

확률과정 전투에서 명중시간간격 확률분포의 발견*
(Finding Interkilling Time Probability Distribution
in Stochastic Combats)

홍 윤 기**

Abstract

A technique of finding both probability density and distribution function for interkilling times is considered and demonstrated. An important result is that any arbitrary interfering time random variables fit to this study. The interfering renewal density function given a certain interfering probability density function can be applied to obtain the corresponding interkilling renewal density function which helps us to estimate the expected number of killing events in a time period. The numerical inversion of Laplace transformation makes these possible and the results appear to be excellent. In case of ammunition supply is limited, an alternative way of getting the probability density function of time to the killing is investigated. The convolution technique may give us a means of settling for this new problem.

* 본 연구는 한성대학교 연구비 지원 과제임.

** 한성대학교 산업 및 기계시스템공학부 (산업공학전공)

1. 서 론

제2차 세계대전 이후 반세기 넘는 세월동안 미국을 비롯한 주변 강대국들은 국방위게임에 대한 국가적 관심과 더불어 전문학적 투자와 노력이 지속적으로 이어져왔다. 초기에는 간단한 전투모형에서 시작되어 점차 복잡한 상황을 묘사내지 운용할 수 있는 기반을 구축하는데 많은 노력과 시간이 소요되었다. 본 연구에서는 위게임을 수행하는 데 가장 필수적이고 기초가 되는 소규모 내지 적정규모의 전투상황을 묘사하는 방법에 고려되는 요소 가운데 특히 목표물에 명중시간간격에 대한 확률분포를 다루는 것을 주요골자로 하였다.

군사전투모형에 관한 연구는 길게 수십 년의 역사를 지니고 있다. 주로 초기에는 결정적모형(Deterministic Model, DL)과 지수모형(Exponential Model, EL)에 많이 연구와 노력이 기울여졌었다. [3,4,18] 확률과정을 따르는 전투모형(Stochastic Model, SL)이 소개되면서 전투상황을 좀더 세밀하게 묘사하려는 시도가 이루어지기 시작하였다. [1,8,9]

사격시간간격의 확률적 특성을 기반으로 하는 SL모형의 구축은 해석적으로 다루기가 매우 복잡하고 일반해의 발견 및 해법절차가 거의 불가능한 것으로 알려져 왔다. SL 전투모형은 가정이나 입력 변수의 종류와 성질이 종전의 모형과 많은 차이를 보이고 있다. 따라서 출력변수로서 소요 전투시간, 생존자 수, 승리확률 등의 추정치를 해석적으로 계산해 내는 것은 매우 어렵고 복잡한 것으로 알려져 있다.

한편, 명중시간간격을 바탕으로 하는 해석적 접근은 문제자체를 명료하게 줄여주는 하지만 전투

의 규모가 커질수록 해를 도출하는데 따르는 난이도가 매우 높아서 현실적으로는 적절한 규모의 전투에만 반영이 되고 있다.[8,9,12,13] 그러나 명중시간간격의 확률분포를 발견할 수만 있으면 다른 여러 가지 측도들을 계산해 내는데 한결 효과적으로 대처할 수 있음은 큰 장점이라 하겠다. 시뮬레이션 모델로 구축을 하는 경우에도 사격시간간격이 아닌 명중시간간격으로 시간을 이동해 갈 수 있어서 수행속도와 모델의 간결성을 한층 도모할 수 있게 된다.

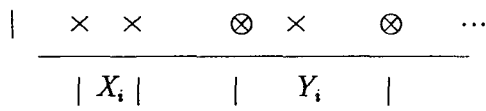
그간 여러 가지 모형으로부터 알려진 해들의 제한된 범위를 넘어서 다양한 사격시간간격분포의 경우에도 해석적인 명중간격분포를 찾아낼 수 있도록 본 연구에서 몇 가지 방법을 제안하고 실제로 검증해 보는 기회를 갖도록 한다.

비록 이들 해석해를 발견하기 위해서 수치해석이 적용되긴 하지만 전투모형 분석가들이 관심을 갖는 다양한 측도에 대한 정확한 값을 얻어낼 수 있는 유일한 방법이기도 하다. 해석해를 도출해 내는 노력에 병행하여 시뮬레이션모델을 지속적으로 개발하고 수정 및 보완하면서 해석적 방법과 비교하여 모델간 현실성과 충실도를 검토하고 점검하는 일련의 작업은 매우 중요하다.

2. 사격시간간격과 명중시간간격 모형 (Interfiring Model, IF And Interkilling Model, IK)

확률과정을 따르는 전투모형을 구축하는데 두 가지 경우를 고려할 수 있다. 특정 상황을 묘사하는데 사용되는 상태변수의 값이 사건이 발생할 때마다 갱신되는 이산사건의 집합으로 간주했을 때, 이들 이산사건은 발사간격 또는 명중간격으로부터

발생되는 사건들로 정의될 수 있다. [그림 1]은 발사사건(×)과 발사와 동시 명중사건(⊗)을 나타낸 것이다. 일반적으로 확률과정 전투모형에서는 시간간격 X_i 는 발사간격을, 그리고 Y_i 는 명중간격을 나타내는 확률변수들로 정의하고 있다. 따라서 명중확률이 절대적으로 명중시간간격에 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.



[그림 1] 발사시간간격과 명중시간간격

특정 시간동안 발사된 회수에 대한 정보가 필요한 경우에는 당연히 발사간격모형(IF)을 적용하여야 하지만, 그 외의 경우에는 명중간격모형(IK)을 사용하는 것이 항상 바람직하다. 그 이유는 해석해, 해석적 근접해, 또는 시뮬레이션 해를 막론하고 발사와 발사로 이어지는 과정을 다루기보다는 명중과 명중으로 이어지는 과정을 모형화할 때 현저하게 노력과 시간을 절약할 수 있기 때문이다. 그러나 명중간격 확률분포에 대한 정보를 얻어내는데 어려움이 따르는 것으로 알려져 있고, 현실적으로도 발사시간간격이나 명중확률에 관한 데이터만이 가용한 경우가 대부분이라고 알려져 있음을 감안하여 이러한 사실을 본 연구에서도 적용하도록 한다.[10] 따라서 명중간격에 대한 확률적 특성, 예를 들어서, 확률밀도함수 또는 누적확률분포함수 등은 주어진 발사간격 및 명중확률 자료를 이용하여 발견되어야 한다.

3. 명중시간간격 확률분포

확률과정을 따르는 전투모형의 해석해법은 오직 명중시간간격 확률변수의 밀도함수와 분포함수로서 해결할 수 있는 것으로 알려져 있다. 그러나 지금까지 알려진 IK모형에 사용된 확률변수의 종류는 불과 두 가지이며 이들은 발사시간간격이 지수분포와 Erlang-2분포의 경우이다. 이들의 밀도함수와 분포함수를 살펴보면 다음과 같이 표현된다.[9] 명중간격 확률변수의 밀도함수 및 누적분포함수를 각각 $h(t)$ 와 $H(t)$ 로 표현했을 때, 지수분포의 경우

$$h(t) = \begin{cases} \frac{p}{\mu} e^{-\frac{p}{\mu}t}, & t \geq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases},$$

그리고,

$$H(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{p}{\mu}t}, & t \geq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

이다. 한편, Erlang-2 분포의 경우는

$$h(t) = \begin{cases} \frac{p}{\mu} \frac{e^{-\frac{2}{\mu}t}}{q^{1/2}} [e^{\frac{2}{\mu}tq^{1/2}} - e^{-\frac{2}{\mu}tq^{1/2}}], & t \geq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$H^c(t) = \begin{cases} \frac{pe^{-\frac{2}{\mu}t}}{2q^{1/2}} \left[\frac{e^{\frac{2}{\mu}tq^{1/2}}}{1 - q^{1/2}} - \frac{e^{-\frac{2}{\mu}tq^{1/2}}}{1 + q^{1/2}} \right], & t \geq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

위의 두 가지 분포를 제외하고는 명중시간간격

에 대한 밀도함수 또는 분포함수를 찾아내는 연구가 부재하고 있어서 이에 대한 필요성이 절실하게 요구되어 왔다.

본 절에서는 명중시간간격 확률분포를 발견하는 방법에 대하여 설명한다. 크게 두 가지 경우로 나누어 고려하는데 우선 Laplace 변환을 사용하는 방법을, 그리고 마지막으로 Convolution(중첩) 방법을 적용하는 방법을 설명하기로 하자.

3.1 Laplace 변환을 이용한 명중시간간격 확률분포 발견

설명을 진행함에 앞서 사용되는 변수, 기호, 그리고 가정들에 대해 언급하기로 한다.

p ≡ 목표물 명중확률,

$f(t)$ ≡ 발사시간간격 확률밀도함수,

$F(t)$ ≡ 발사시간간격 누적확률분포함수,

그리고 전투에 참여하는 구성원이 사용하는 탄환은 무제한 공급된다고 가정한다.

앞에서 언급한 바와 같이 구하고자 하는 명중간격 확률변수의 밀도함수 및 누적분포함수를 각각 $h(t)$ 와 $H(t)$ 로 정의하면, 우선 누적분포함수로

$$\begin{aligned} H(t) &= P(T \leq t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(T \leq t | N=n)P(N=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) p q^{n-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 N ≡ 명중할 때까지 발사회수,

$F_n(t)$ ≡ 발사시간분포 $F(t)$ 의 n -중첩,

$q \equiv 1 - p$ 이라고 하자.

이제 $H(t)$ 를 미분하여 얻는

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) p q^{n-1} \quad (2)$$

는 명중간격의 확률밀도함수가 되고, 이때 $f_n(t) \equiv$ 발사시간간격분포 $f(t)$ 의 n -중첩이다.

식(1) 또는 식(2)의 우변을 모두 더할 수 있으면 특정 역변환 절차를 이용하여 빠르게 $H(t)$ 나 $h(t)$ 를 찾아낼 수 있을 것으로 기대된다. 식(2)의 경우 양변에 Laplace 변환을 취하여 간접적으로 구할 수 있어서 이를 정리하면 아래와 같이 정리된다.

우선 사용될 기호에 대하여 언급해 두자.

$L_f(s) \equiv f(t)$ 의 Laplace 변환,

$m_f(t) \equiv$ 발사시간간격 재생밀도함수,

$L_k(s) \equiv h(t)$ 의 Laplace 변환,

$m_k(t) \equiv$ 명중시간간격 재생밀도함수,

$H_f(s) \equiv m_f(t)$ 의 Laplace 변환,

$H_k(s) \equiv m_k(t)$ 의 Laplace 변환.

명중시간간격 확률밀도함수는 아래와 같이 첫 번째 명중, 두 번째 명중, 또는 수차례 실패를 거듭한 후 명중하는 경우 등을 고려하여 표현될 수 있다.

$$h(t) = pf(t) + pqf^{(2)}(t) + pq^2f^{(3)}(t) + \dots$$

한편, 좌우 변에 Laplace 변환을 취하여

$$\begin{aligned}
L_k(s) &= pL_f(s) + pqL_f^2(s) + pq^2L_f^3(s) + \dots \\
&= pL_f(s)[1 + qL_f(s) + q^2L_f^2(s) + \dots] \quad (3) \\
&= pL_f(s)/[1 - qL_f(s)].
\end{aligned}$$

궁극적으로 $h(t)$ 를 얻기 위해서 식(3)에 역변환을 시도할 수 있고, $H(t)$ 는

$$H(s) = \frac{1}{s}h(s)$$

관계를 이용하여 구할 수 있다.

Laplace 역변환을 취할 때 대부분의 경우 함수의 복잡성으로 인하여 수작업에 의한 해석적 접근 방법이 불가능하게 된다. 이를 해결하기 위해서 수치해석 방법을 적용하여 역변환을 모색할 수 있다. 본 연구에서는 The IMSL Library에서 찾아볼 수 있는 보조프로그램 가운데 FLINV라고 일컫는 보조프로그램을 이용하여 Laplace역변환을 실행할 수 있었다. FLINV는 사용자가 제공하는 함수의 Laplace역변환을 계산하여 $h(t)$ 를 얻게 되는데 이때 사용되는 근사식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
h(t) \cong & (e^{at}/T)[1/2H(a) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} Re(H(a+k\pi i/T))\cos(k\pi t/T) \quad (4) \\
& - IM(H(a+k\pi i/T))\sin(k\pi t/T)] \\
& - error.
\end{aligned}$$

여기서 H 는 사용자 제공 복소수함수, T 는 $t/2$ 보다 큰 수, 그리고 a 는 α 보다 큰 수이며 (이때 α =exponential order of $h(t)$), 그리고

$$error = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2naT}h(2nT + t)$$

이다. [16]

3.2 재생밀도함수와 사격회수

본 항에서 언급하는 재생의 의미는 두 가지로 나누어 생각할 수 있다. 사격이 발생하는 사건을 재생으로 간주할 수 있고, 한편으로는 목표물에 명중하는 사건을 재생으로 간주할 수도 있다. 발사시간간격 재생밀도함수(renewal density function, $m_f(t)$)를 이용하여 전투개시 후 임의의 시간 t 까지 목표물에 명중시킨 기대회수를 계산하는 문제에 대하여 논하여 보자.

일반적으로 확률과정(stochastic process)에서 사건과 사건의 시간간격(X_1, X_2, \dots)이 동일한 분포와 독립인 확률변수로서 아래와 같이 정의될 때 $\{N(t); t \geq 0\}$ 는 재생과정(renewal process)을 따른다고 한다.

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\} \quad (5)$$

이때,

$$S_0=0, S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

그러므로 $N(t)$ 는 시간 t 까지 발생한 사격사건의 수를 의미하며 이는 확률변수로 정의되어 기대값을 $M_f(t)$ 로 표현할 때, $M_f(t) = E[N(t)]$ 로 나타낸다.

임의의 시간 t 까지 발생한 사격회수에 대한 분포에 대하여 논하여 보자. 우선 다음과 같이 정의하자.

$$p_n(t) = P\{N(t) = n\},$$

$$F_n(t) = P\{S_n \leq t\}.$$

여기서 $F_n(t)$ 는 $F(\cdot)$ 의 n -중첩을 의미한다. 식(5)로부터 $\{N(t) < n\} \leftrightarrow \{S_n > t\}$ 를 알 수 있고 이는 곧 아래와 같은 관계로 정리된다.

$$\begin{aligned} p_n(t) &= P\{n \leq N(t) < n+1\} \\ &= P\{N(t) < n+1\} - P\{N(t) < n\} \\ &= P\{S_{n+1} > t\} - P\{S_n > t\} \quad (6) \\ &= 1 - F_{n+1}(t) - [1 - F_n(t)] \\ &= F_n(t) - F_{n+1}(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

따라서 $p_n(t)$ 는 절대적으로 $F_n(t)$ 와 식(6)에 의해 결정된다고 볼 수 있다.

한편, $M_f(t)$ 의 Laplace 변환을 $M_f(s)$ 이라하면

$$M_f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dM_f(t)$$

로 표현되고, 이는 다시 $F(t)$ 의 Laplace 변환 $F(s)$ 를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다 [11]

$$M_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} [F(s)]^n = \frac{F(s)}{1 - F(s)} \quad (7)$$

이를 다시 역변환 시키면

$$M_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

가됨을 알 수 있다. 양변을 t 에 대하여 미분을 하면

$$m_f(t) \cong \frac{d}{dt} M_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

로 정리된다. 따라서 시간 t 까지 발생한 사격회수의 기대값 $M_f(t)$ 는 재생함수를 적분하여 구할 수 있게 된다. 즉,

$$M_f(t) = \int_0^t m_f(t) dt.$$

한편, 같은 사실에 입각하여 명중시간간격에 관한 재생밀도함수 $m_k(t)$ 를 찾을 수 있으면 다음 관계를 이용하여 재생함수인 $M_k(t)$ 를 계산할 수 있게 된다.

$$M_k(t) = \int_0^t m_k(t) dt.$$

3.3 사격시간간격과 명중시간간격의 재생밀도함수 관계

사격시간간격의 재생밀도함수는 아래 재행관계식(renewal equation)으로부터 산출할 수 있다.

$$m_f(t) = f(t) + \int_0^t m_f(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

양변에 Laplace 변환을 취하면

$$H_f(s) = L_f(s) + H_f(s)L_f(s)$$

가 되어 마침내

$$H_f(s) = \frac{L_f(s)}{1 - L_f(s)}$$

가 되어 이를 역변환 시켜서 $m_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_f(s)\}$ 를 얻게 된다.

유사한 방법으로 명중시간간격에 대한 재생밀도함수를 유도할 수 있다. 이를 설명하면

$$m_k(t) = f(k) + \int_0^t m_k(t-\tau)h(\tau) d\tau.$$

양변에 Laplace 변환을 취하여 정리하면

$$H_k(s) = L_k(s) + H_k(s)L_k(s)$$

이 되고 이는 곧,

$$H_k(s) = \frac{L_k(s)}{1 - L_k(s)} \quad (8)$$

이 된다.

이제 $m_k(t) = \mathcal{L}^{-1}H_k(s)$ 의 관계로부터 아래 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} H_k(s) &= \frac{L_k(s)}{1 - L_k(s)} = \frac{\frac{pL_f(s)}{1 - qL_f(s)}}{1 - \frac{pL_f(s)}{1 - qL_f(s)}} \\ &= \frac{pL_f(s)}{1 - L_f(s)(p + q)} = \frac{pL_f(s)}{1 - L_f(s)}. \end{aligned}$$

이는 곧 $H_k(s) = pH_f(s)$ 가 되어 $m_k(t) = pm_f(t)$ 의 관계가 성립함을 알 수 있다.

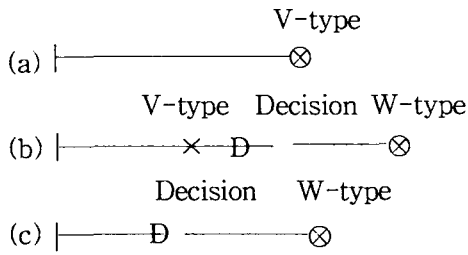
3.4 중첩(Convolution)방법의 적용

본 항에서는 다양한 무기형태와 각 무기에 일정량의 제한된 탄환공급이 가정된 경우에 목표물에 명중시킬 때까지 소요되는 시간에 대한 확률분포를 유도해 내는 방법에 대하여 논하여 보자. 무기의 형태에 따라서 사격 순서가 다를 수 있어서 목표물의 특성이나 위치를 감안하여 사용해야 할 무기의 순서 또는 탄환의 종류가 다른 경우에는 앞항에서 설명한 Laplace역변환을 이용한 방법이 적용될 수 없다.

본 항에서는 명중시간 확률분포를 찾아내기 위한 기초적이고 간단한 경우를 들어 이에 대한 방법을 제시하는 것으로 제한하기로 한다. 보다 상세한 해법발견 절차는 현재 별도로 진행 중인 연구에서 다루기로 한다.

예를 들어서, 한 무기에서 발사되는 탄환의 종류가 두 가지(V-type and W-type)이고 이들이 단계별로 사용되는 경우를 고려해 보자. [그림 2]는 목표물을 명중시킬 수 있는 세 가지 경우들을 보여 주고 있다. 그림에서 (a)는 V-type으로 명중시킨 경우, (b)는 V-type이 비껴나가고 탄환의 종류를 바꾸기로 의사결정한 후(D) W-type으로 명중시킨 경우, 그리고 (c)는 V-type을 사용하지 않고 다른 탄환을 사용하기로 의사결정한 후(D) W-type으로 명중시킨 경우를 나타내고 있다.

여기서 V-type탄환의 경우 발사시간간격의 확률밀도함수와 누적분포함수를 각각 $v(t)$ 와 $V(t)$, 그리고 매 사격마다 명중확률을 $p_V(q_V = 1 - p_V)$ 이라고 하자. W-type에 대해서도 유사하게 적용하여 $w(t)$, $W(t)$, 그리고 $p_W(q_W = 1 - p_W)$ 라고 가정하자.



<그림 2> 탄환의 종류에 따른 단계별 목표물 명중 예.

한편, 탄환의 종류를 변경하는 의사결정에 필요한 시간을 확률변수(D)로 정의하고 이를 나타내는 밀도함수 및 분포함수를 각각 $d(t)$ 와 $D(t)$ 라고 하면, 전투가 개시되어 임의의 시간 t 에서 $t + dt$ 사이에 목표물에 명중시킬 확률은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Hit between } t \text{ and } t + dt) &= h(t)dt \\
 &= p_v v(t)dt + q_v p_w V * D * W(t)dt \\
 &\quad + p_w D * W(t)dt + q_v q_w \delta(t - \infty).
 \end{aligned}$$

이때 $\delta(t - \infty)$ 는 Dirac Delta 함수를 그리고 *는 중첩(convolution)을 나타내어 $V * D * W$ 는 세 확률변수의 중첩을 의미한다. 따라서 시간 $(0, t)$ 사이에 목표물을 명중시킬 확률은 $\int_0^t h(\xi)d\xi$ 로 표현된다. 이와 같이 무기의 형태, 탄

환의 종류, 그리고 이들의 개수에 따라서 목표물에 명중시킬 때까지 소요되는 시간에 대한 확률밀도함수를 유도하는 데에는 각 해당 확률변수들의 중첩으로 이어지는 정확한 계산이 이루어질 때 가능하게 된다. 중첩을 위한 계산은 수치적으로 얻어질 수 있다. 단지 계산에 소요되는 시간이 사용하는 시스템에 따라 다소 길게 걸릴 수 있다.

4. 결과 및 비교

4.1 Laplace 변환을 적용한 경우

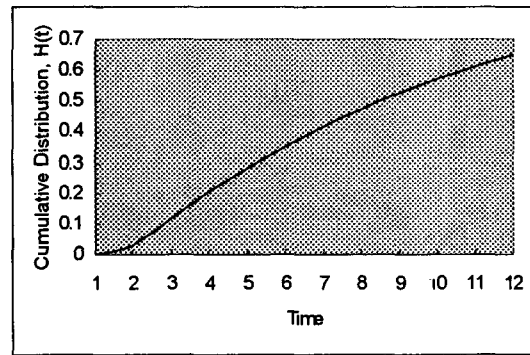
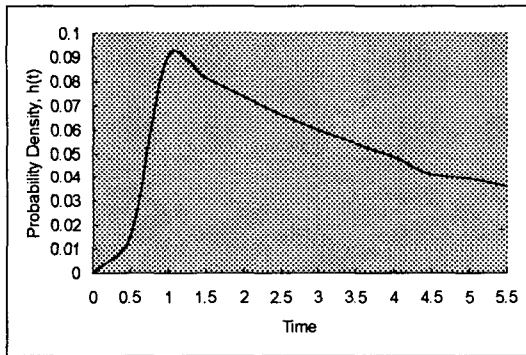
3절에서 IK모형에 사용되는 명중시간간격 확률변수의 밀도함수와 분포함수를 찾는 방법으로 Laplace 역변환 수치해석방법을 설명하였다. 먼저 Erlang-2 발사시간간격의 경우를 적용하였는데 앞서 언급한 바와 같이, Erlang-2분포의 경우는 이미 해석해가 알려져 있어서 수치해와 비교가 가능하다. 아래 [표 1]은 11개의 서로 다른 시점에서 계산된 명중시간간격 확률변수의 밀도함수와 분포함수의 해석해와 수치해, 그리고 이들의 차이를 나타낸 것이다. 수치해임에도 불구하고 해석해와 소수점 넷째자리까지 정확하게 일치하고 있음을 확인할 수 있다. 한편 이들을 그래프로 나타낸 것이 [그림 3]이다.

[표 2]와 [그림 4]는 사격시간간격(IF)이 Lognormal확률분포를 따를 때 수치해석방법을 이용하여 계산된 밀도함수와 분포함수를 나타낸 것이다.

<표 1> 명중시간간격 확률밀도 및 누적확률분포, Erlang-2 사격시간간격분포의 경우 해석해와 수치해 비교, 평균사격시간간격 $\mu=1.00$, 명중확률 $p=.10$.

$h(t)$: Interkilling Time pdf	$H(t)$: Interkilling Time cdf
--------------------------------	--------------------------------

Time t	True Value	Numerical Value	Absolute Difference	True Value	Numerical Value	Absolute Difference
0.5	0.0151	0.0151	.0000	0.0282	0.0282	.0000
1.5	0.0901	0.0901	.0000	0.1196	0.1196	.0000
2.5	0.0816	0.0816	.0000	0.2054	0.2054	.0000
3.5	0.0736	0.0736	.0000	0.2829	0.2829	.0000
4.5	0.0664	0.0664	.0000	0.3528	0.3528	.0000
5.5	0.0599	0.0599	.0000	0.4160	0.4160	.0000
6.5	0.0541	0.0541	.0000	0.4729	0.4729	.0000
7.5	0.0488	0.0488	.0000	0.5244	0.5244	.0000
8.5	0.0411	0.0411	.0000	0.5708	0.5708	.0000
9.5	0.0398	0.0398	.0000	0.6126	0.6126	.0000
10.5	0.0359	0.0359	.0000	0.6504	0.6504	.0000



<그림 3> 명중시간간격 확률밀도 및 누적확률분포, Erlang-2 사격시간간격분포의 경우
평균사격시간간격 $\mu=1.00$, 명중확률 $p=.10$.

[표 2] 명중시간간격 확률밀도 및 누적분포

Interkilling Time pdf	Interkilling Time cdf
--------------------------	--------------------------

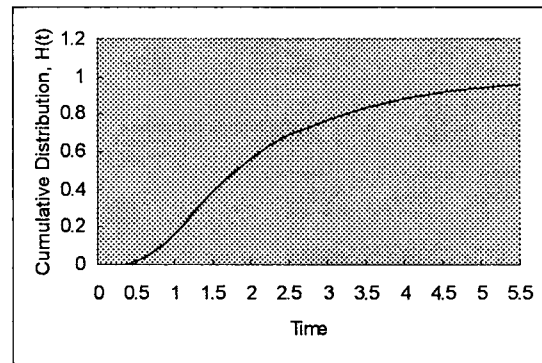
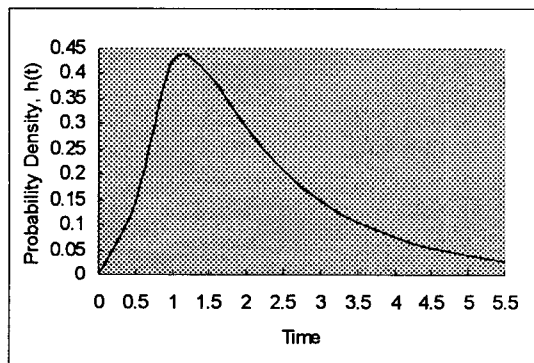
Time t	$h(t)$	$H(t)$
0.5	0.1458	0.0168
1.0	0.4255	0.1637
1.5	0.3983	0.3874
2.0	0.2946	0.5606
2.5	0.2092	0.6854
3.0	0.1485	0.7740
3.5	0.1061	0.8370
4.0	0.0761	0.8822
4.5	0.0547	0.9146
5.0	0.0395	0.9380
5.5	0.0285	0.9548

Lognormal 사격간격분포를 적용,

$$p_A = .80, \mu_A = 1.80,$$

$$p_B = .50, \mu_B = 1.00,$$

그리고 첨도(kurtosis) $\gamma = 8.0$.



[그림 4] Lognormal 사격간격분포를 적용,

$$p_A = .80, \mu_A = 1.80, p_B = .50, \mu_B = 1.00,$$

그리고 첨도(kurtosis) $\gamma = 8.0$.

[표 3]은 사격시간간격(IF)이 Lognormal확률분포를 따를 때 3 vs 2 확률전투모형(Stochastic Lanchester Model, SL)의 해석해와 10,000 반복 시행하여 얻은 시뮬레이션결과를 보여주고 있다. 해석해 $E[TD]$, $E[A(\infty)]$, 그리고 $E[B(\infty)]$ 값들이 5% 유의수준 하에서 모두 신뢰구간 내에 포함되고 있음을 확인할 수 있다. 한편, 지수분포모형(Exponential Lanchester Model, EL) 및 결정적모형(Deterministic Model, DL)과 비교한 결과도 함께 보여주고 있다. 비록 작은 규모의 전투이지만 해석해를 발견하는데 사격시간간격에 Lognormal 분포가 처음으로 적용된 예이다.

<표 3> 3 vs 2 전투 결과, SL, EL, 그리고 DL 사이에 출력변수 비교, SL모형에 Lognormal 사격간격분포를 적용, $p_A = .80, \mu_A = 1.80, p_B = .50, \mu_B = 1.00$, 그리고 첨도(kurtosis) $\gamma = 8.0$, Simulation Trials = 10,000.
 (*: DL모형은 표준편차를 제공하지 않으므로 실질적으로 의미가 없음)

Figures of Merit	SL Model		EL Model	DL Model	Difference % EL	Difference % DL
	Analytic	Simulation				
E[To]	2.1155	2.1145	1.5915	1.8697	24.77	11.619
σ [To]	1.0697	0.9830	1.1877	0	-11.031	*100
E[A(∞)]	1.6024	1.5811	1.7978	2.1213	-12.194	-32.383
σ [A(∞)]	1.1908	1.1910	1.2316	0	-3.426	*100
E[B(∞)]	0.4450	0.4498	0.4193	0	5.775	100
σ [B(∞)]	0.7513	0.7503	0.7468	0	0.599	*100
P[A]	0.7138	0.7079	0.7378	1	-3.362	-40.095
P[B]	0.2862	0.2921	0.2622	0	8.386	100

4.2 재생밀도함수, $m_f(t)$, 계산 예

본 항에서는 사격시간간격의 확률분포가 지수 분포가 아닌 일반적인 임의의 분포를 따르는 경우 재생밀도함수를 발견하는 예를 설명하기로 한다. 앞서 설명한 바와 같이 일단 $m_f(t)$ 가 발견되면 명중확률 p 를 곱하여 $m_k(t)$ 를 손쉽게 구하게 된다. Laplace 역변환을 수치해석으로 행하여 얻어진 결과들을 소개하기로 한다. 먼저, 해법 절차의 이상 여부를 살펴보기 위하여 이미 알려져 있는 사격시간간격의 분포들을 이용하기로 하였다. Erlang-2 분포의 경우 이미 이들 값들이 알려져 있으므로 이를 근거로 비교한 결과가 [표 4]이다. 수치해와 해석해 사이에 차이가 없음을 확인할 수 있다.

다음 <표 5>와 <그림 5>는 사격시간간격이 Lognormal 분포를 따르는 경우의 재생밀도함수 수치해를 나타낸 것이다.

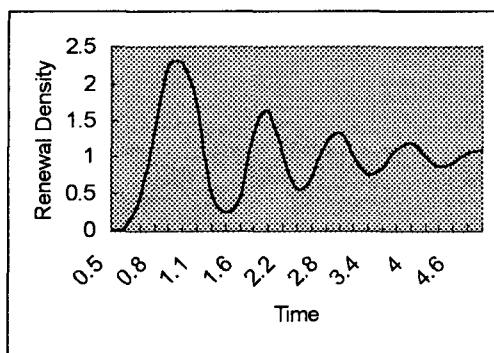
두 표와 그림에서 보는 바와 같이 재생밀도함수의 모양은 Erlang-2 분포의 경우 단조증가를 나타내고 있고, Lognormal 분포의 경우 파장을 그리며 변화하는 전형적인 모습을 보이고 있다. 한 가지 주목할 것은 두 경우 공히 시간이 커지면서 재생밀도의 크기가 평균치의 역수($\frac{1}{\mu}$)에 수렴하고 있는 것으로 미루어보아 본 연구에서 다루고 있는 Laplace 역변환의 수치해석 방법 및 절차에 전혀 문제가 없음을 확인할 수 있다.

<표 4> Erlang-2 사격간격, $\lambda=.50, \mu=4.0$

Time	$m_f(t)$		Difference
	Numerical Value	True Value	
.18	.0412	.0412	.0000
.45	.0906	.0906	.0000
.90	.1484	.1484	.0000
1.35	.1852	.1852	.0000
1.89	.2122	.2122	.0000
2.70	.2332	.2332	.0000
3.51	.2426	.2426	.0000
4.05	.2457	.2457	.0000
4.59	.2475	.2475	.0000
5.13	.2485	.2485	.0000

<표 5> Lognormal 사격간격, $\mu=1.0, \sigma=.03037$

Time	$m_f(t)$	Time	$m_f(t)$	Time	$m_f(t)$
.50	.0000	1.60	.4626	3.40	.7587
.60	.0631	1.80	1.3179	3.60	.8381
.70	.4682	2.00	1.6228	3.80	1.1014
.80	1.3973	2.20	1.0571	4.00	1.1833
.90	2.2355	2.40	.5653	4.20	1.0203
1.00	2.2977	2.60	.7053	4.40	.8670
1.10	1.7111	2.80	1.1828	4.60	.9110
1.30	.4972	3.00	1.3346	4.80	1.0559
1.40	.2497	3.20	1.0363	5.00	1.1008



<그림 5> Lognormal 사격간격 재생밀도함수, $\mu=1.0, \sigma=.03037$.

5. 결론 및 향후과제

지난 수십 년간 미국을 비롯한 강대국들은 국 방위게임에 대한 국가적 관심과 더불어 천문학적 인 투자와 노력이 지속적으로 이어져왔다. 초기에 는 간단한 전투모형에서 시작되어 점차 복잡한 상 황을 묘사내지는 운용할 수 있는 기반을 구축하는 데 많은 노력과 시간이 소요되었다.

확률과정을 따르는 전투모형은 가정이나 입력 변수의 종류와 성질이 종전의 모형과 많은 차이를 보이고 있다. 따라서 출력변수로서 소요 전투시간, 생존자 수, 승리확률 등의 추정치를 해석적으로 계 산해 내는 것은 매우 어렵고 복잡한 것으로 알려져 왔다. 해석해가 알려진 전투의 크기는 고작해야 3 대 2 전투 정도이다. 모형수립의 복잡성은 결국 문 제해결의 대표적인 방법으로 시뮬레이션기법의 적 용으로 방향 전환을 하기에 이르렀다.

본 연구는 위게임을 수행하는 데 가장 필수적 이고 기초가 되는 소규모 내지 적정규모의 전투상 황을 묘사하는 방법에 고려되는 요소 가운데 특히 목표물 명중시간간격에 대한 확률분포를 발견하는 내용을 주로 다루고 있다.

모형을 수립하는 과정에 무기로부터 발사되는 탄환의 시간간격이 확률변수로 정의되고 매 발사 시 명중확률이 주어지게 된다. 그러나 발사시간간 격이 아닌 명중시간간격의 확률적 특성을 알 수만 있으면 모형의 수립과정이나 구현, 그리고 해를 찾 아내는데 소요되는 시간과 노력을 현저하게 절약할 수 있는 장점이 있음을 많은 연구에서 지적하여 왔다.

본 연구에서는 명중시간간격의 확률분포를 구 하는 방법으로 우선 Laplace 변환을 이용하였다.

주어진 사격시간간격 확률분포를 이용하여 수치해석 해를 계산해내는 과정을 소개하고 예제를 선정하여 검증하여 보였다. 특히 사격시간간격에 Lognormal 분포를 적용하여 명중시간간격의 확률분포를 처음으로 얻을 수 있었다.

한편, 목표물에 명중시키는 사건을 고려할 때 재생밀도함수의 발견으로 하여금 일정 시간동안 명중사건의 기대회수를 구할 수 있는 방법을 연구에 포함하였다. 이 경우 에도 기존의 제한된 사격시간간격분포의 종류가 갖는 한계를 극복하여 해당 분포를 임의로 부여할 수 있도록 개선하였다.

탄환의 공급이 제한되는 경우에는 더 이상 Laplace 변환의 응용이 불가능하게 되어 별도의 해법이 필요하게 된다. 본 연구에서는 서로 다른 종류의 탄환이 사용되어 사격 순서가 정해지는 상황을 고려하였고, 이들 탄환의 사격시간간격 확률변수에 중첩방법을 이용하는 방안을 제시하였다. 보다 현실적인 상황의 묘사와 상세한 해법절차는 현재 진행하고 있는 연구내용에 포함되어 있음을 밝혀둔다.

참 고 문 헌

- [1] Ancker, C. J., Jr., One-on-One Stochastic Duels, Military Application section, Operations Research Society of America, 1982.
- [2] Ancker, C. J., Jr., "Stochastic Duels with Limited Ammunition Supply," Operations Research, Vol. 12, No.1, pp. 38-50, 1964.
- [3] Ancker, C. J., Jr. and A. V. Gafarian, "The Validity of Assumptions Underlying Current Uses of Lanchester Attrition Rates," Naval Research Quarterly, Vol.42, pp.311-336, 1995.
- [4] Ancker, C. J., Jr. and A. V. Gafarian, "An Axiom Set(Law) for a Theory of Combat," Working Paper, University of Southern California, Los Angeles, California, 1992.
- [5] Cox, D. R., Renewal Theory, From Methuen's Monographs on Applied Probability and Statistics, Science Paperbacks, Methuen & Co. LTD, London, 1962.
- [6] Cox, D.R. and Isham, V., Point Process, Monographs on Applied Probabilities and Stochastic, Chapman and Hall, London, 1980.
- [7] Crump, K.S., "Numerical Inversion of Laplace Transforms using a Fourier Series Approximation", JACM, Vol. 23, No. 1, 1976.
- [8] Gafarian, A. V. and C. J. Ancker, Jr., "The Two-on-One Stochastic Duel," Naval Research Logistics Quarterly, Vol.31, pp. 309-324, 1984.
- [9] Gafarian, A. V. and K. R. Manion, "Some Two-on-Two Homogeneous Stochastic Combats," Naval Research Logistics, Vol. 36, pp. 721-764, 1989.
- [10] Gafarian, A. V. and D. G. Harvey, Jr., Y. G. Hong, and M. D Kronauer, "Some Many-on-Many Homogeneous Stochastic Combat Simulation Models," Technical Report, University of Southern California, Los Angeles, California, 1988.
- [11] Heyman, D.P. and M. J. Sobel, Stochastic Models in Operations

- Research, Vol. I, McGraw-Hill, 1982.
- [12] Hong, Y.G., "Two-on-One Heterogeneous Duel," Hansung University, Vol. 16, pp. 441-449, 1992.
- [13] Hong, Y. G., "Some Extensions of Stochastic Square Law Combat Models and Approximations," Ph.D. Dissertation, University of Southern California, 1989.
- [14] Hong, Y. G., "Stochastic Combats with Limited Battle Termination Time," Journal of the Military Operations Research Society of Korea, Vol. 19, No.2, pp 102-115, 1993.
- [15] Hong, Y. G., "Analysis of Fire Allocation Strategies in Stochastic Combat", Journal of the Military Operations Research Society of Korea, Vol 20, No.2, pp 39-61, 1994.
- [16] "International Mathematical and Statistical Library", IMSL Inc., Houston, Texas.
- [17] Parkhideh, S. and Gafarian, A.V., "General Solution to Many-on-Many Heterogeneous Stochastic Combat," Naval Research Logistics, Vol. 43, pp. 937-953, 1996.
- [18] Taylor, J.G., Lanchester Models of Warfare, Vol. I,II Military Application Section, Operations Research Society of America, 1983.