

강소성 유한요소법을 이용한 링 압연 공정에서의 폭 퍼짐량 및 접촉영역 예측

고영수* · 윤환진** · 김낙수†

(2002년 6월 3일 접수, 2002년 10월 16일 심사완료)

Prediction of Spread and Contact Region in Ring Rolling Process Using Rigid-Plastic Finite Element Method

Youngsoo Ko, Hwanjin Yoon and Naksoo Kim

Key Words : Ring Rolling(링 압연), Rigid-Plastic Finite Element Method(강소성 유한요소법), Spread(퍼짐량), Contact Region(접촉영역), Pressure Distribution(압력분포)

Abstract

The ring rolling process involves three-dimensional non-steady material flow and continuous change of radius and thickness of the ring workpiece. In this study, the deformation analysis and geometric updating algorithm of the ring rolling process were verified by using the three-dimensional rigid-plastic finite element method. Manufacturing processes for plain ring and T-shaped ring were investigated by comparing experiments with simulation results, especially in side spread, load-stroke and pressure distribution, showing a good agreement. It was concluded that the simulation method would be a useful tool for the design of a ring rolling process.

1. 서론

링 압연 공정은 도우넛 형태의 원 소재 링이 구동롤과 압력롤 사이에 위치한 상태에서 구동롤이 회전하고 압력롤이 진입함에 따라 링의 두께가 감소하며 동시에 직경은 증가됨으로써 최종적으로 이음매 없는 링을 제작할 수 있는 성형가공 공정이다.

링 압연에 대한 연구는 이론 및 실험에 있어서 체계적으로 연구되어 왔다. Johnson⁽¹⁾은 기본적 해석과 실험에 의해 최초로 구동롤 토크 및 압력롤 압연 하중을 구하였으며, Hawkyard 등⁽²⁾은 형상 단면을 가진 링 성형에 대해 분석하고 압력편을 이용하여 성형 영역에서의 압력분포를 구하였으며, T형 단면 형상에 대한 링 압연 실험이 Mamalis⁽³⁾

에 의해 행해진 바 있다.

링 압연에 대한 해석적 연구에서 Yang 등⁽⁴⁾은 상계해법(upper bound method)을 적용하여 구동롤의 토크를 계산한 바 있으나 상계해법은 복잡한 형상에 대하여 한계성을 가지고 있다.

유한요소법에 의한 연구는 2차원에서 3차원으로 강소성 유한요소 공식의 확장이 단순화된 8절점 요소를 시작으로 몇몇 연구자들에 의해 해석이 진행되었고, 결과로 완벽한 3차원 유한요소법이 Kobayashi, Park, 그리고 Huisman⁽⁵⁾ 등에 의해 발표된 바 있다. 그리고 Kim⁽⁶⁾ 등의 연구에 의해 강소성 유한요소법에 근거하여 비정상상태의 3차원 링 압연 해석이 이루어진 바 있다.

링 압연시에 변형은 일반 압연과는 달리 소재롤의 점진적인 진입에 따라 계속적으로 단면형상이 변해가기 때문에 비정상상태로 해석을 하는 것이 적절하다. 이러한 복잡한 변형의 특징을 가지고 있으므로 다양한 방법에 의해 변형해석 알고리즘이 검증되어야 할 필요성이 있다.

본 연구에서는 링 압연 공정에서의 단면형상의

* 서강대학교 대학원 기계공학과

** 신도리코 기술연구소 연구 1부

† 책임저자, 회원, 서강대학교 기계공학과

E-mail : nskim@ccs.sogang.ac.kr

TEL : (02)705-8635 FAX : (02)712-0799

변형해석을 확인하기 위해서 평 링과 T 형 링 압연에서의 폭 퍼짐량을 기존 참고문헌에 제시된 실험결과⁽⁷⁾와 비교하고, 링 원주방향으로의 확장 알고리즘의 확인을 위해서 물과 소재 접촉부위에서의 변형에 따른 하중과 접촉 압력 분포를 실험결과⁽⁸⁾와 비교하여 평 링과 T 형 링 압연에 대한 해석의 신뢰도를 검증하였다.

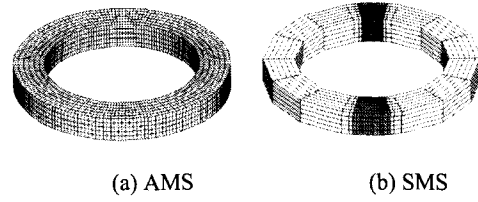


Fig. 1 Mesh systems

2. 링 압연의 강소성 유한요소 모델링

2.1 지배방정식(Governing equations)

강소성 이론에 근거한 준정적(quasi-static)이고, 미소변형(infinitesimal deformation)이라고 제한하고, 동시에 내부효과, 물체력, 그리고 변형에 의한 기하학적 변화를 무시한다면 속도장과 응력장은 다음과 같은 조건을 만족한다.

(i) 평형방정식(equilibrium equations)

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

(ii) 경계조건(boundary conditions)

$$\left. \begin{aligned} v_i &= \bar{v}_i \quad \text{on } S_U \\ \sigma_{ij}n_j &= \bar{t}_i \quad \text{on } S_F \end{aligned} \right\} S_U + S_F = S_{Total} \quad (2)$$

(iii) 적합방정식(compatibility equation)

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (3)$$

(iv) 유동법칙(constitutive equations)

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (4)$$

단, $\dot{\bar{\epsilon}}^p = (\frac{2}{3} \dot{\epsilon}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij})^{\frac{1}{2}}$ 및 $\bar{\sigma} = (\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij})^{\frac{1}{2}}$

(v) 비압축성(incompressibility)

$$\dot{\epsilon}_{kk} = 0 \quad (5)$$

(vi) 유동응력(flow stress)

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}, T) \quad (6)$$

2.2 수치적 모델링

링 압연 공정을 수치적으로 해석하는데 있어서 몇 가지 가정이 쓰이고 있다.

(i) 두가지 메쉬 시스템(Mesh system)의 사용

3 차원 강소성 유한요소법을 사용함에 있어서, 방대한 계산량을 줄이기 위해 Fig. 1 과 같이 SMS 와 AMS 라는 2 가지 메쉬 시스템을 사용한다.

SMS 의 각 절점은 링의 원주방향으로 공간에 부착되어 있고, 그 단면의 형상은 SMS(special mesh system)에서 강소성 유한요소법에 의해

얻어진 속도장에 근거하여 변형된다. 주어진 시간 증분 Δt 동안에 속도장은 일정하다고 가정하며, AMS(actual mesh system)는 이 속도장에 따라서 변형 및 회전하게 된다.

(ii) 초기 접촉면적 부여

링 압연 공정이 최초로 시작될 때에는 물과 소재 간의 일정한 접촉면적을 주기 위하여, 가압률에 초기 행정을 적당량 주어 수치해석을 시작한다.

(iii) 링 반경의 증가에 따른 링 중심의 이동

공정이 진행됨에 따라서 전반적으로 링의 두께는 지속적으로 감소하고 링의 반경은 증가한다. SMS 의 한정적인 조밀도로 인해 유한요소법으로 구하여진 속도장과 이에 근거하여 변형하는 링의 형상에는 오차가 따르므로, 매 시간 증분마다 소재의 부피를 재계산하여 링의 회전 중심축의 위치를 정확하게 보정하여 나간다.

3. 해석조건 및 결과

3.1 폭 퍼짐량(Side spread) 예측

3.1.1 해석조건

이송속도(feedrate) 및 물의 형상에 따라 4 가지로 구분하여 해석하였다. 평 링 압연(plain ring rolling)의 경우에는 이송속도에 따른 유동의 양상을 비교하기 위하여 0.1 in./rev, 0.007 in./rev 로 구분하여 폭 퍼짐량을 비교하였다. 또한, T 형 링 압연은 가압률 홈 폭의 비(groove factor) 크기에 따른 유동의 특성을 확인하기 위해서 0.25, 0.5 로 구분하여 해석하였다. 여기서 가압률 홈 폭의 비는 최초 소재의 높이 w 와 가압률 홈 폭 b 의 비로써 나타낸다.

평링 및 T 형 링에 대한 링 및 롤 시스템은 Fig 2 에 나타내었고, 초기 소재 형상은 Fig. 3 에 제시된 바와 같으며 Case 1-4 에 대하여 동일하게 적용하였다. 초기 소재형상 및 소재 변형형상이 높이 방향으로 대칭이므로, 대칭형상에 대한 1/2 의 해석으로 해석시간을 감소시켰다. 또한 소재와 롤 사이의 마찰인자(friction factor)는 0.5 로 가정하였다.

Case 1-4 에 대한 소재 물성치는 Tellurium lead 의 유동응력식(flow stress equation)을 사용하였으며 식 (7)에 제시하였다. 이 재료는 상온에서 변형률속도에 민감하며 열간에서의 강의 유동과 유사하므로 실험에 자주 사용된다. 세부 해석조건은 Table 1 에 제시하였다.

$$\bar{\sigma} = 2.24(1.0 + 16.5\dot{\epsilon})^{0.0512} (0.01 + \bar{\epsilon})^{0.221} \text{ [ksi]} \quad (7)$$

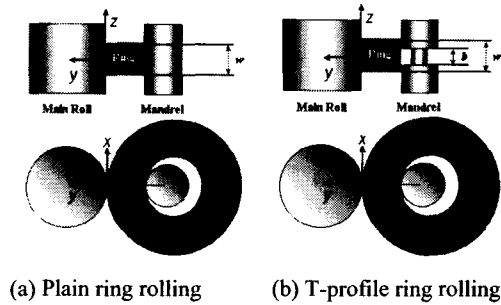


Fig. 2 Ring rolling systems

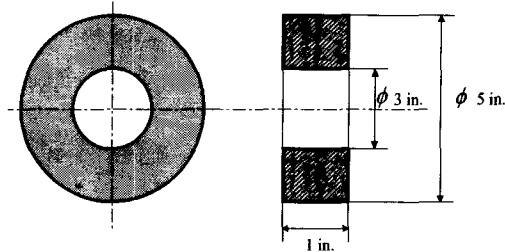


Fig. 3 Profile and dimension of the initial ring

Table 1 Analytic condition of each case

Case	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
		Plain ring		T-profile ring
Feedrate [in./rev.]	0.1	0.007	0.1	
Groove factor [b0/w0]	0.0		0.25	0.5
Main roll radius [in.]	4.5			
Pressure roll radius [in.]	1.375			
Angular velocity [rpm]	31			

3.1.2 평링 압연(Case 1, 2)의 결과

소재의 최종 단면형상은 Fig. 4 와 같으며 그림에서 a-a, c-c, b-b 각각의 부분에 대하여 폭 퍼짐량을 나타내고 이를 실험값과 비교하였다.

Case 1 의 경우에는 Fig. 5 의 a-a 부분, 즉 소재와 구동롤(main roll) 접촉부위의 폭 퍼짐량과, b-b 부분 즉, 소재와 가압롤(pressure roll) 접촉부분의 폭 퍼짐량이 압하량의 증가에 따라 실험결과와 유사한 값을 나타내고 있으며, c-c 부분의 폭 퍼짐량은 음의 값으로 폭이 오히려 감소하는 실제 현상과 동일한 모습을 보여준다.

Case 2 는 Case 1 과 유사한 변형양상을 보이지만 Fig. 6 에서 폭 퍼짐 양상의 차이를 관찰 할 수 있다. 그래프에 제시된 바와 같이 Fig. 6 의 a-a 부분과 b-b 부분의 폭 퍼짐량이 압하량의 증가에 따라 실험결과와 유사한 경향을 보이며 Fig. 6 의 c-c 부분은 Case 1 의 Fig. 5 의 값과 다르게 양의 값을 나타내고 있음을 확인할 수 있다. 동일한 각속도에 대한 이송속도(feedrate)가 큰 Case 1 의 경우에는 소재의 유동이 폭 퍼짐보다는 원주방향 즉, 링의 반경을 증가시키는 양상을 나타내므로 소재의 원주방향유동으로 인하여 링 표면의 중앙부위(c-c)에서 음의 값을 가지게 되며, 이러한 변형양상은 실험결과와 일치한다. 이것은 가압롤의 이송속도에 따른 소재의 원주방향의 유동을 적절하게 묘사해줌을 의미한다.

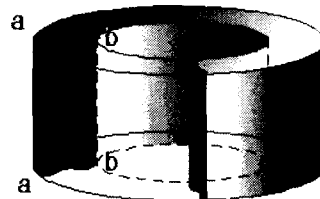


Fig. 4 Sectional view of a flat ring

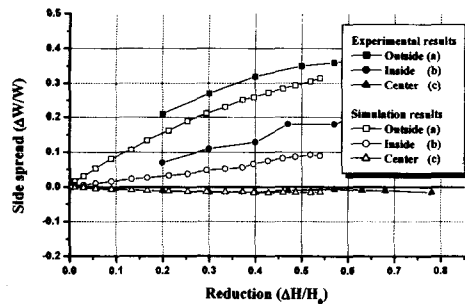


Fig. 5 The comparison of variation of side spread with reduction in the Case 1

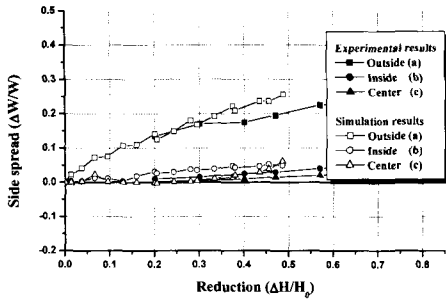


Fig. 6 The comparison of variation of side spread with reduction in the Case 2

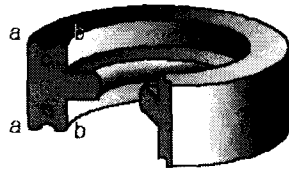


Fig. 7 Sectional view of a T-shape ring

3.1.3 T형상 링 압연(Case 3, 4) 결과

Case 3, 4에 대한 소재의 최종 단면 형상은 Fig. 7에 제시되어 있으며 a-a, b-b, c-c 각각의 부분에 대하여 폭 퍼짐량을 나타내고 이를 실험값과 비교하였다.

Case 3의 경우에는 Groove factor 0.25에 대한 해석결과이며 폭 퍼짐량에 대한 실험값과의 비교는 Fig. 8에 제시하였는데, 그림의 a-a, b-b 부위에 대해서는 실험치와 유사한 양상을 보였으나 실험결과보다 해석결과가 큰 값을 보였다. c-c 부위는 실험결과보다 작게 얻어졌다. 이러한 오차는 실제 공정에서의 마찰조건의 차이로 인하여 발생할 수도 있으며, 소재의 폭 퍼짐량을 측정하는 부위의 값을 정확하게 비교하기 어렵기 때문에 발생했다고 판단된다.

Case 4의 경우에는 groove factor 0.5에 대한 해석결과이며, 실험값과의 폭 퍼짐량 비교는 Fig. 9에 제시하였는데 그림의 a-a, b-b, c-c 부위에 대하여는 실험값과 거의 일치된 값과 경향을 보였다.

3.2 압력분포 및 접촉길이 예측

링 압연에서의 원주방향의 압력분포(Pressure distribution)는 Fig. 10에서 보는 바와 같이 일반 평 압연(flat rolling)과는 달리 롤의 입구측에서 압력이 급격히 높아지고 출구측 방향으로 상대적으로 완만하게 감소한다. 또한, 롤이 점진적으로 이동되기 때문에 롤간의 중양(roll centerline)이후에도 압력분포가 지속되는 특징을 가지고 있다.

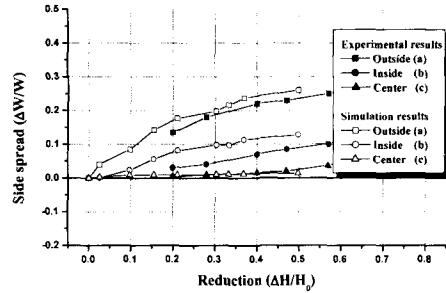


Fig. 8 The comparison of variation of side spread with reduction in the Case 3

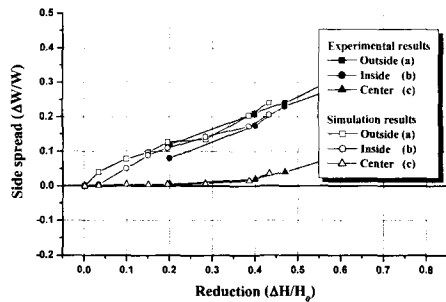


Fig. 9 The comparison of variation of side spread with reduction in the Case 4

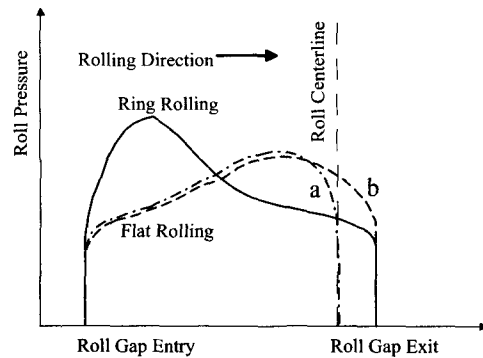


Fig. 10 Relationship between pressure distribution of flat rolling and ring rolling (a: fixed roll, b: compressing roll)

롤 간에서의 접촉길이는 주로 두께 방향 압축량에 의존하게 되며, 링 압연의 진행에 따라 접촉길이(contact length)가 변화하는데 일반적으로 링 반경의 확장에 따라서 구동롤과 링의 접촉부위에서는 접촉길이가 늘어나게 되고, 가압롤과 링의 접촉부위에서는 접촉길이가 점차 감소하게 된다. 실험결과에 의하면 구동롤에서는 접촉부위가 확장됨이 뚜렷이 관찰되나, 가압롤에서는 상대적으로 작은 변화만을 볼 수 있다.

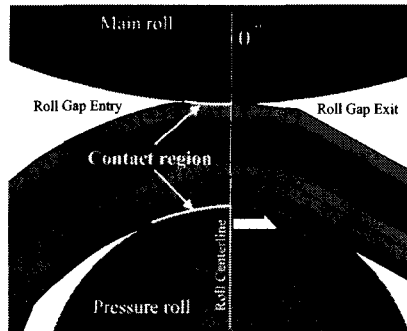


Fig. 11 Contact region in ring rolling between roll and workpiece

실제 링 압연 공정에서 소재의 단면이 롤 간에 압축되고 동시에 압축된 소재의 양만큼 원주방향 확장이 이루어진다는 특징을 고려하여 프로그램에서는 변형해석 이후에 링의 반경을 팽창시켜주는 방법을 사용하고 있으며 이 때 최초의 체적을 유지하도록 한다. 이러한 과정중에 롤과 소재의 접촉영역에 변화가 생기게 되므로 접촉영역을 적절하게 유지할 수 있도록 링을 이동(translate)시키는 알고리즘을 사용하고 있다.

실제 링 압연 공정에서의 접촉영역 특징을 가정에 의해 업데이트 되는 유한요소 해석결과와 비교함으로써, 단면에서의 변형양상 뿐 아니라 링 반경방향으로의 팽창 변형양상의 신뢰도를 간접적으로 검증할 수 있다. 여기에서는 접촉부위의 변화가 비교적 심한 구동롤의 경우를 비교의 대상으로 삼았다.

3.2.1 해석조건

롤 및 소재의 형상, 각속도(angular velocity)는 3.1 절의 Case 1 과 동일하며, 이송속도(feedrate)는 0.019 in./rev.이다. 링 소재는 Al-alloy HE30 으로 원추롤(axial roll)이 부가되지 않은 상태의 평 링 압연(plain ring rolling)이며, 냉간 링 압연(cold ring rolling)으로 가정하여 해석하였고, 다음과 같은 유동응력식을 제안하였다.

$$\bar{\sigma} = 10.05\epsilon^{0.173} \text{ [tonf/in.}^2\text{]} \quad (8)$$

3.2.2 압연 하중(roll force) 예측

본 장에서의 해석 조건은 4 장의 평 링 압연조건과 동일하며 실험값과 하중을 비교한 결과는 Fig. 12 에 제시하였으며, 소재 두께가 40%정도 압축될 때까지 해석결과와 실험값의 경향이 비교적 일치함을 확인할 수 있다. 그러나 대략 45% 이상이 되면 실험값에 비해 하중이 상대적으로 급격하

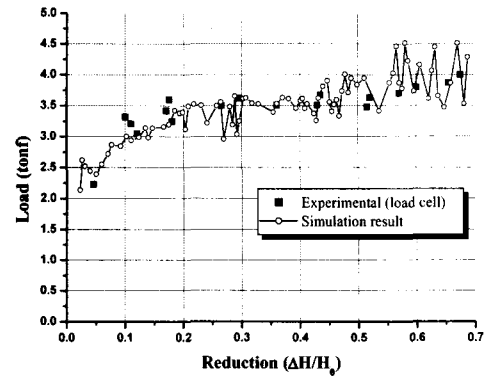


Fig. 12 Variation of roll force with total reduction when rolling plain rings at a constant feed rate of 0.019 in / rev.

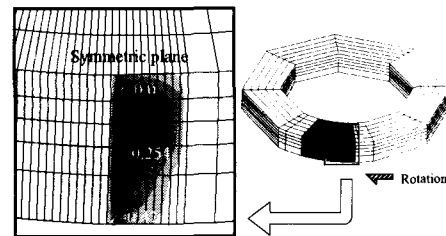


Fig. 13 The normal outside pressure distribution contour when rolling plain rings after a total reduction of 4.7 percent

게 변화하는 모습을 볼 수 있는데 이러한 현상은 소재의 단면변형이 심해지면서 롤과의 접촉 절점이 부정확해지기 때문에 발생하는 현상으로 볼 수 있으며, 단순히 요소의 개수를 늘리는 것 만으로도 더 나은 하중 양상을 확인할 수 있을 것으로 예상된다.

3.2.3 압력분포 및 접촉길이 예측

해석결과는 링 중심에서의 거리에 따라 3 가지로 분류하여 나타내었으며($Z=0.0$ in., $Z=0.25$ in., $Z=0.5$ in.), 구동롤 접촉압력분포만을 나타내었다. 여기서 $Z=0.0$ in. 부위는 대칭(symmetric)해석에서의 대칭면에 해당한다. 압력분포 데이터는 각각 압하량과 접촉롤 부위에 따라서 구분하였으며, 해석데이터는 B-spline 으로 보간하였다.

Fig. 13 은 4.7%의 압하량을 가진 링의 압력분포를 등고선의 형태로 나타낸 것이다. Fig. 14-16 은 압하량이 비교적 적은 4.7%에서 해석결과를 실험값과 비교하였다.

실험값은 압하량 4.7%에서 z 축의 위치에 따른 일관된 측정결과가 없었기 때문에 이와 가장 근

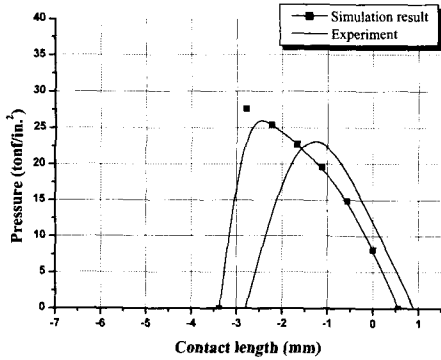


Fig. 14 Normal outside pressure distribution curves when rolling plain rings after a total reduction of 4.7 percent. ($Z=0.0$ in.)

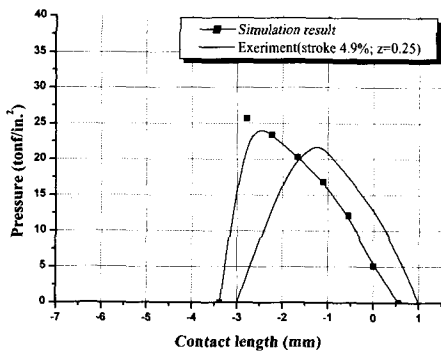


Fig. 15 Normal outside pressure distribution curves when rolling plain rings after a total reduction of 4.7 percent ($Z=0.254$ in.)

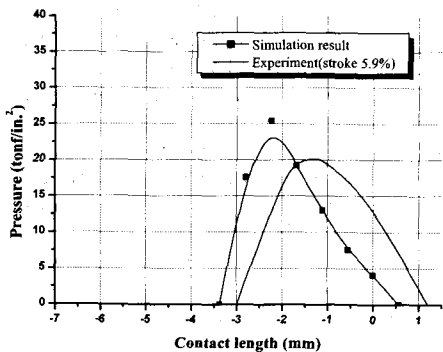


Fig. 16 Normal outside pressure distribution curves when rolling plain rings after a total reduction of 4.7 percent ($Z=0.47$ in.)

접한 결과를 해석결과와 비교하였으며, 실험값과 압하량의 차이가 최대 1.2%까지 나지만 이것은 비교적 적은 변화량이라고 생각하고 결과를 도시하였다. 또한 실험의 압하량이 해석시 압하량과 차이가 나는 경우 범례에 표시하였다. 결과적으로 해석결과가 실험값보다 최대압력이 크게 나타나는 경향이 있지만, 부위별 압력분포와 접촉길이(contact length)의 결과는 유사한 양상을 보였으며, 각 질점에서의 압력을 합산한 전체 하중도 큰 차이를 보이지 않았다. 따라서 이를 4.7%의 비교적 적은 압하량에서, 시뮬레이션을 통해 압력 및 접촉길이를 예측할 수 있음을 확인하였다.

다음은 압하량이 비교적 큰 51.5%의 해석결과를 실험값과 비교한 결과이다. Fig. 17은 Fig. 13과 유사하게 51.5%의 압하량에 대하여 압력분포를 개략적으로 나타낸 것이다. 앞에서와 마찬가지로 실험값이 51.5%의 압하량에 근접한 측정 결과를 가지고 해석결과와 비교하였다. 또한, Fig. 18-20은 앞의 결과에 비해 최대압력은 차이를 보이지만, 요소망을 재구성하지 않았음을 감안하면 전체적인 압력분포와 접촉길이는 비교적 정확하게 예측되고 있음을 확인할 수 있다.

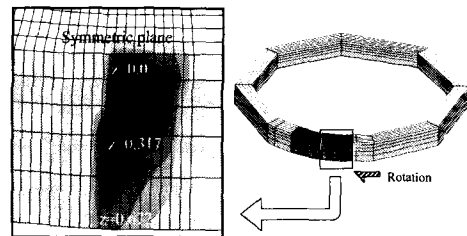


Fig. 17 The normal outside pressure distribution contour when rolling plain rings after a total reduction of 51.5 percent

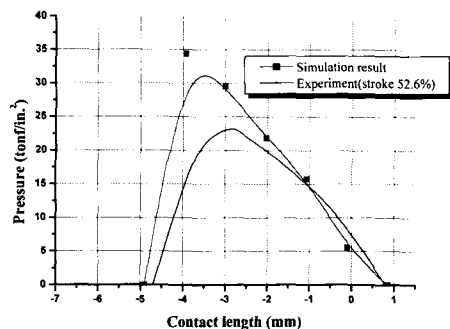


Fig. 18 Normal outside pressure distribution curves when rolling plain rings after a total reduction of 51.5 percent ($Z=0.0$ in.)

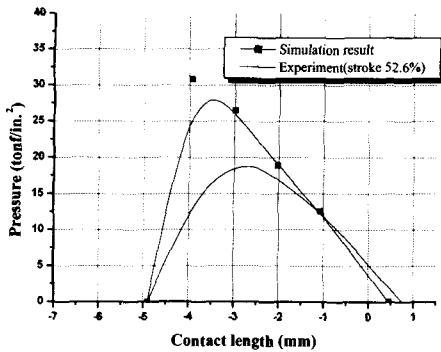


Fig. 19 Normal outside pressure distribution curves when rolling plain rings after a total reduction of 51.5 percent ($Z=0.317$ in.)

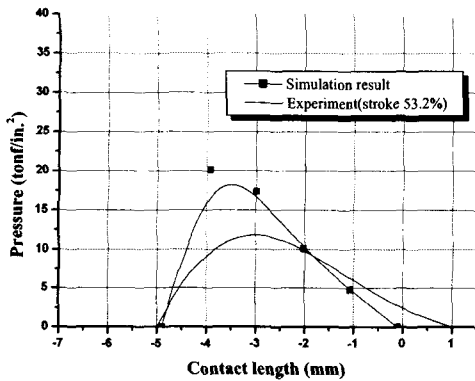


Fig. 20 Normal outside pressure distribution curves when rolling plain rings after a total reduction of 51.5 percent ($Z=0.672$ in.)

일반적으로 요소망을 재구성하거나 요소의 개수를 증가 시킬 경우, 해의 정확도를 높일 수 있으므로, 이러한 방법을 이용하면 실험값과 더욱 유사한 결과가 나올 것으로 예상된다.

4. 결론

본 연구는 평 링 압연과 T 형상의 링 압연에 대한 강소성 유한요소 해석의 타당성을 검증하기 위하여 수행하였다. 이를 위하여, 수치적 시뮬레이션을 통하여 링 압연 공정에서의 소재의 유동양상을 검증하였고, 평 링 압연의 압력 분포와 접촉 길이를 통해서 링 압연 공정에서 일반적으로 나타나는 변형특성을 확인하였다.

본 연구를 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 평 링과 형상 링의 유동양상을 문헌에 나타난 실험값과 비교한 결과, 특히, 폭 퍼짐량의 비교를 통해, 본 해석으로 가압률의 이동속도에 따른 유동양상을 적절하게 예측할 수 있음을 확인하였다.

(2) 롤과 소재의 부위별 압연 하중과 압력분포를 실험값과 비교하여 링의 확장에 따른 접촉영역과 접촉압력의 변화가 실제와 유사한 양상을 보이고 있음을 확인하였다. 링 압연은 전통적인 평 압연과는 달리 입구쪽의 압력이 출구쪽 보다 상대적으로 높으며 롤 간의 중앙 이후에도 압력이 지속되는 특성을 보이는데, 해석결과는 이러한 특성을 비교적 정확하게 보여주고 있음을 확인하였다.

(3) 본 수치적 해석방법으로 링 압연공정에서 소재의 유동양상을 예측할 수 있으므로, 이 방법은 설계자가 예상한 대로 성형이 이루어 지는지 확인할 수 있는 중요한 설계도구로 이용할 수 있다. 또한, 해석결과 얻어지는 압연 하중은 소유하고 있는 링 롤링 설비를 이용해서 특정 링 제품의 성형 가능성을 판단할 수 있는 검증자료로 사용할 수 있다.

후 기

본 논문 연구는 서강대학교 산업기술연구소의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Johnson, W. and Needharm, G., 1968, "Experiments on Ring Rolling," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 10, pp. 95~113.
- (2) Hawkyard, J.B., Johnson, W., Kirkland, J. and Appleton E., 1973, "Analyses for Roll Force and Torque in Ring Rolling with Some Supporting Experiments," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 15, pp. 873~893.
- (3) Mamalis, A.G., Hawkyard, J.B. and Johnson, W., 1975, "Cavity Formation in Rolling Profiled Rings," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 17, pp. 669~672.
- (4) Yang, D.Y., Hawkyard, J.S. and Johnson, W., 1975, "Cavity Formation in Rolling Profiled Rings," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 17, pp. 669~672.
- (5) Huisman, H. J. and Huetink, J., 1985, "A Combined Eulerian-Lagrangian Three-Dimensional Finite-Element Analysis of Edge-Rolling," *J. of Mechanical Working Technology*, Vol. 12, pp. 333~353.
- (6) Kim, N. S., Machida, S. and Kobayashi, S., 1990, "Ring Rolling Process Simulation by the Three Dimensional Finite Element Method," *Int. J. Mach. Tools Manufact.*, Vol. 30, No. 4, pp. 569~577.
- (7) Mamalis, A. G., Hawkyard, J. B. and Johnson, W.,

- 1976, "Spread and flow patterns in ring rolling," *Int. J. mech. Sci.*, Vol. 1S, pp. 11~16.
- (8) Mamalis, A. G., Johnson, W. and Hawkyard, J. B., 1976, "Pressure Distribution, Roll Force and Torque in Cold Ring Rolling," *J. Mech. Sci.*, Vol. 18, p. 196.
- (9) Mamalis, A. G., 1975, "Profile Ring Rolling," *Ph. D. Thesis*. U.M.I.S.T.
- (10) Kobayashi, S., Oh, S. I. and Altan, T., 1989, "Metal Forming And The Finite Element Method," Oxford University Press.
- (11) Altan, T., Oh, S. I. and Gegel, H. L., "Metal Forming Fundamentals and Applications," AMS(American society for metals).