The Korean Communications
in Statistics Vol. 9, No. 3, 2002
pp. 683-691

Optimum Stragies for Unfavorable Situation in Red & Black

Chul H. Ahn[1], Yong-U Sok[2]

Abstract

In a game called red and black, you can stake any amount s in your possession. Suppose your goal is 1 and your current fortune is f, with $0<f<1$. You win back your stake and as much more with probability p and lose your stake with probability, $q=1-p$. Ahn(2000) considered optimum strategy for this game with the value of p less than ½ where the house has the advantage over the player. The optimum strategy at any f when $p<½$ is to play boldly, which is to bet as much as you can. In this paper we perform the simulation study to show that the Bold strategy is optimum.

Keywords : Ruin problem, stochastic process, simulation

1. 서 론

Red & black 이라고 하는 게임에서, 게임자는 그가 가지고 있는 자산 가운데 s 만큼의 배팅을 하게 된다. 가령, 그의 목표가 1 이고 그의 현재 자산의 크기가 f 라고 하자 (여기서, $0<f<1$). 매번 게임 할 때마다 그가 이길 확률은 p 이고, 질 확률은 $q(=1-p)$ 이다. 이 문제는 Coolidge (1909)에 의해 처음 제시되었는데 $p<½$ 일때의 최적전략은 Dubins 와 Savage (1965)에 의해서 제안되었다. 그들은 $p<½$ 일때의 최적전략으로서 Bold 전략을 제시하였고, Bold 전략이 최적전략이라는 것을 증명할 수 있는 기본적인 아이디어를 제공하였다 (Ahn, 2000). 이 논문에서는 시뮬레이션을 통하여 Bold 전략이 최적전략이라는 것을 보이기로 한다.

2. 최적 전략

일반적인 전략은 매 게임마다 자기가 보유하고 있는 총 자산의 일부를 배팅으로 거는 것이다. 그러나, $p<½$ 일 경우 이 전략은 결국 파산에 이르게 할 것이라는 것을 쉽게 계산으로 확인 할 수 있다 (파산확률의 계산: Parzen, 1962, p233). 이에 비해 Bold 전략은 자기가 현재 배팅 가능한

1) Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Sejong University, Seoul 143-747, Korea
2) Professor, Department of Applied Mathematics, Sejong University, Seoul 143-747, Korea

최대의 자산을 거는 것이다. 목표가 1일 경우 Bold 전략의 배팅 함수, $S(f)$는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned} S(f) &= f, \qquad f \leq \tfrac{1}{2} \\ &= 1-f, \qquad f \geq \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

<정리 2.1> $p<\frac{1}{2}$ 인 경우, Bold 전략은 최적전략이다.

증명: 먼저, 함수 $Q(f)$ 는 f 가 0 과 1 사이에 있을 때 목표인 1 에 도달하게 될 확률로 정의하기로 하자. $Q(f)$ 는 연속함수, non-decreasing 함수로서 다음과 같은 값을 갖게 된다. $Q(0)=0$, $Q(1)=1$, 그리고, $Q(\frac{1}{2})=p$. 또한, $Q(\frac{1}{4})=p\cdot Q(\frac{1}{2})+q\cdot Q(0)=p^2$ $Q(\frac{3}{4})=p\cdot Q(1)+q\cdot Q(\frac{1}{2})=p+(1-p)\cdot p$.

일반적으로 $Q(f)$ 는 다음과 같이 쓰여진다.

i) $f\leq\frac{1}{2}$: 이 경우에는 f 를 배팅함.

$$Q(f)=p\cdot Q(2f)+q\cdot Q(0)=p\cdot Q(2f).$$

ii) $f\geq\frac{1}{2}$: 이 경우에는 $1-f$ 를 배팅함.

$$Q(f)=p\cdot Q(1)+q\cdot Q(2f-1)=p+q\cdot Q(2f-1).$$

$Q(f)$ 를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$Q(f)=\begin{cases} pQ(2f), & f\leq\frac{1}{2} \quad (1) \\ p+qQ(2f-1), & f\geq\frac{1}{2}. \quad (2) \end{cases}$$

이제, 첫 게임에서는 s 만큼의 배팅을, 그리고 두 번째 게임부터는 Bold 전략과 같은 방법으로 배팅을 결정하는 전략을 생각해보자. 이 전략을 사용할 경우, 목표 1 에 도달할 확률은 $p\cdot Q(f+s)+q\cdot Q(f-s)$ 로 쓰여 질 수 있다. <정리 2.1>을 증명하는 것은 곧 다음 부등식이 모든 f 와 s 의 값에 대해 성립되는 것을 보이는 것과 같다.

$$Q(f)\geq p\cdot Q(f+s)+q\cdot Q(f-s). \tag{3}$$

Dubins 와 Savage(1965)에 의하면, 부등식 (3)은 이진유리수(binary rational number)를 갖는 f 와 s 에 대해 보이는 것으로 충분하다고 하였다. 이진유리수라 함은 K 와 n이 비음의 정수인 경우, $K\cdot 2^{-n}$ 의 형태를 취하는 숫자로서 $K\cdot 2^{-n}\leq 1$ 을 만족시킨다. $K\cdot 2^{-n}$ 의 형태를 갖는 숫자는 order at most n 을 갖는다고 할 수 있다. f 와 s 가 order at most 0 or 1을 갖는 경

우에 부등식 (3)이 성립됨을 아래와 같이 간단히 보일 수 있다.

즉, $n=1$ 일때 $K\cdot 2^{-n}=\frac{K}{2}=0$ 또는 $\frac{1}{2}$ 또는 1이 된다.

만일 $f=½$ 이고 $s=½$ 이라면, 부등식 (3)의 우변은 $p\cdot Q(1)+q\cdot Q(0)=p$ 이고, 좌변은 $Q(½)=p$ 로서 부등식 (3) 이 성립된다.

다음에 order at most n 을 갖는 모든 이진유리수 f 와 s 에 대해 성립하고 있는 부등식 (3)이 order at most $(n+1)$ 을 갖는 모든 이진유리수 f 와 s 에 대해서도 성립하는지를 알아보자. 이제, 이진유리수 f 와 s 가 order at most $(n+1)$ 을 갖는다고 하고 부등식 (3)을 아래 부등식 (4)로 다시 쓰기로 한다.

$$Q(f)-p\cdot Q(f+s)-q\cdot Q(f-s)\geqq 0. \tag{4}$$

< 경우 1 > $f-s\geqq ½$

(1) 과 (2)를 이용하면, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q(f)=p+q\cdot Q(2f-1),$$
$$Q(f+s)=p+q\cdot Q(2f+2s-1),$$
$$Q(f-s)=p+q\cdot Q(2f-2s-1).$$

따라서 부등식 (4) 는 아래와 같이 표현되어 진다.

$$\begin{aligned}&Q(f)-p\cdot Q(f+s)-q\cdot Q(f-s)\\&=p+q\cdot Q(2f-1)-p\cdot[p+q\cdot Q(2f+2s-1)]-q\cdot[p+q\cdot Q(2f-2s-1)]\\&=q\cdot[Q(2f-1)-p\cdot Q(2f-1+2s)-q\cdot Q(2f-1-2s)]\\&\geqq 0\end{aligned}$$

마지막 부등식은 이진유리수 $2f-1, 2f-1+2s$, 그리고 $2f-1-2s$ 가 order at most n 을 가지므로 성립하게 되는 것임을 알 수 있다.

< 경우 2 > $f-s\leqq ½<f$

(1) 과 (2)를 이용하면, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q(f)=p+q\cdot Q(2f-1),$$
$$Q(f+s)=p+q\cdot Q(2f+2s-1),$$
$$Q(f-s)=p\cdot Q(2f-2s).$$

이제, $f\leqq ¾$이 됨을 쉽게 알 수 있다. 만일 그렇지 않다면, $f>¾$ 이 될 것이다. $f-s\leq ½$ 이므로 결국 $s>¼$ 이 되는데 이것은 $f+s>1$ 라는 결과를 가져다 주므로 모순에 봉착하게 되어

$f \leq 3/4$ 이 됨을 알 수 있다. 결과적으로 $2f-1 < 1/2$ 이므로 $Q(2f-1) = p \cdot Q(4f-2)$가 만족되며, 또한 $2f-1/2 > 1/2$ 이므로 $Q(2f-1/2) = p + q \cdot Q(4f-2)$가 성립된다.

따라서, $Q(f) - p \cdot Q(f+s) - q \cdot Q(f-s)$

$$
\begin{aligned}
&= p + q \cdot Q(2f-1) - p \cdot [p + q \cdot Q(2f+2s-1)] - q \cdot p \cdot Q(2f-2s) \\
&= p + q \cdot p \cdot Q(4f-2) - p^2 - p \cdot q \cdot Q(2f+2s-1) - q \cdot p \cdot Q(2f-2s) \\
&= p + p \cdot [Q(2f-1/2) - p] - p^2 - p \cdot q \cdot Q(2f+2s-1) - q \cdot p \cdot Q(2f-2s) \\
&= p[Q(2f-1/2) - q \cdot Q(2f-2s) + 1 - 2p - q \cdot Q((2f+2s-1)].
\end{aligned}
$$

또한, 다음 부등식이 성립되는 것을 볼 수 있는데

$$1 - 2p - q \cdot Q(2f+2s-1) \geq -p \cdot Q(2f+2s-1),$$

이는 $p < 1/2$ 과 $Q(2f+2s-1) \leq 1$ 을 이용하여 부등식 $(1-2p)[1-Q(2f+2s-1)] \geq 0$ 이 성립되는 것을 보면 쉽게 이해될 수 있다. 이를 종합하여 주어진 함수식을 정리하여 보면,

$$
\begin{aligned}
&Q(f) - p \cdot Q(f+s) - q \cdot Q(f-s) \\
&= p \cdot [Q(2f-1/2) - q \cdot Q(2f-2s) + 1 - 2p - q \cdot Q(2f+2s-1)] \\
&\geq p \cdot [Q(2f-1/2) - q \cdot Q(2f-2s) - p \cdot Q(2f+2s-1)] \\
&= p \cdot [Q(2f-1/2) - q \cdot Q(2f-1/2-(2s-1/2)) - p \cdot Q(2f-1/2+2s-1/2)] \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

마지막 부등호는 $2f-1/2$, $2f-2s$, 와 $2f+2s-1$ 이 order at most n 을 가지므로 성립되며 결국 <정리 2.1> 의 증명이 완성된다. ($f+s \leq 1/2$) 와 ($f \leq 1/2 < f+s$)의 경우의 증명은 첫 번째와 두 번째의 경우와 유사하므로 생략하기로 한다.

3. 시뮬레이션

이 절에서는 Bold전략이 SBold전략(첫 게임에서는 s만큼의 배팅을, 그리고 두번째 게임부터는 Bold전략과 같은 방법으로 배팅을 결정하는 전략)을 포함한 대안전략에 대하여 최적전략(Optimum Strategy)이 됨을 보인 정리2.1에 관하여 시뮬레이션 결과자료를 경험적자료(Empirical Data)로 활용하여 그 타당성을 입증해 보이고자 한다. 본 시뮬레이션에서는 FORTRAN 77 언어를 사용하였으며 시뮬레이션에서 사용된 난수(Random Number)생성을 위해서는 내장되어 있는 써브프로그램인 SRAND(TIME())를 Call한 후 RAND함수를 이용하여 생성하였다. 시뮬레이션 흐름의 개요를 살펴보면 목표(Goal)의 값이 0 또는 1을 가질 때 게임이 끝나는 것으로 설정하였으며 현재자산(Fortune)을 f, 승률(Win Probability)을 p, 부분비율을 r, f의 일부분 bet을 s라 하고 시뮬레이션을 위한 환경은 다음과 같이 설정하였다.

f = 0.6,
p = 0.49, 0.47, 0.45, 0.43, 0.41,
s = f * r (r = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6).

한 처리조합(Treatment Combination)으로 (p=0.49, r=0.2)인 경우를 택하여 30회의 Run(Run당 1000회의 반복게임에서 목표치인 1에 도달한 회수의 누계)을 실시하여 다음과 같은 표 3.1의 시뮬레이션 결과를 얻었다.

< 표 3.1 > 처리조합 (p=0.49, r=0.2)에서의 시뮬레이션 결과

Bold Strategy (f = 0.6, 30Runs, n=1000)						SBold Strategy (s= f*0.2, 30Runs, n=1000)					
585	591	598	567	580	614	582	605	608	598	559	590
590	590	625	601	624	590	592	579	579	587	578	599
580	607	581	579	582	585	581	573	581	624	577	580
587	594	589	590	575	593	579	599	604	597	586	627
595	590	589	594	569	576	597	570	593	596	550	603
mean(Bold) = 590.3 var(Bold) = 13.7						mean(SBold) = 589.1 var(SBold) = 16.7					

본 시뮬레이션 연구에서는 $p<½$을 만족하는 p인자 5수준(p=.49, .47, .45, .43, .41)과 r인자 5수준(r=.2, .3, .4, .5, .6)과의 25개 처리조합을 택하였으며 각 처리조합에서 Bold전략과 SBold전략을 비교하기 위하여 30회의 Run(한 특정 처리조합에서의 시뮬레이션 결과인 표 3.1.참조)을 실시하여 각 전략의 표본평균인 mean(Bold), mean(SBold)와 표본분산인 var(Bold), var(SBold)를 구하여 25개 처리조합에서의 시뮬레이션 결과자료를 종합정리하여 표 3.2.를 얻었다. 표 3.2의 시뮬레이션 결과자료를 한 Replication 실험이라 하자. 이와 동일한 방법으로 4회의 Replication 실험을 추가 실시하여 각각의 시뮬레이션 결과자료를 얻었으나 추가 4회에 대한 결과자료는 부록 A(2-5회째 Replication실험 결과자료)에 수록하였다.

Bold전략과 SBold전략을 비교 분석하기 위하여 표 3.2의 시뮬레이션 결과 통계자료를 분석한 결과는 다음과 같다.

1) 첫번째 Replication실험 결과자료인 표 3.2를 살펴보면 Bold전략의 표본평균이 SBold전략의 표본평균 보다 작게 나타난 경우는 25개 처리조합 가운데 단 1회의 처리조합(p=0.49 , r=0.6)에서만 나타났으며(*표) Bold와 SBold전략을 쌍별로 p-5수준에 걸쳐 전체평균을 비교해 보면 Bold 전략이 우위에 있음을 보여주고 있다.(표 3.2.의 Average열 참조)

2) Bold전략과 SBold전략의 모평균차에 관한 Paired Comparison t-검정(SAS 6.12사용)을 위하여 Bold와 SBold변수에 표 3.2의 Paired Data를 입력하고 분석변수 DIFF=Bold-SBold를 계산후 *PROC MEANS*를 써서 검정한 결과 mean(DIFF)=11.896이었으며 t-통계량은 T=6.7466으로써 유의확률 즉 p{t>|T|}=0.0001로 계산되었다. 이는 두 전략간에 유의차가 매우 있음을 보여주고 있으

며, 이 또한 Bold 전략이 SBold 전략보다 우수한 것을 보여주는 결과라고 하겠다.

3) 표 3.2와 부록 A등 5회의 Replication 실험에서 mean(Bold)<mean(SBold)인 경우의 출현 회수(*표)는 각각 1, 0, 1, 2, 1 회로 출현회수의 5회 평균이 1이 되므로 25개 처리조합에서의 출현비율은 0.04라고 할 수 있으며 이는 100개의 게임을 할 경우 4번의 게임에서만 Bold 전략이 SBold 전략보다 뒤떨어지며 나머지 96번은 모두 Bold 전략이 SBold 전략보다 우수한 것을 보여주는 결과라고 하겠다.

< 표 3.2 > 시뮬레이션결과자료

f = 0.6 ; 처리조합 (p, r)에서 두 전략을 사용한 30회 Run의 표본평균(표본분산).						
Strategy	p = .49	p =.47	p =.45	p =.43	p =.41	Average
Bold	590.3 (13.7)	561.9 (16.3)	533.2 (11.4)	500.9 (13.8)	478.7 (12.7)	533.00 (13.58)
SBold (r=0.2)	589.1 (16.7)	556.6 (14.2)	530.8 (15.7)	497.1 (16.7)	467.5 (13.4)	528.22 (15.34)
Bold	588.4 (16.6)	560.9 (15.3)	536.5 (13.3)	508.0 (14.4)	473.2 (13.4)	533.40 (14.60)
SBold (r=0.3)	588.3 (13.2)	554.4 (13.1)	522.4 (14.0)	481.4 (14.8)	449.9 (17.3)	519.28 (14.48)
Bold	585.8 (11.1)	555.6 (15.9)	533.1 (16.1)	502.3 (12.7)	476.8 (19.0)	530.72 (14.96)
SBold (r=0.4)	579.8 (13.8)	549.8 (17.7)	516.0 (10.9)	482.7 (15.4)	449.7 (16.6)	515.60 (14.76)
Bold	588.5 (13.8)	561.0 (17.5)	533.4 (19.2)	506.8 (13.3)	477.6 (15.0)	533.46 (14.88)
SBold (r=0.5)	585.3 (16.6)	551.3 (12.9)	520.0 (14.1)	485.4 (16.2)	453.2 (14.5)	519.04 (14.86)
Bold	* 584.7 (14.4)	558.8 (19.3)	536.4 (17.4)	508.5 (16.9)	482.7 (18.3)	533.22 (17.26)
SBold (r=0.6)	586.7 (13.4)	552.3 (12.4)	522.2 (15.3)	488.7 (16.7)	466.0 (22.0)	523.18 (15.96)

4. 결 론

이 논문에서는 게임자가 불리한 경우, 즉 $p<½$ 일 때 시뮬레이션을 통하여 Bold 전략이 최적 전략이라는 것을 보였다. 이번 연구의 시뮬레이션에서는 게임자가 0.6 의 초기자산을 가지고 시작

하는 것으로 하였으나 이를 좀더 낮은 숫자로 하여 목표에 도달할 때까지의 시간을 비교해 보는 것도 흥미 있을 것이며 게임자가 유리한 경우, 즉 $p > ½$ 일 때 최적전략에 관한 시뮬레이션 연구 또한 바람직하다.

Reference

[1] Ahn, Chul H. (2000). Optimum Strategies in Red and Black, The Korean Communications in Statistics, Vol 7, No 2. 2000, 475-480.
[2] Coolidge, J. L. (1908 - 1909). The gambler's ruin, Annals of Mathematics 10, 181 -192.
[3] Dubins and Savage (1965). How to gamble if you must, Mcgraw-Hill, New York.
[4] Karlin, S. and Taylor, H. (1975). A first course in stochastic processes, The 2nd Ed., Academic Press.
[5] Loeve, M. (1977). Probability Theory Ⅰ. Springer-Verlag, New York.
[6] Parzen, E. (1962). Stochastic processes, Holden-Day.

[2002년 6월 접수, 2002년 10월 채택]

부록 A : 2-5회째 Replication실험 결과자료

< 2회 > f = 0.6 ; 처리조합 (p, r)에서 두 전략을 사용한 30회 Run의 표본평균(표본분산).						
Strategy	p = .49	p =.47	p =.45	p =.43	p =.41	Average
Bold	587.8 (14.1)	563.0 (15.7)	530.2 (15.0)	507.3 (14.8)	477.2 (14.8)	533.1 (14.88)
SBold (r=0.2)	584.7 (12.0)	559.7 (17.1)	529.3 (14.7)	496.8 (16.2)	466.7 (11.8)	527.44 (14.36)
Bold	589.3 (17.6)	561.1 (17.6)	536.0 (16.0)	503.8 (19.1)	479.0 (14.9)	533.84 (17.04)
SBold (r=0.3)	586.6 (16.5)	553.2 (15.3)	522.1 (17.3)	485.7 (15.5)	453 (18.4)	520.12 (16.6)
Bold	589.8 (16.0)	562.8 (14.9)	529.5 (15.4)	507.2 (15.7)	478.8 (17.8)	533.62 (15.96)
SBold (r=0.4)	576.0 (19.3)	552.7 (12.4)	520.2 (14.5)	482.1 (14.6)	446.7 (16.1)	515.54 (15.38)
Bold	588.6 (15.2)	559.3 (13.0)	533.5 (16.2)	507.9 (18.4)	477.2 (14.9)	533.3 (15.54)
SBold (r=0.5)	586.1 (16.2)	548.3 (18.5)	518.8 (15.5)	485.5 (17.6)	453.2 (14.3)	518.38 (16.42)
Bold	587.2 (16.5)	558.8 (11.4)	530.1 (15.0)	505.4 (19.1)	478.6 (17.1)	532.02 (15.82)
SBold (r=0.6)	587.0 (18.2)	552.8 (16.2)	522.2 (15.2)	498.9 (15.9)	461.6 (15.2)	524.5 (16.14)

< 3회 > f = 0.6 ; 처리조합 (p, r)에서 두 전략을 사용한 30회 Run의 표본평균(표본분산).						
Strategy	p = .49	p =.47	p =.45	p =.43	p =.41	Average
Bold	* 585.4 (16.8)	558.9 (14.3)	537.0 (13.1)	508.1 (13.9)	480.0 (13.1)	533.88 (14.24)
SBold (r=0.2)	588.6 (18.1)	552.9 (13.8)	527.4 (16.3)	499.1 (13.7)	460.0 (16.7)	525.6 (15.72)
Bold	583.6 (12.8)	560.8 (16.4)	534.7 (14.3)	504.6 (17.4)	481.3 (17.8)	533 (15.74)
SBold (r=0.3)	583.4 (13.6)	553.9 (13.4)	520.2 (11.7)	491.8 (13.7)	458.4 (12.5)	521.54 (12.98)
Bold	590.5 (17.9)	554.7 (16.1)	534.9 (14.5)	503.8 (15.9)	479.2 (10.8)	532.62 (15.04)
SBold (r=0.4)	584.2 (14.0)	554.5 (16.1)	518.2 (14.4)	485.7 (13.4)	449.9 (18.5)	518.5 (15.28)
Bold	589.3 (17.5)	561.4 (16.3)	532.4 (16.9)	506.8 (15.9)	480.0 (13.7)	533.98 (16.06)
SBold (r=0.5)	582.1 (18.7)	552.5 (16.4)	518.5 (19.2)	486.5 (16.7)	449.1 (14.0)	517.74 (17)
Bold	591.7 (16.3)	560.2 (13.7)	529.2 (16.3)	503.1 (19.6)	479.1 (17.9)	532.66 (16.76)
SBold (r=0.6)	588.9 (16.3)	555.0 (18.7)	526.0 (11.8)	500.1 (13.1)	464.6 (17.7)	526.92 (15.52)

< 4회 > f = 0.6 ; 처리조합 (p, r)에서 두 전략을 사용한 30회 Run의 표본평균(표본분산).

Strategy	p = .49	p =.47	p =.45	p =.43	p =.41	Average
Bold	* 587.6 (17.2)	561.2 (16.3)	534.9 (17.0)	503.4 (15.4)	477.4 (14.3)	532.9 (16.04)
SBold (r=0.2)	589.1 (17.3)	554.1 (17.1)	529.1 (15.6)	497.3 (15.2)	469.1 (16.9)	527.74 (16.42)
Bold	587.3 (16.2)	561.2 (16.2)	531.2 (18.5)	502.2 (17.3)	481.4 (14.9)	532.66 (16.62)
SBold (r=0.3)	586.6 (16.0)	553.8 (18.4)	519.4 (16.2)	493.6 (16.8)	452.4 (11.6)	521.16 (15.8)
Bold	587.8 (16.2)	561.7 (15.3)	533.2 (13.0)	503.2 (15.5)	476.1 (18.2)	532.4 (15.64)
SBold (r=0.4)	583.5 (18.9)	548.6 (16.7)	516.7 (14.1)	485.2 (10.6)	444.8 (18.3)	515.76 (15.72)
Bold	587.0 (16.4)	557.9 (11.1)	532.3 (13.1)	506.0 (20.2)	477.7 (15.5)	532.18 (15.26)
SBold (r=0.5)	584.6 (14.0)	551.2 (14.7)	513.7 (19.3)	484.8 (16.7)	446.6 (14.4)	516.18 (15.82)
Bold	585.7 (15.6)	* 556.9 (12.2)	537.6 (13.5)	501.4 (18.3)	481.6 (16.8)	532.64 (15.28)
SBold (r=0.6)	579.9 (14.2)	557.3 (12.2)	525.9 (16.2)	490.7 (17.5)	465.0 (15.2)	523.76 (15.06)

< 5회 > f = 0.6 ; 처리조합 (p, r)에서 두 전략을 사용한 30회 Run의 표본평균(표본분산).

Strategy	p = .49	p =.47	p =.45	p =.43	p =.41	Average
Bold	588.4 (14.7)	561.1 (11.9)	531.8 (15.9)	503.0 (14.7)	478.5 (14.1)	532.56 (14.26)
SBold (r=0.2)	585.1 (12.1)	559.8 (14.2)	526.1 (18.9)	498.1 (14.6)	468.4 (15.2)	527.5 (15)
Bold	* 585.4 (13.6)	557.2 (15.0)	538.1 (16.7)	511.0 (17.1)	475.7 (13.9)	533.48 (15.26)
SBold (r=0.3)	586.8 (16.3)	548.0 (15.1)	520.4 (18.3)	486.5 (17.2)	462.1 (16.0)	520.76 (16.58)
Bold	586.4 (15.5)	564.3 (14.5)	537.8 (15.4)	505.7 (15.3)	477.6 (13.0)	534.36 (14.74)
SBold (r=0.4)	581.3 (16.0)	550.7 (17.6)	521.4 (15.0)	488.0 (12.0)	450.1 (15.6)	518.3 (15.24)
Bold	587.2 (14.9)	560.4 (15.9)	530.1 (18.1)	510.9 (18.1)	473.9 (16.1)	532.5 (16.62)
SBold (r=0.5)	587.0 (13.0)	545.2 (13.1)	516.6 (18.7)	485.2 (15.4)	453.0 (16.0)	517.4 (15.24)
Bold	584.6 (13.0)	556.0 (12.6)	535.0 (14.6)	507.8 (12.8)	479.6 (15.3)	532.6 (13.66)
SBold (r=0.6)	584.3 (14.4)	550.6 (17.5)	527.4 (17.2)	494.0 (14.2)	461.4 (13.9)	523.54 (15.44)