

## 원통 기어로 구성된 다단 기어열의 기어비 분할법 개발

배인호\*, 정태형<sup>+</sup>

(논문접수일 2002. 9. 3, 심사완료일 2002. 11. 7)

### New Methods to Split Overall Gear Ratio of the Cylindrical Multi-Stage Gear Train

Inho Bae\*, Tae Hyong Chong<sup>+</sup>

#### Abstract

The existing methods to split overall gear ratio of the cylindrical multi-stage gear train have their own limitations to be used in practical design, and are also problematic to be implemented in a formalized algorithm. This paper proposes two types of new methods to find gear ratios best approximating the overall gear ratio. The proposed methods are quite general to be applied to the gear train having any number of stages, and offer a considerably good result in a very short time. The first method uses the random search method and the second one is based on the simulated annealing algorithm. The proposed algorithms are expected to be very useful not only as an independent program to split overall gear ratio, but also as a design sub-module for the integrated design system of multi-stage gear drives.

**Key Words :** Gear(기어), Gear Train(기어열), Gear Ratio(기어비), Random Search Method(임의 탐색법), Simulated Annealing Algorithm(시뮬레이티드 어닐링 알고리즘)

### 1. 서론

다단 기어열의 각 감속단의 기어비 분할은 기어의 제원 설계와 기어 장치의 배치 설계에 직접적으로 영향을 미치는 중요한 요인이다<sup>(1-3)</sup>. 일반적으로 기어의 종류에 따라 한 단에서 사용할 수 있는 기어비의 한계가 제시되어 있으나<sup>(4,5)</sup>, 이들은 다만 경험적으로 정립된 일반적인 지침에

불과하고 기어비의 분할에 관한 실제적이고 구체적인 방법을 제공하는 것은 아니다. 더욱이 기어비는 각 기어의 제원 및 기어 장치 요소의 배치와도 서로 직접적인 영향을 미치기 때문에 이를 적절히 분할하는 것은 상당히 어려운 문제이다.

본 논문에서는 원통 기어로 구성된 다단 기어열의 기어비를 분할하기 위한 기존의 방법론에 대해 그 장단점을 분석

\* 한양대학교 기계기술연구소 (mirian@ihanyang.ac.kr)  
주소: 133-791, 서울시 성동구 행당동 17번지  
<sup>+</sup> 한양대학교 기계공학과

하고, 모든 단수의 기어열에 적용할 수 있는 범용적인 기어비 분할법을 개발한다. 개발한 알고리즘은 두 가지로서 각각 임의 탐색법(random search method)과 시물레이티드 어닐링 알고리즘(simulated annealing algorithm)에 기반하며, 기어비 분할 예를 통해 두 방법의 유용성과 안정성을 검증하고 그 차이에 대해 고찰한다.

## 2. 기존의 기어비 분할법에 관한 고찰

현재까지 다단 기어열의 기어비 분할을 위한 몇 가지 방법론이 제시되고 있는 바, 본 논문에서 제안한 기어비 분할 알고리즘과의 비교를 위해 이들에 대해 간단히 고찰한다.

### 2.1 관성 모멘트 최소화에 의한 방법

기어열을 포함한 서보 기구의 응답을 좋게 하기 위해 기어열의 관성 모멘트가 최소로 되도록 각 기어쌍의 기어비를 선정할 수 있다<sup>(3,6)</sup>. 그러나 이 방법을 통해 기어비를 분할하면 입력단에서 출력단으로 갈수록 더 큰 기어비를 갖도록 분할된다. 즉 이 방법은 각 단 기어의 강도와 전달 토크와의 관계에 의해 기어들 사이의 크기의 불균형을 초래할 수 있기 때문에 응답 성능이 중요한 정밀 서보 기구의 설계 등과 같은 한정된 목적으로만 사용할 수 있다. 따라서 입력측 단의 기어비를 크게 하고 출력측 단의 기어비를 작게 하는 일반적인 다단 기어열의 기어비 분할을 위해서는 보다 범용적인 방법이 필요하다.

### 2.2 Niemann에 의한 방법

Niemann은 기어비 분할을 위해 기어장치의 각 단에서의 전달 동력이 같다는 조건과 각 단의 기어쌍의 전 체적이 최소로 되는 경우에 기어비 분할이 가장 적절한 상태로 된다는 가정으로부터 관계 수식을 유도하였다<sup>(3,7)</sup>. Niemann은 유도한 식에 재료 등에 관한 경험적인 조건을 부가하여 작성한 2단 및 3단 기어장치의 기어비 분할에 관한 선도를 제공하고, 그 선도에서 지시하는 영역에 속하는 기어비를 사용할 것을 추천하고 있다. 그러나 이 선도가 특정한 기어비를 제공하는 것은 아니며, 더욱이 사용 가능한 기어비의 범위가 상당히 광범위하기 때문에 설계에 실질적인 도움을 주기 어렵다. 또한, 그 선도는 2단 및 3단 기어열에 국한되어 있기 때문에 실제로 기어비 설정이 어려운 문제로 대두되는 4단 이상의 기어열에 대해서는 적용이 어렵다.

### 2.3 연분수를 이용한 방법

연분수(continued fraction)를 이용한 기어비 결정 방법은 연분수의 성질을 이용해 주어진 기어비에 가장 근사한 값을 얻기 위한 체계적인 방법이다<sup>(3,8)</sup>. 임의의 값을 기어비의 집합으로 표현하는 것은 그 값을 유리분수(rational fraction)로 치환하는 것과 같고, 이때 이 유리분수의 분자는 피니언의 잇수의 곱이고 분모는 휠(기어)의 잇수의 곱이라고 할 수 있다. 따라서 원하는 값에 가장 가까우면서 동시에 분자와 분모의 크기 기준에 위배되지 않는 유리분수를 구하면 원하는 기어비를 설정할 수 있다. 그러나 연분수를 이용한 기어비 분할 방식은 실제로 사용하기 위해서는 많은 수작업을 거쳐야 한다. 즉, 실제 사용되는 기어의 잇수를 얻기 위해서는 연분수의 부분합을 적절히 조합한다거나 적절한 인수를 곱해주는 단계를 거쳐야 하며, 이는 현재로서는 수작업에 의존할 수 밖에 없으며 자동화 알고리즘으로 구현하기에는 어려운 단점을 가지고 있다.

### 2.4 AGMA 방식에 의한 방법

AGMA에서는 최적의 기어비 분할을 위한 두 가지 방법을 제시하고 있다<sup>(9-12)</sup>. 첫 번째 방법은 기어장치를 구성하는 기어의 체적의 합이 최소가 되도록 전 기어비를 분할하는 것이며, 두 번째 방법은 중심 거리가 미리 정해져 있고 치폭에 대한 제한이 있는 경우에 각 단의 면압강도를 고르게 유지하도록 기어비를 분할하는 것이다. 그러나 두 가지 방법 모두 2단 기어열의 기어비 분할에만 국한되어 있어 3단 이상의 기어열에는 적용이 어렵다.

## 3. 최적 기어비 분할법의 개발

기어열의 기어비 분할은 궁극적으로 다단 기어장치의 설계를 수행하기 위한 목적을 가지고 있다. 여기서 다단 기어장치의 설계를 위해서는 최적화 설계법의 도입을 고려해 볼 수 있으나 기어의 제원 설계와 기어장치의 배치 설계를 하나의 목적 함수로 정의하기 어려운 점이 있다. 따라서 다단 기어장치의 설계 시스템은 각 설계 단계를 적절히 분리하여 각 단계의 설계 해를 구하고 이를 반복적으로 수행하는 다단계 설계 방법이 유효하다. 이를 도식적으로 나타낸 것을 Fig. 1에 보인다. 즉, 다단 기어장치의 설계는 우선 각 단의 기어비를 분할하고, 각 기어의 제원 설계와 기어와 축 등 기어장치를 이루는 요소들의 배치 설계를 반복적으로 수행함으로써 최종적으로 적절한 설계 해를 구하는 것으로 구성된다.

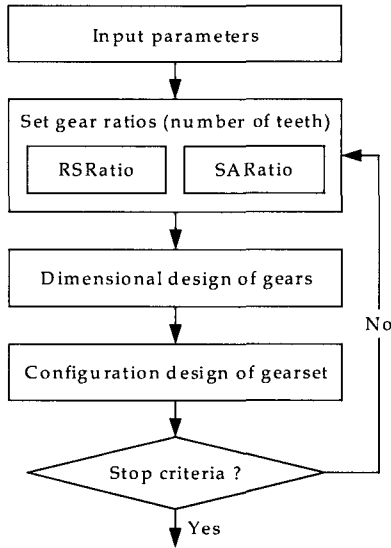


Fig. 1 Flow chart of the design algorithm for multi-stage gear drives

다(1,3,13).

그러나 다단 기어열의 기어비 분할을 위한 현재까지의 연구들은 3단 또는 4단 이상의 기어열에 대해서는 적용이 어렵거나 수작업에 의존하여 자동화가 어렵다는 등의 한계를 가지고 있다. 또한, 이러한 방법으로 구한 기어비는 기어 장치의 배치 설계를 고려하지 않은 값으로 실제 배치 설계에 의해 기어비의 값이 제한되는 4단 이상의 기어열에 있어서는 최적의 해라고 할 수 없다. 따라서 여기서는 다단 기어열의 기어비 분할에 대한 기존의 일반적인 지침과 기어 장치의 제원 및 배치 설계의 상호 연성을 근거로 하여 각 단의 기어비를 결정할 수 있는 두 가지 알고리즘을 개발하였다. 개발한 분할법은 Fig. 1의 다단 기어장치 설계 시스템의 하부 모듈로서 기능하는 것으로서, 구체적인 알고리즘의 개발은 기어비 분할에 관한 일반적 지침을 포함한 다음 세 가지 직관적 가정을 전제로 하고 있다.

첫째, 각 단의 기어비와 피니언 잇수를 정확하게 결정하는 힘들지만 그 상한치는 설계자의 경험 및 설계 지침에 따라 대략적으로 정해줄 수 있다.

둘째, 일반적으로 입력측 단에서 출력측 단으로 진행함에 따라 기어비를 작게 설정한다.

셋째, 가장 적절한 상태의 기어비는 기어 장치의 크기를 최소로 하는 경향을 가진다.

여기서 개발한 분할 알고리즘은 임의 탐색법(random search method)에 기반한 RSRatio와 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘(simulated annealing algorithm; SA)에 기반한 SARatio로 나뉘어지며, 이에 대해 다음에 설명한다.

### 3.1 임의 탐색법에 의한 분할법 (RSRatio)

RSRatio는 설계 지침으로부터 각 단의 기어비의 상한치와 하한치를 설정하고, 이 범위 내에서 입력측 단의 기어비가 출력측 단의 기어비보다 크도록 난수(random number)를 생성함으로써 기어비를 설정할 수 있도록 한 것이다.

RSRatio의 구체적인 알고리즘은 Fig. 2에 보이는 바와 같다. 우선 기어비의 상한치와 하한치 사이에서 난수를 생성하여 이를 1단의 기어비로 하고, 결정된 1단의 기어비를 상한치로 하여 다시 난수를 생성하여 이를 2단의 기어비로 하는 방식을 반복하여 각 단의 기어비를 결정한다. 여기서 마지막 단의 기어비는 식 (1)과 같이 계산하게 되며, 이 값

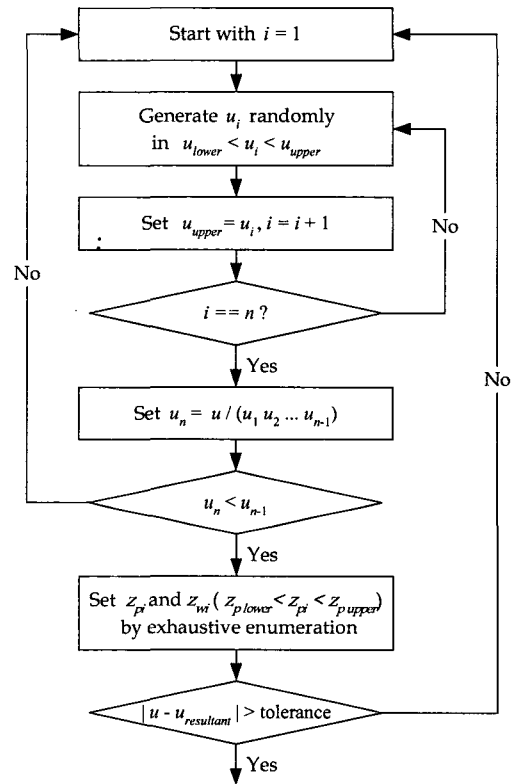


Fig. 2 Flow chart to find the gear ratios based on the random search method (RSRatio)

이 이전 단의 기어비보다 작아야 한다는 단순 비교를 통해 기어비 분할의 적정성 여부를 판별할 수 있다.

$$u_n = u/(u_1 \cdot u_2 \cdots u_{n-1}) \quad (1)$$

여기서  $u$ 는 전 기어비,  $u_i$ 는 각 단의 기어비,  $n$ 은 기어열의 전체 단수를 나타낸다.

다음 단계로서 설정된 기어비로부터 피니언(pinion)과 휠(wheel)의 잇수  $z_{pi}$ 와  $z_{wi}$ 를 설정하는 것은 두 개의 변수만을 포함하는 정수 최적화 문제로 볼 수 있으므로 완전 열거법(exhaustive enumeration)를 이용하여 결과적인 기어비의 오차를 최소화 한다. 이와 같이 결정된 각 단의 기어비는 기어 제원을 결정하기 위한 기본적인 입력으로 사용되는 잠정적인 값으로, 이후 제원 설계와 배치 설계를 수행한 후 다른 기어비를 설정하여 같은 설계 과정을 반복적으로 수행한다. 이러한 과정이 반복해서 수행되면 최종적으로는 기어장치의 부피를 최소화 하는 설계를 제공하는 적절한 기어비를 설정하게 된다.

### 3.2 SA에 기반한 분할법 (SARatio)

SARatio는 SA에 기반하여 각 단의 피니언과 휠의 잇수를 결정함으로써 기어비를 분할하도록 한 것이다. 기본적으로 SA는 최적화 알고리즘 중 최속 강하법(steepest descent method)의 변형된 형태이다. 즉, 설계 공간 내에서 새로운 해는 현재의 해로부터 일정한 거리 내에서 선택이 되며 이전 해와의 비교를 통하여 메트로폴리스 기준(Metropolis criterion)을 거친다. 메트로폴리스 기준  $P_{accept}$ 는 식 (2)와 같은 확률 함수로서 급속의 풀림 과정(annealing process)에 대한 상사에 기반하여 온도의 함수로서 표현된다.

$$P_{accept} = e^{-\frac{\Delta F}{T}} \quad (2)$$

여기서,  $\Delta F$ 는 이동에 의한 목적 함수의 변화량이고,  $T$ 는 현재 상태에서의 온도이다. 초기 온도는 높은 곳에서 시작하며 시간에 따라 감소하기 때문에 탐색 초기의 이동은 거의 대부분 받아들여지고 결과적으로 목적 함수 공간을 광범위하게 탐색한다. 메트로폴리스 기준은 목적 함수를 악화시키는 설계 변수의 이동도 확률적으로 승인함으로써 국소해를 벗어날 수 있는 특징을 가지며, 온도가 낮아짐에 따라 목적 함수를 악화시키는 이동을 받아들이는 확률이 줄어들어 결국 최적해로 수렴한다.

각 단의 잇수를 결정하기 위해 사용한 목적 함수는 식 (3)에 보이는 바와 같이 설계자가 원하는 전 기어비와 최적화 과정에서 구해지는 잇수로부터 계산된 전 기어비의 차를 최소화 하도록 하였고, 해의 탐색 영역을 피니언 잇수의 상한치와 하한치 조건으로 제한한다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } F_{ratio} &= \left| u - \frac{z_{w1}}{z_{p1}} \times \frac{z_{w2}}{z_{p2}} \times \cdots \times \frac{z_{wn}}{z_{pn}} \right| \\ \text{subject to } z_{p, lower} &\leq z_{pi} \leq z_{p, upper} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,  $z_{pi}$ ,  $z_{wi}$ 는 각각  $i$ 번째 단의 피니언과 휠의 잇수를 나타낸다.

SARatio의 구체적인 설계 프로세스를 Fig. 3에 보인다. 여기서  $\mathbf{X}=(x_1, \dots, x_n)$ 은 결정해야 할 변수 벡터로서 여기서는 각 단 기어의 잇수, 즉  $(z_{p1}, \dots, z_{pn}, z_{w1}, \dots, z_{wn})$ 이다. 잇수는 정수 변수이기 때문에 변수  $\mathbf{X}$ 를 정수로 만들기 위하여 반올림(round off)하여  $F_{ratio}(\mathbf{X})$ 의 값을 구한다. 다음은 잇수의 상하한치 범위에서 시험값(trial value)  $x_i^*$ 를 생성시키고 다시 변수  $x_i^*$ 를 정수로 만들기 위하여 반올림을 한다. 이 값으로부터  $F_{ratio}(\mathbf{X}^*)$ 를 구해내고  $F_{ratio}(\mathbf{X})$ 와 크기를 비교하여 새로운 해로 받아들이기가 적당한지를 판단하기 위해 메트로폴리스 기준을 거친다. 이 과정은 전체 NVAR 개의 변수에 대해 각각 수행된다.

SARatio 알고리즘의 탐색 성능과 수렴성은 탐색 전략(search strategy)과 어닐링 스케줄(annealing schedule, cooling schedule)에 의해 제어된다. 탐색 전략은 탐색을 위한 최대 이동 거리(step length)를 적절히 조정하는 것으로, 여기서는 일정 횟수(NSTEP)만큼 함수 평가를 반복한 후에 약 50%의 이동이 승인되도록 이동 거리를 수정해 주는 방식을 택하였다. 일반적으로 NSTEP은 문제에 따라 적절한 값을 선택할 수 있지만 여기서는 20을 사용하였다. 또한, 어닐링 스케줄은 식 (4)와 같이 온도 강하 계수(temperature reduction factor)  $\alpha$ 에 의한 단순 강하법을 채택하였으며,  $\alpha$ 는 0.80을 사용하였다.

$$T_{new} = \alpha \times T_{current} \quad (4)$$

마지막으로 종료 조건(stop criterion)은 두 가지로 설정해 주었으며 첫 번째는 함수 평가 횟수가 최대치를 초과한 경우이고, 두 번째는 일정 횟수의 함수 평가 후에  $F_{ratio}$ 의 값에 더 이상 변화가 없을 때, 즉, 공차(tolerance)와 비교하여 작은 경우이다. 일단 수렴이 된 이후에는 기어비의 값을

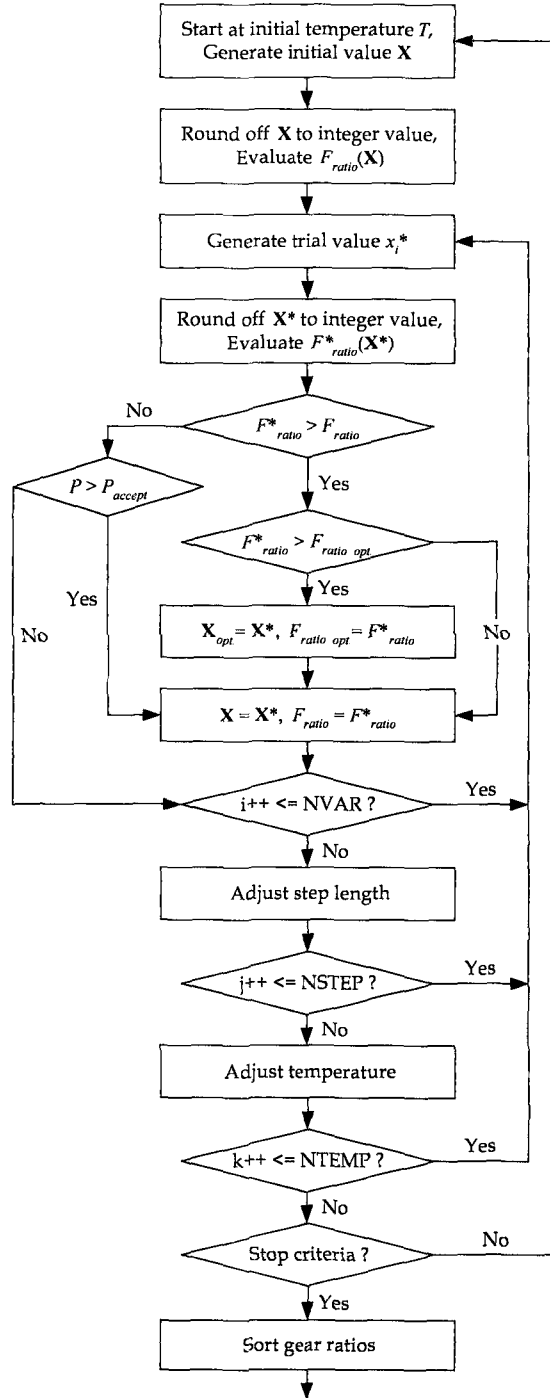


Fig. 3 Flow chart to find the gear ratios based on the simulated annealing algorithm (SARatio)

Table 1 Output result of the example: RSRatio

Stage	1	2	3	4	5
Gear ratio	6.3043	5.6190	4.6667	4.4000	1.3750
No. of teeth in pinion	23	21	15	15	16
No. of teeth in wheel	145	118	70	66	22

정렬하는 단계를 거침으로서 간단하게 입력측 단의 기어비가 출력측 단의 기어비보다 크도록 설정해 줄 수 있다.

### 3.3 기어비 분할 적용 및 평가

이상의 기어비 분할 알고리즘을 기반으로 구현한 프로그램의 성능을 검증하기 위해 기어열의 잇수 결정을 수행해 본 결과를 보인다. 적용한 기어열은 5단으로 전 기어비가 1000이며, 허용 오차(tolerance)는 전 기어비의 1%, 한 단의 기어비의 범위는 1~7, 피니언 잇수의 범위는 14~25로 하였다. 분할 방법에 따른 분할 프로그램의 실제 수행 화면을 Figs. 4와 5에 보이며, 이 때의 분할 결과를 Tables 1과 2에 정리하여 나타내었다.

Tables 1과 2의 결과에서 피니언과 기어의 잇수가 전 기어비 1000이 되도록 적절하게 결정되었음을 알 수 있으며, 기어비도 일반적인 기어비 설정 방식에 부합하는 결과를 주기 위해 1단에서 5단으로 갈수록 작은 값을 취하고 있다.

그러나 이러한 결과가 최적의 기어비라는 것은 아니며 단지 다단 기어열의 반복적인 설계 과정 중의 하나의 잠정적인 해에 불과하다. 따라서 이러한 설정 방식이 의미를 가지기 위해서는 반복되는 수행 시에 전 기어비와의 오차를 최소화하며 빠른 시간 내에 안정적인 결과를 주는 것이 중요

Table 2 Output result of the example: SARatio

Stage	1	2	3	4	5
Gear ratio	6.4286	6.400	5.0000	2.5000	1.9444
No. of teeth in pinion	14	25	14	14	18
No. of teeth in wheel	90	160	70	35	35

하다. 개발한 알고리즘의 성능과 안정성을 검증하기 위해 이상의 분할 예를 10회 수행했을 경우의 수행 시간과 전 기어비 및 오차를 각각 Tables 3과 4에 보인다.

Tables 3과 4의 결과에서 모든 시행 횟수에 있어서 상당히 짧은 시간 내에 기어비 설정이 수행되었음을 보여주고 있으며, 또한 계산된 전 기어비들도 무시할 수 있는 수준의 오차 범위 내에 들고 있음을 알 수 있다. RSRatio는 전 기어비의 설정 결과에서 약간의 오차가 발생하지만 오차의 크기가 최대 0.4% 이내로서 상당히 미미하기 때문에 실제 사용에는 문제가 없다고 볼 수 있다. 또한 SARatio의 경우 수행 시간이 최대 0.601 초에 불과하기 때문에 실용적으로 충분한 결과를 주고 있음을 알 수 있다. 따라서 두 가지 설정 알고리즘 모두 빠른 시간 내에 전 기어비와의 오차를 최소화하며 안정적인 결과를 주고 있으므로 다단 기어장치의 설계를 위한 기본 모듈로서 충분히 기능할 것으로 사료된다.

## 4. 결론

본 논문에서는 다단 기어열의 기어비 분할에 관한 기존의 방법론을 분석하고, 임의 탐색법과 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘에 기반한 두 가지 기어비 설정 알고리즘을 제시하였

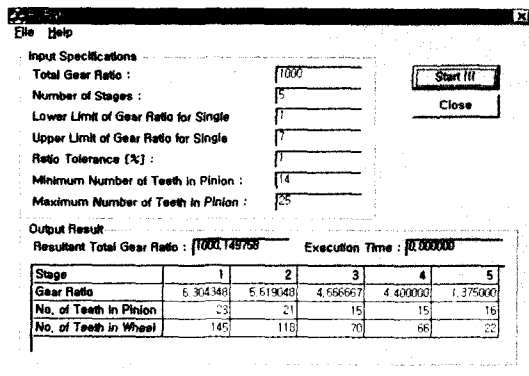


Fig. 4 Program window of the example: RSRatio

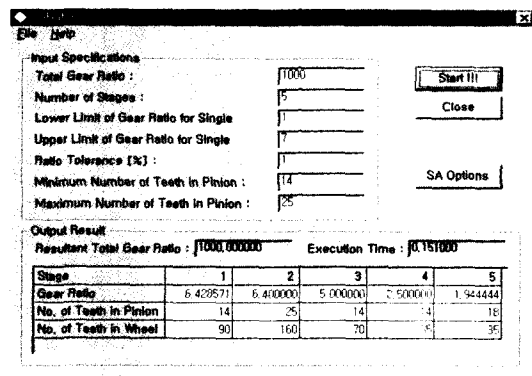


Fig. 5 Program window of the example: SARatio

Table 3 Results of ten trial executions: RSRatio

Trial number	Execution time [sec.]	Resultant total gear ratio	Error in the ratio
1	0.000	1000.1498	0.1498
2	0.000	1000.0035	0.0035
3	0.000	998.1074	-1.8926
4	0.000	1000.4234	0.4234
5	0.000	1000.5340	0.5340
6	0.000	1003.0668	3.0668
7	0.000	999.3176	-0.6824
8	0.000	999.2257	-0.7743
9	0.000	998.6803	-1.3197
10	0.000	1003.9726	3.9726

Table 4 Results of ten trial executions: SARatio

Trial number	Execution time [sec.]	Resultant total gear ratio	Error in the ratio
1	0.151	1000.0000	0.0
2	0.431	1000.0000	0.0
3	0.290	1000.0000	0.0
4	0.150	1000.0000	0.0
5	0.140	1000.0000	0.0
6	0.160	1000.0056	0.0056
7	0.241	1000.0000	0.0
8	0.140	999.9953	-0.0047
9	0.601	1000.0000	0.0
10	0.300	999.9862	-0.0138

다. 기존의 방법론들은 각각의 단점들로 인해 실제 설계 상황에 이용할 수 있는 범위가 제한되어 있고, 특히 설계 자동화의 관점에서 그 유용성이 크게 떨어지는 문제점이 있다. 반면 본 논문에서 제시한 알고리즘은 모든 단수의 기어열에 이용할 수 있는 범용적인 설계 방법일 뿐만 아니라, 특히 빠른 수행 시간 내에 요구되는 전 기어비의 오차를 최소화 하며 만족할 만한 결과를 주고 있다. 따라서, 두 가지 알고리즘은 모두 독립적인 기어비 분할 프로그램으로도 유용하게 사용될 수 있을 뿐만 아니라 다단 기어열 설계의 자동화에 더욱 유용하게 사용할 수 있을 것으로 기대된다.

### 참고 문헌

- (1) Chong, T. H., Bae, I., and Park, G. J., "A New and Generalized Methodology to Design Multi-Stage Gear Drives by Integrating the Dimensional and the Configuration Design Process," *Mechanism and Machine Theory*, 37, pp. 295~310, 2002.
- (2) 정태형, 이정상, 최정락, "기어물림부의 스프링강성 변화와 구동기의 불균형의 고려한 2단 기어장치의 진동에 관한 연구", 한국공작기계학회지, 2001.
- (3) 배인호, 정태형, "시뮬레이티드 어닐링 알고리즘을 이용한 기어열의 최적 기어비 분할법 개발," 한국공작기계학회 2002 춘계학술대회 논문집, pp. 687~692, 2002.
- (4) Townsend, D. P., *Dudley's Gear Handbook*, 2nd

- edition, McGraw-Hill Inc., 1992.
- (5) AGMA 917-B97, *Design Manual for Parallel Shaft Fine-Pitch Gearing*, American Gear Manufacturers Association, 1997.
- (6) 齒車便覽編集委員會, 1973, *齒車便覽*, 日刊工業新聞社(日本).
- (7) Niemann, G., *Machine Elements*, Springer-Verlag, 1978.
- (8) Piper, C. A., "Approximating Arbitrary Ratios with Gears," *Machinery*, 1953.
- (9) AGMA 901-A92, *A Rational Procedure for the Preliminary Design of Minimum Volume Gears*, American Gear Manufacturers Association, 1992.
- (10) Errichello, R., "A Rational Procedure for Designing Minimum Weight Gears," *Power Transmission and Gearing Conference*, Chicago, ASME Vol. 1, pp. 111~114, 1989.
- (11) Willis, R. J., Jr., "Lightest-Weight Gears," *Product Engineering*, Jan. 21, pp. 64~75, 1963.
- (12) Savage, M., Coy, J. J., and Townsend, D. P., "Optimal Tooth Numbers for Compact Standard Spur Gear Sets," *Trans, ASME J. of Mechanical Design*, Vol. 04, No. 4, pp. 742~758, 1982.
- (13) 배인호, 제원 및 배치 설계 프로세스를 통합한 다단 기어장치 자동 설계 시스템 개발, 한양대학교 대학원 박사학위 논문, 2002.