간이 0 이후부터 관측되는 과도 응답의 표현에 적합하다. 또한 가중 라게르 다항식은 직교성을 가지기 때문에, 시간 영역 전장 적분방정식의 미분항을 해석적으로 처리할 수 있고, 그 감쇄 특성으로 인하여 계산되는 과도 응답은 후기 진동 없이 무조건 안정된 결과를 보장한다. 계산에 사용되는 가중 라게르 다항식의 개수  $M$ 은 입사파의 주파수 대역폭과 시간 영역에서 관측되는 최종시간으로부터 결정되며, 다항식의 차수를 0부터  $M-1$ 까지 증가시키면서 행렬식을 계산한다. 다음 장에서 시간 영역 전장 적분방정식을 간략히 논한 다음, 제 III 장에서 모멘트

법을 적용하여 공간 및 시간 영역의 시험 내적 과정을 보인다. 제 IV 장에서는 제안된 방법으로 계산된 결과를 다른 방법에 의한 해들과 비교하고, 마지막 장에서 결론을 맺는다.

## II. 시간영역 적분방정식

본 장에서는 도체의 산란 문제를 풀기 위한 시간 영역 전장 적분방정식을 다루고자 한다. 해석의 대상이 되는 구조는 임의 형태의 3차원 완전 도체이다. 도체 표면을  $S$ 라 두고, 이 표면은 평면과 같은 전자파원에 조사된다고 가정한다. 모든 시간에 대해서 도체 표면의 전장 접선 성분에 대한 경계조건을 부여하면

$$[E^i(x, t) + E^s(x, t)]_{\tan} = 0, \quad x \in S \quad (1)$$

을 얻을 수 있다. 여기서  $E^i$ 는 입사 전장이며,  $E^s$ 는 유기전류  $I$ 에 의한 산란 전장이다. 이 산란장은

$$E^s(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t} A(x, t) - \nabla \phi(x, t) \quad (2)$$

이며,  $A$ 와  $\phi$ 는 각각 자기 벡터 및 전기 스칼라 전위로서 다음과 같다.

$$A(x, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{I(x', \tau)}{R} dS' \quad (3)$$

$$\phi(x, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{q(x', \tau)}{R} dS' \quad (4)$$

여기서  $\mu$ 와  $\epsilon$ 은 각각 도체 구조물이 놓인 공간의 투자율과 유전율이며,  $R = |x - x'|$ 은 장점  $x$ 과 전원점  $x'$  간의 거리이다. 그리고  $\tau = t - R/c$ 은 지연시간이며,  $c$ 는 그 공간에서 전자파의 전파속도이다. 그리고 표면전하밀도  $q$ 와 전류밀도  $I$ 는 다음의 연속방정식에 의해 관계 지워진다.

$$\nabla \cdot I(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) \quad (5)$$

식 (5)의 관계에 의하여 식 (4)에서 시간에 대한 적분이 발생한다. 계산의 편의를 위하여 전류밀도를 새로운 전원 벡터  $e$ 를 사용하여 다음과 같이 정의하고자 한다.

$$I(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} e(x, t) \quad (6)$$

또한 식 (5)와 식 (6)으로부터 전하밀도를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$q(x, t) = -\nabla \cdot \mathbf{e}(x, t) \quad (7)$$

따라서 식 (3)과 (4)의 전위는 시간에 대한 적분없이 단일화된 전위 벡터  $\mathbf{e}$ 로 표현된다.

식 (1)과 (2)를 결합하면

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(x, t) + \nabla \phi(x, t) \right]_{\tan}, \\ = [E^i(x, t)]_{\tan}, \quad x \in S \quad (8)$$

을 얻는다. 식 (8)은 식 (3)과 (4)와 더불어 미지의 전류  $\mathbf{J}(x, t)$ 를 구하기 위한 시간 영역의 전장 적분방정식이다. 기존의 해법인 MOT의 경우 식 (8)의 수치 해인 전류밀도  $\mathbf{J}$ 를 구하기 위하여 자기 벡터 전위에 대해서 유한 차분으로 근사하고, 시간을 간격  $\Delta t$ 로 등분하여 시간 단계(time step)를 증가시키면서 계산을 반복하였다<sup>[3]~[8]</sup>. 본 논문에서는 식 (6)에 정의된 전위벡터  $\mathbf{e}$ 를 미지수로 두고 응답을 구한다. 다음 장에서는 본 논문에서 제안되는 가중 라게르 함수를 시간 영역의 전개함수로 적용하는 모멘트법의 과정을 기술하고자 한다.

### III. 모멘트법의 적용

#### 3-1 공간영역 내적

임의 형태의 3차원 도체 표면을 삼각형으로 근사시키고, 이 표면에 유기되는 전류를 근사하기 위하여 사용되는 전개함수는 인접하는 두 개의 삼각형에서 정의되는 RWG 함수로서 다음과 같다<sup>[1]</sup>.

$$f_n(x) = f_n^+(x) + f_n^-(x) \quad (9-1)$$

$$f_n^\pm(x) = \begin{cases} \frac{l_n}{2A_n^\pm} \mathbf{e}_n^\pm, & x \in T_n^\pm \\ 0, & x \notin T_n^\pm \end{cases} \quad (9-2)$$

여기서  $l_n$ 은 두 삼각형이 접하는 공유변의 길이이며,  $A_n^\pm$ 는 삼각형  $T_n^\pm$ 의 면적이다.  $\mathbf{e}_n^\pm$ 는 공유변에 접하지 않은 꼭지점으로부터 정의되는 위치 벡터이다. RWG 함수의 발산은

$$\nabla \cdot f_n(x) = \nabla \cdot f_n^+(x) + \nabla \cdot f_n^-(x) \quad (10-1)$$

$$\nabla \cdot f_n^\pm(x) = \begin{cases} \pm \frac{l_n}{A_n^\pm}, & x \in T_n^\pm \\ 0, & x \notin T_n^\pm \end{cases} \quad (10-2)$$

와 같다.

산란체의 표면 전류밀도  $\mathbf{J}$ 는 식 (9)의 RWG 함수를 이용하여 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\mathbf{J}(x, t) = \sum_{n=1}^N J_n(t) f_n(x) \quad (11)$$

여기서  $J_n$ 은 전류 계수이며,  $N$ 은 도체 표면을 삼각형으로 모델링하였을 때 삼각형이 이루는 공유변의 개수이다. 식 (6)에 정의된 전위 벡터에 대해서도 RWG 함수를 이용하여 전개하면

$$\mathbf{e}(x, t) = \sum_{n=1}^N e_n(t) f_n(x) \quad (12)$$

와 같이 쓸 수 있다. 따라서 식 (6)의 관계에 의하여 식 (11)의 전류계수는 식 (12)에 사용된 계수  $e_n$ 과 다음과 같은 관계를 가진다.

$$J_n(t) = \frac{d}{dt} e_n(t) \quad (13)$$

식 (8)을 풀기 위하여 모멘트법을 적용하며, 이때 시험함수를 전개함수와 동일하게 선택하는 갤러킨 방법을 사용한다. 식 (8)에  $f_m$ 으로 시험내적을 적용하면 그 결과는 다음과 같다.

$$\langle f_m, \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(x, t) \rangle + \langle f_m, \nabla \phi(x, t) \rangle \\ = \langle f_m, E^i(x, t) \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

다음은 식 (14)의 시험 내적을 계산하는 과정을 보이고자 한다. 식 (3)에 식 (6)과 (12)를 이용하여 벡터 전위의 시험 적분을 수행하면 다음과 같다

$$\langle f_m, \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(x, t) \rangle = \sum_{n=1}^N \frac{\mu}{4\pi} \int_S f_m(x) \\ \cdot \int_S \frac{d^2}{dt^2} e_n(x') \frac{f_n(x')}{R} dS' dS \quad (15)$$

식 (15)에 (9-1)을 대입하고, 전위 삼각형  $T_n^+$  내에서 전위 계수  $e_n$ 의 변화가 작다고 가정하면 지연시간을

$$\tau = t - \frac{R}{c} \rightarrow \tau_{mn}^{\rho q} = t - \frac{R_{mn}^{\rho q}}{c} \quad (16)$$

와 같이 근사시킬 수 있다. 여기서  $R_{mn}^{pq} = |x_m^p - x_n^q|$ 이며,  $x_m^p$ 와  $x_n^q$ 는 각각 삼각형  $T_m^p$ 와  $T_n^q$ 의 중점을 나타내는 위치 벡터이다. 첨자  $p$ 와  $q$ 는 + 또는 -를 나타낸다. 그러므로 식 (16)의 근사에 의하여 식 (15)를

$$\begin{aligned} & \langle f_m, \frac{\partial}{\partial t} A(x, t) \rangle \\ &= \sum_{n=1}^N \mu \left[ a_{mn}^{++} \frac{d^2}{dt^2} e_n(\tau_{mn}^{++}) + a_{mn}^{+-} \frac{d^2}{dt^2} e_n(\tau_{mn}^{+-}) \right. \\ & \left. + a_{mn}^{-+} \frac{d^2}{dt^2} e_n(\tau_{mn}^{-+}) + a_{mn}^{--} \frac{d^2}{dt^2} e_n(\tau_{mn}^{--}) \right] \quad (17) \end{aligned}$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서

$$a_{mn}^{pq} = \frac{1}{4\pi} \int_S f_m^p(x) \cdot \int_S \frac{f_n^q(x')}{R} dS' dS \quad (18)$$

이다. 합의 기호를 이용하여 식 (17)에서 4개 항의 합을 간략히 다음과 같이 쓰고자 한다.

$$\langle f_m, \frac{\partial}{\partial t} A(x, t) \rangle = \sum_{n=1}^N \sum_{p,q} \mu a_{mn}^{pq} \frac{d^2}{dt^2} e_n(\tau_{mn}^{pq}) \quad (19)$$

다음은 식 (14)의 스칼라 전위의 시험 내적을 고려한다. 벡터 항등식  $\nabla \cdot \phi A = A \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot A$ 를 이용하고, 식 (4)에 식 (7)과 (12)를 대입한 후, 식 (16)의 근사를 취하면 내적 결과는

$$\langle f_m, \nabla \phi(x, t) \rangle = \sum_{n=1}^N \sum_{p,q} \frac{b_{mn}^{pq}}{\epsilon} e_n(\tau_{mn}^{pq}) \quad (20)$$

와 같다. 여기서

$$b_{mn}^{pq} = \frac{1}{4\pi} \int_S \nabla \cdot f_m^p(x) \int_S \frac{\nabla' \cdot f_n^q(x')}{R} dS' dS \quad (21)$$

이다. 식 (19)와 (20)을 식 (14)에 대입하면 그 결과는

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{p,q} \left[ \mu a_{mn}^{pq} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e_n(\tau_{mn}^{pq}) + \frac{b_{mn}^{pq}}{\epsilon} e_n(\tau_{mn}^{pq}) \right] = V_m(t), \\ & m = 1, 2, \dots, N \quad (22) \end{aligned}$$

와 같다. 여기서 전원의 시험 내적은

$$V_m(t) = \int_S f_m(x) \cdot E^i(x, t) dS \quad (23)$$

이다.

### 3-2 시간영역 내적

식 (22)를 풀기 위하여 전원 벡터의 계수  $e_n$ 을 표현하는데 사용되는 시간 영역 전개함수는 지수함수를 라게르 다항식에 곱하여 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_j(t) = e^{-t/2} L_j(t) \quad (24)$$

여기서  $L_j$ 는 라게르 함수이며<sup>9)</sup>, 부록에 정의되어 있다. 첨자  $j$ 는 라게르 다항식의 차수(degree)이다. 식 (24)를 사용하여 계수  $e_n$ 을 전개하면

$$e_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} e_{n,j} \phi_j(st) \quad (25)$$

와 같다. 여기서 계수  $e_{n,j}$ 는 미지 계수이며,  $s$ 는 시간 확장 파라미터이다. 식 (25)로 표현된 계수  $e_n$ 의 2차 미분은 부록의 식 (A10)으로부터

$$\frac{d^2}{dt^2} e_n(t) = s^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{4} e_{n,j} + \sum_{k=0}^{j-1} (j-k) e_{n,k} \right] \phi_j(st) \quad (26)$$

와 같이 쓸 수 있다.

식 (25)와 (26)을 식 (22)에 대입하고, 식 (25)에 사용된 전개함수를 동일하게 시험함수로 취하여  $\phi_i(st)$ 로써 0부터  $\infty$ 까지 내적을 취하면

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{p,q} \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{s^2}{4} \mu a_{mn}^{pq} + \frac{b_{mn}^{pq}}{\epsilon} \right) e_{n,j} \right. \\ & \left. + s^2 \mu a_{mn}^{pq} \sum_{k=0}^{j-1} (j-k) e_{n,k} \right] I_{ij} \left( s \frac{R_{mn}^{pq}}{c} \right) = V_{m,i} \quad (27) \end{aligned}$$

을 얻게 된다. 여기서  $i = 1, 2, \dots, \infty$ 이다. 그리고 식 (27)의  $I_{ij}$ 는

$$I_{ij} \left( s \frac{R_{mn}^{pq}}{c} \right) = \int_0^{\infty} \phi_i(st) \phi_j \left( st - s \frac{R_{mn}^{pq}}{c} \right) d(st) \quad (28)$$

으로 정의되는 적분이며, 그 적분 과정과 결과는 부록에 주어져 있다. 그리고 식 (27)에서 우변의 전원 항은

$$V_{m,i} = \int_0^{\infty} \phi_i(st) V_m(t) d(st) \quad (29)$$

이다. 부록의 식 (B5)로부터  $i < j$ 인 경우  $I_{ij} = 0$ 이므로 식 (27)에서 합의 기호 상한  $\infty$  대신에  $i$ 를 적을 수 있다. 그리고 식 (27)에서  $i > j$ 에 해당하는 계수  $e_{n,j}$ 를 포함한 모든 항을 우변으로 이항하면

$$\sum_{n=1}^N \sum_{p,q} \left( \frac{s^2}{4} \mu a_{mn}^{pq} + \frac{b_{mn}^{pq}}{\epsilon} \right) e_{n,i} I_{ii} \left( s \frac{R_{mn}^{pq}}{c} \right)$$

$$= V_{m,i} - \sum_{n=1}^N \sum_{p,q} \sum_{j=0}^{i-1} \left( \frac{s^2}{4} \mu a_{mn}^{pq} + \frac{b_{mn}^{pq}}{\epsilon} \right) e_{n,j} I_{ij} \left( s \frac{R_{mn}^{pq}}{c} \right) - \sum_{n=1}^N \sum_{p,q} \sum_{j=0}^i s^2 \mu a_{mn}^{pq} \sum_{k=0}^{i-1} (j-k) e_{n,k} I_{ij} \left( s \frac{R_{mn}^{pq}}{c} \right) \quad (30)$$

이 된다. 식 (30)을 간략히 나타내면

$$\sum_{n=1}^N a_{mn} e_{n,i} = V_{m,i} + P_{m,i}, \quad m=1, 2, \dots, N \quad (31)$$

와 같으며, 여기서

$$a_{mn} = \sum_{p,q} \left( \frac{s^2}{4} \mu a_{mn}^{pq} + \frac{b_{mn}^{pq}}{\epsilon} \right) \exp \left( -\frac{s R_{mn}^{pq}}{2c} \right) \quad (32)$$

$$P_{m,i} = - \sum_{n=1}^N \sum_{p,q} \left[ \left( \frac{s^2}{4} \mu a_{mn}^{pq} + \frac{b_{mn}^{pq}}{\epsilon} \right) \sum_{j=0}^{i-1} e_{n,j} I_{ij} \left( s \frac{R_{mn}^{pq}}{c} \right) + s^2 \mu a_{mn}^{pq} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-1} (j-k) e_{n,k} I_{ij} \left( s \frac{R_{mn}^{pq}}{c} \right) \right] \quad (33)$$

이다. 식 (32)에서 부록의 식 (B5)로부터  $I_{ii}(y) = e^{-y/2}$ 임을 이용하였다. 식 (31)을 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$[a_{mn}] [e_{n,i}] = [\gamma_{m,i}] \quad (34)$$

여기서  $\gamma_{m,i} = V_{m,i} + P_{m,i}$ 이다. 행렬  $[a_{mn}]$ 은 식 (32)를 살펴보면 알 수 있듯이 차수  $i$ 의 함수가 아니며 계산 초기에 한번의 역행렬 연산만 수행하면 된다.

식 (34)의 계산시 시간 영역 전개함수의 수는 무한개가 필요하지만, 인가하는 신호로부터 필요한 최소의 차수를 결정할 수 있다. 즉, 대역  $B$ 를 가진 신호가 인가된다고 가정하면 그 신호의 이산 푸리에 역변환시 주파수 영역 함수의 표본 개수를  $M$ 이라 하면, 표본 주파수는  $-B \leq n \wedge f \leq B$ 의 범위를 가진다. 여기서  $n$ 은  $-M/2$ 과  $M/2$  사이의 정수이다. 주파수 간격은  $\wedge f = 1/T_f$ 으로 주어지며, 여기서  $T_f$ 는 관측되는 시간의 상한이다. 따라서 표본 정수의 범위는  $-BT_f \leq n \leq BT_f$ 가 되며, 필요한 최소 표본 개수는  $M = 2BT_f + 1$ 이 된다. 그러므로 식 (34)의 계산시  $i=0, 1, 2, \dots, M-1$ 이며  $M$ 회 계산을 반복하면 된다.

### 3-3 전류밀도와 산란장

식 (34)로부터 계수  $e_{n,i}$ 가 계산되면 전류는 식 (13)으로부터 부록의 식 (A9)를 이용하여 다음과 같

이 계산된다.

$$J_n(t) = s \sum_{j=0}^{M-1} \left[ \frac{1}{2} e_{n,j} + \sum_{k=0}^{j-1} e_{n,k} \right] \psi_j(st) \quad (35)$$

또한 계수  $e_{n,i}$ 로부터 산란 전장을 직접 얻을 수 있다. 원거리 전장은

$$E^s(x, t) \approx -\frac{\partial}{\partial t} A(x, t) \quad (36)$$

와 같이 주어지며, 여기서 자기 벡터 전위인 식 (3)에 식 (6)을 대입하고 식 (12)와 (25)를 이용하면 식 (36)을

$$E^s(x, t) \approx -\frac{\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^N \sum_q \int_{T_f} \frac{d^2}{dt^2} e_n(\tau) \frac{l_n}{2A_n^q} \frac{\rho_n^q}{R} dS \quad (37)$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서  $q$ 는  $+$  또는  $-$ 이다. 원거리장을 고려할 때 식 (37)의 적분 안에 있는 분모항을  $R \approx r$ 로 가정하고, 지연시간을 나타내는  $\tau = t - R/c$ 에서  $R \approx r - \hat{r} \cdot x'$ 으로 근사시킨다. 여기서  $\hat{r} = x/r$ 이며, 장이 복사되는 방향의 단위 벡터이다. 식 (37)의 적분에서 전원 삼각형  $T_n^q$ 의 중심값으로 근사하여  $\rho_n^q \approx \rho_n^{cq}$ 와  $r' \approx r_n^{cq}$ 으로 두면, 그 결과는

$$E^s(x, t) \approx -\frac{\mu}{8\pi r} \sum_{n=1}^N l_n \sum_q \rho_n^{cq} \frac{d^2}{dt^2} e_n(\tau_n^q) \quad (38)$$

와 같으며, 여기서  $\tau_n^q = t - (r - x_n^{cq} \cdot \hat{r})/c$ 이다. 계수  $e_n$ 의 2차 미분은 식 (26)에 주어져 있으며, 합의 상한 차수는  $\infty$  대신에  $M-1$ 이 된다.

## IV. 수치 결과

본 논문에서 제시된 해석 기법은 임의 구조의 산란체에 대해서 성립하지만, 수치 결과를 보이고자 선택된 구조는 자유공간에 놓인 사각 및 원형 도체 평판과 도체구이다. 산란체에 입사되는 가우시안 펄스의 평면파는 다음과 같다.

$$E^i(x, t) = E_0 \frac{4}{\sqrt{\pi T}} e^{-x^2} \quad (39)$$

$$r = \frac{4}{T} (ct - ct_0 - x \cdot \hat{k}) \quad (40)$$

여기서  $\hat{k}$ 는 입사파의 진행방향을 나타내는 단위 파수 벡터,  $T$ 는 가우시안 펄스의 폭, 그리고  $t_0$ 는

펄스의 지연을 나타내며 그 시간에서 입사 펄스는 최대치를 가진다. 식 (29)의 적분시 시간의 상한은 40 lm로 두고 200 개의 구간으로 나누어 수치 적분 하였다. 단위 'lm'은 전자파가 자유공간에서 1초 동안 진행되는 거리 (light meter)로서 정의된다. 시간 확장 파라미터  $s=10^9$ 로 하였다. 계산된 결과는 주파수 영역에서 전장적분식을 이용하여 계산된 해의 IDFT와 비교되며, 판형 도체의 경우 참고문헌 [7]과 [8]의 방법으로 계산한 MOT의 결과와도 비교한다. 그리고 구도체의 경우 산란전장에 대한 해석해 (Mie solution)와도 비교한다. IDFT는 주파수 영역의  $0 < f \leq 500$  MHz 범위에서 128 개의 표본을 얻어 만들었다.

산란체의 첫 예는 그림 1과 같이 좌표계의  $z=0$ 에서  $xy$  평면상에 놓여진 변이 2 m인 정사각 도체 평판이다.  $x$ 와  $y$  방향으로 각각 8 및 7 등분으로 분할하여 삼각형 조각을 구성하였으며, 그 결과 112 개의 삼각형 조각과 153 개의 공유변을 갖게 된다. 이 평판에서 두 삼각형 중심간 최소 거리는  $R_{min} = 12.65\text{cm}$ 이다. 입사파의 도래 방향은 그림 1에 수직으로 표시된 화살표와 같이  $-z$  방향으로 하였으며,  $E_0 = \hat{x}$ ,  $T = 4$  lm, 그리고  $ct_0 = 6$  lm으로 두었다. 이 펄스의 주파수 대역은  $B = 250$  MHz까지이며, 최종 관측시간을  $ct_f = 40$  lm로 한다면, 시간 영역 전개함수의 수는 최소 68 개가 필요하나 해의 정확성을 위하여  $M = 80$ 으로 하였다. 그림 2는 그림 1의 평판 중심 위치에서 화살표로 표시된  $x$ 방향 전류에 대한 지연 응답을 보이고 있다. MOT를 이용한 경우  $R_{min} \leq c\Delta t$ 에 대한 해 (explicit solution)를 얻기 위

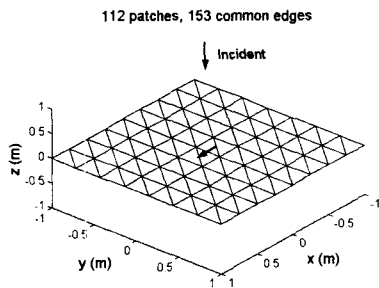


그림 1. 정사각 도체 평판의 삼각형 분할  
Fig. 1. Triangle patching of a conducting square plate.

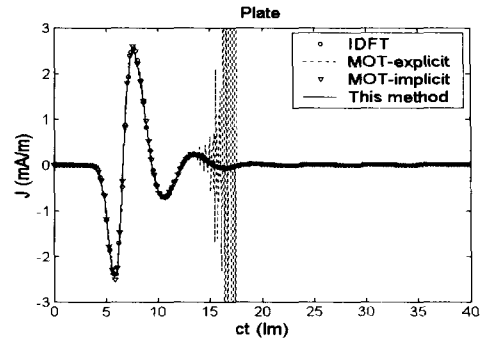


그림 2. 정사각 도체 평판의  $x$  방향 전류  
Fig. 2.  $x$ -directed current at the conducting square plate.

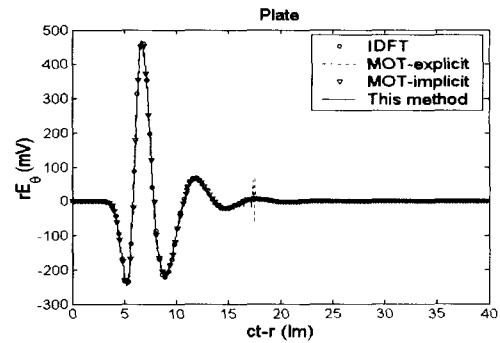


그림 3. 정사각 도체 평판의 산란 원거리 전장  
Fig. 3. Scattered far-field from the conducting square plate.

하여  $c\Delta t = R_{min}$ 으로,  $R_{min} > c\Delta t$ 인 경우의 해 (implicit solution)를 얻을 때는  $c\Delta t = 2R_{min}$ 으로 선택하였다. 그림 2에서 보는 바와 같이 본 논문에서 제안되는 방법에 의한 결과는 MOT와 IDFT의 해와 잘 일치하고 있다. MOT의 경우 시간 간격을  $c\Delta t = R_{min}$ 으로 두었을 때 해의 후기 진동이 발생함을 볼 수 있다. 그림 3은  $+z$  방향으로 산란되는  $\theta$  성분 전장을 보이고 있으며, MOT(implicit solution) 및 IDFT의 해와 잘 일치하고 있다.

산란체의 둘째 예는 그림 4에서 보는 바와 같이  $xy$  평면에 놓인 반경이 1 m의 원판 도체이다. 반경과 원주 방향으로 각각 6 및 24 등분하여 264 개의 삼각형으로 모델링하였으며, 공유변의 수는 384 개가 된다. 입사파의 조건과 계산에 사용된 파라미터들은 사각 평판의 해석시와 동일하다. 그림 5는 그

가중 라게르 다항식과 전장적분식을 이용한 도체의 과도 산란 해석

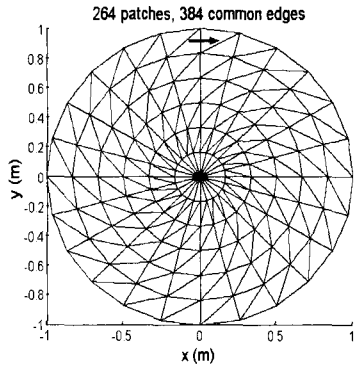


그림 4. 도체 원판의 삼각형 분할(반경 1 m)  
Fig. 4. Triangle patching of a conducting disk. (radius 1 m)

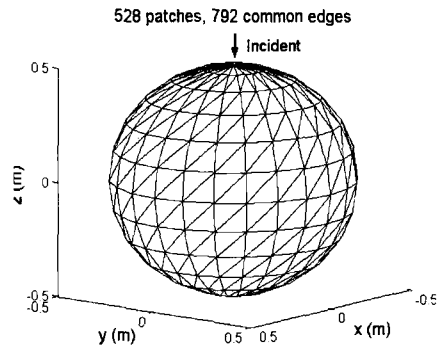


그림 7. 도체구의 삼각형 분할  
Fig. 7. Triangle patching of a conducting sphere.

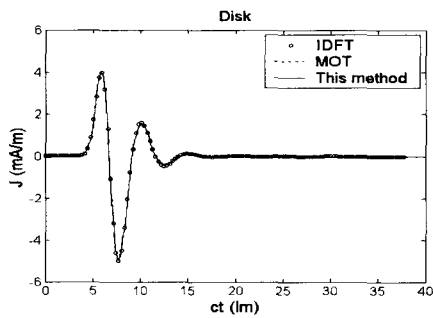


그림 5. 도체 원판의 x 방향 전류  
Fig. 5. x-directed current at the conducting disk.

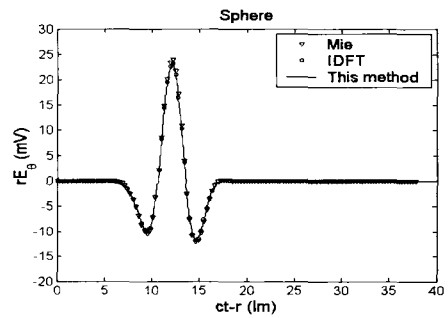


그림 8. 도체구의 산란 원거리 전장  
Fig. 8. Scattered far-field from the conducting sphere.

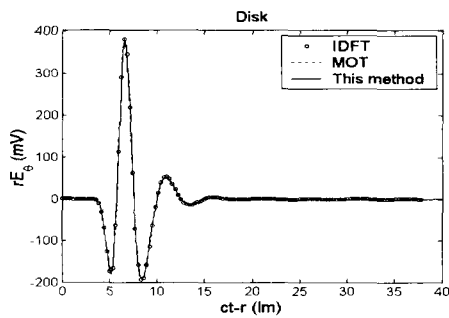


그림 6. 도체 원판의 산란 원거리 전장  
Fig. 6. Scattered far-field from the conducting disk.

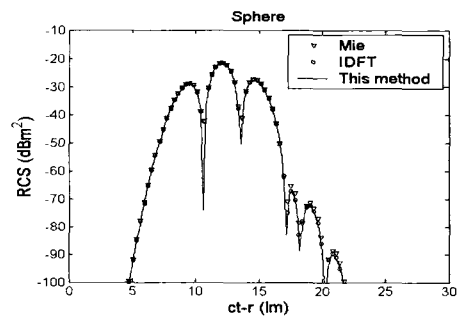


그림 9. 도체구의 레이더 단면적  
Fig. 9. Radar cross section of the conducting sphere.

림 4의 원판 가장자리에 화살표로 표시된  $x$  방향의 전류 응답이며, 그림 6은  $+z$  방향으로 산란되는  $\theta$  성분 전장이다. MOT의 계산시 시간 간격은  $c\Delta t = 2R_{\min}$  으로 두었다. 전류와 산란전장 두가

지 해 모두 사각평판의 경우와 같이 IDFT와 MOT의 결과와 잘 일치하고 있다.

마지막 예는 그림 7에 보인 반지름이 0.5 m이고, 중심이 좌표계의 원점에 있는 도체구이다. 구표면에

대하여  $\theta$ 와  $\phi$  방향을 따라서  $15^\circ$  간격으로 균등 분할하여 삼각형을 구성하였으며, 그 결과 528개의 삼각형 조각과 792 개의 공유변을 얻었다. 이 산란체의 첫 내부 공진 주파수는 262 MHz이다. 따라서 전장적분식에 의한 내부공진 문제를 피하기 위하여 입사파의 펄스 폭을  $T=8$  lm으로 하였으며, 이 신호는 125 MHz까지의 주파수 스펙트럼을 가진다. 그리고  $ct_0=12$  lm으로 두었다. 계산시  $cT_f=40$  lm로 하였으며, 정확한 해를 얻기 위하여 시간 영역 전개함수의 수  $M=80$ 로 하였다. 그림 8과 9는 구도체에 의하여  $+z$  축 방향으로 산란되는  $\theta$  성분 전장과  $\theta$  및  $\phi$  성분의 전장을 동시에 고려한 레이더 단면적 (RCS)을 각각 보이고 있다. 제안된 방법에 의한 해는 해석해와 IDFT의 결과와 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

## V. 결 론

시간 영역에서 전장 적분식을 이용한 완전 도체의 전자파 산란 해석시 무조건 안정된 과도 응답을 얻는 새로운 해법 과정을 보였다. 3차원 임의 형태 구조에 적용하기 위하여 도체 표면을 삼각형으로 모델링하여, 유기 전류 계산시 RWG 함수를 공간 전개함수로 이용하였으며, 시간 변화에 대해서는 가중 라게르 다항식을 전개함수로 도입하였다. 공간 및 시간 영역에서 갤러킨 방법을 이용하여 내적을 취하여 행렬식을 구성하였다. 사용된 가중 라게르 다항식은 감쇄하는 지수함수를 포함하고 있기 때문에 이 함수로 표현된 응답은 무조건적으로 안정되었다. 또한 제안되는 방법에 의한 해는 MOT와 달리 시간 간격의 설정과는 무관하였다. 그리고 전류 밀도의 미분으로부터 정의되는 전원벡터의 도입으로 적분방정식의 벡터 전위 미분항과 스칼라 전위의 적분항을 해석적으로 처리하여, 해의 정확성에 기여하였다. 제안된 방법으로 산출된 전류와 산란장은 MOT 및 해석해와 잘 일치하였으며, 진동없이 매우 안정되었다.

## 부 록

### A. 시간 영역 전개함수

시간 영역의 전개함수로서 식 (24)에서 사용된 라게르 다항식은 로드리게스 공식에 의하여 다음과 같이 정의된다<sup>[9]</sup>.

$$L_j(t) = \frac{e^t}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (t^j e^{-t}), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (A1)$$

$$j=0, 1, 2, \dots$$

그리고 수치 계산에 사용되는 라게르 일반항은

$$L_0(t) = 1 \quad (A2)$$

$$L_1(t) = 1 - t \quad (A3)$$

$$L_j(t) = \frac{1}{j} [(2j-1-t)L_{j-1}(t) - (j-1)L_{j-2}(t)], \quad j \geq 2 \quad (A4)$$

와 같다. 또한 라게르 함수는 다음과 같은 직교성을 가진다<sup>[9]</sup>.

$$\int_0^\infty e^{-t} L_i(t) L_j(t) dt = \delta_{ij} \quad (A5)$$

여기서  $\delta_{ij}$ 는  $i=j$ 일 때 1이며, 그 외는 0이다.

식 (25)와 같은 시간 함수를  $f(t)$ 로 간략히 나타내어 식 (24)를 전개함수로 사용하여

$$f(t) = \sum_{j=0}^\infty f_j \psi_j(t) \quad (A6)$$

와 같이 전개하고, 이를 다음과 같이 정의되는 라게르 변환을 취하면 식 (A5)의 직교성에 의하여

$$\int_0^\infty \psi_i(t) f(t) dt = f_i \quad (A7)$$

를 얻을 수 있다. 또한 식 (A6)을 미분하여 라게르 변환 과정을 적용하면

$$\int_0^\infty \psi_i(t) \frac{d}{dt} f(t) dt = \frac{1}{2} f_i + \sum_{k=0}^{i-1} f_k \quad (A8)$$

을 얻는다. 이때 과도 응답의 신호 특성을 고려하여  $f(0)=0$ 으로 두었고,  $\psi_i(\infty)=0$ 을 사용하였다. 따라서 식 (A6)과 (A7)의 관계와 동일하게 전개함수  $\psi_j$ 를 이용하여 식 (A8)로부터  $f(t)$ 의 미분을

$$\frac{d}{dt} f(t) = \sum_{j=0}^\infty \left[ \frac{1}{2} f_j + \sum_{k=0}^{j-1} f_k \right] \psi_j(t) \quad (A9)$$

와 같이 쓸 수 있다. 유사한 과정을 통하여 2차 미분에 대한 결과도 전개함수  $\psi_j$ 를 이용하여



$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{4} f_j + \sum_{k=0}^{j-1} (j-k) f_k \right] \phi_j(t) \quad (A10)$$

와 같이 쓸 수 있다.

**B. 식 (28)의 적분**

변수의 변환을 통하여 식 (28)을 간략히 다음과 같이 나타내기로 한다.

$$I_{ij}(y) = \int_0^{\infty} \phi_i(x) \phi_j(x-y) dx \quad (B1)$$

식 (B1)에서  $z = x - y$ 으로 두고, 적분을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$I_{ij}(y) = e^{-y/2} \int_{-y}^{\infty} e^{-z} L_i(z+y) L_j(z) dz \quad (B2)$$

참고문헌 [10]의 공식 (8.971)과 (8.974)를 이용하면

$$L_i(z+y) = \sum_{k=0}^i L_k(z) [L_{i-k}(y) - L_{i-k-1}(y)] \quad (B3)$$

을 얻는다. 따라서 식 (B3)을 식 (B2)에 대입하면

$$I_{ij}(y) = e^{-y/2} \sum_{k=0}^i [L_{i-k}(y) - L_{i-k-1}(y)] \times \int_0^{\infty} e^{-z} L_k(z) L_j(z) dz \quad (B4)$$

이 된다. 라게르 함수는  $z \geq 0$ 에서 정의되므로 적분의 하한을  $-y$  대신에 0으로 둘 수 있다. 따라서 식 (A5)의 직교성에 의하여 적분은  $k=j$ 일 때만 1의 값을 가지므로 식 (B4)는

$$I_{ij}(y) = \begin{cases} e^{-y/2} [L_{i-j}(y) - L_{i-j-1}(y)], & j \leq i \\ 0, & j > i \end{cases} \quad (B5)$$

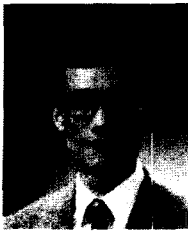
와 같이 된다.

**참 고 문 헌**

[1] S. M. Rao, D. R. Wilton and A. W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 30, no. 3, pp. 409-418, May 1982.  
 [2] S. M. Rao, *Time Domain Electromagnetics*.

Academic Press, 1999.  
 [3] S. M. Rao, D. R. Wilton, "Transient scattering by conducting surfaces of arbitrary Shape", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 39, no. 1, pp. 56-61, Jan. 1991.  
 [4] D. A. Vechinski, S. M. Rao, "A stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 40, no. 6, pp. 661-665, 1992.  
 [5] S. M. Rao, T. K. Sarkar, "An alternative version of the time-domain electric field integral equation for arbitrarily shaped conductors", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 41, no. 6, pp. 831-834, 1993.  
 [6] S. M. Rao, T. K. Sarkar, "An efficient method to evaluate the time-domain scattering from arbitrarily shaped conducting bodies", *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 17, no. 5, pp. 321-325, April 1998.  
 [7] B. H. Jung, T. K. Sarkar, "Time-domain electric-field integral equation with central finite difference", *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 31, no. 6, pp. 429-435, Dec. 2001. B. H. Jung, T. K. Sarkar, "Corrections to 'Time-domain electric-field integral equation with central finite difference'", *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 33, no. 2, pp. 148, April 2002.  
 [8] 정백호, 김채영, "안정된 전자파 과도 산란해를 얻기 위한 시간영역 전장 적분방정식 해석", *대한전자공학회 논문지*, 39(4) TC, pp. 201-208, 2002년 4월.  
 [9] A. D. Poularikas, "The Transforms and Applications Handbook", *IEEE Press*, pp. 54-60, 1996.  
 [10] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, New York: Academic Press, pp. 1037-1039, 1980.

정 백 호



1985년 2월: 경북대학교 전자공학과 (공학사)

1989년 2월: 경북대학교 대학원 전자공학과 (공학석사)

1997년 8월: 경북대학교 대학원 전자공학과 (공학박사)

1989년 2월~1994년 3월: 국방과학

연구소 연구원

1997년 9월~현재: 호서대학교 전기정보통신공학부 및 벤처전문대학원 조교수

2001년 1월~2002년 2월: 미국 Syracuse 대학교 연구교수 [주 관심분야] 전자파 수치해석, 이동통신 전파환경, 비선형 광학

정 용 식



1985년 3월~1989년 2월: 서울대학교 전기공학과 (공학사)

1989년 3월~1991년 2월: 서울대학교 전기공학과 (공학석사)

1995년 3월~2000년 8월: 서울대학교 전기공학부 (공학박사)

1991년 1월~1996년 8월: LG전자

LSL연구소 주임연구원

1998년 3월~2000년 2월: 서울대학교 전기공학부 조교

2000년 3월~2000년 9월: 서울대학교 창의연구단 (3차원

밀리미터파 연구단) 연구원

2000년 9월~2001년 6월: 서울시립대학교 BK21 사업단

박사후 연구원

2001년 9월~현재: 미국 Syracuse University (Dr. Tapan K. Sarkar) 박사후 연구원