대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
<School Mathematics> Vol.4, No.4, 539-554. Dec 2002

수학기호와 그 의미에 대한 고찰 및 도입 방법

김 선 희* · 이 종 희**

Ⅰ. 서론

수학적 지식을 구성하고 학습하는데 있어 언어와 기호는 중요한 역할을 한다. 언어와 사고는 서로의 발달에 영향을 주며(Vygotsky, 1962), 수학적 사고를 신장시키는데 있어서 언어의 역할은 강조되어야 한다. 수학적 내용이나 아이디어를 표현하기 위해서는 대수 상징과 그래프, 다이어그램 등의 많은 기호를 이용하며, 형식적인 수학기호의 사용은 추상적인 수학적 아이디어를 발전시키고 학문적 체계를 완성하도록 돕는다. 수학을 학습하는 것은 여러 기호의 의미를 파악하고, 수학공동체에서 약정한 규칙을 올바로 사용하고, 수학기호의 중재를 통하여 사고를 발전시키고, 적절한 순간에 다른 사람이 이해할 수 있도록 자신의 생각을 표현하기 위해 기호를 사용할 줄 아는 것을 배우는 것이다. 기호가 수학 학습에서 인지적 측면과 의사소통의 측면에서 이러한 역할을 담당한다는 것을 고려해 볼 때, 수학 교육 연구에서 기호와 언어적 측면을 중요시 여겨야 함은 당연하다.

그러나 수학교육 연구에서 수학기호는 수학적 아이디어를 나타내기 위한 수단과 도구 역할에 초점이 맞추어져 왔으며, 수학기호 자체가 학습 대상이 되고 수학적 아이디어와 기호가 더불어 발전하는 교수 설계에 대한 연구는 등한시되어 왔다. 이는 수학 교육 연구 자체가 독자적으로 발전하기보다 일반적인 교육과 철학 분야에 터하여 그 발전을 추구하여 온 탓으로 볼 수도 있다. 타학문과 달리 수학은 독특한 상징을 통해 발전하고 여러 가지 기호 표현을 두루 사용하기 때문에, 수학기호에 대한 교육적 연구는 수학과 교육적 관점에서 기호학을 포섭하여 진행되어야 한다. 이에 본 연구는 인식론과 기호학의 입장을 정리하여 수학기호와 의미의 상호구성이 학습 과정에서 함께 이루어짐을 보이고자 한다.

의미가 없는 기호는 쓸모가 없고, 의미가 풍부해도 수학공동체의 약속된 표기가 사용되지 않는다면 의사소통될 수가 없다. 수학 기호의 의미를 아는 것은 수학적 개념을 아는 것으로 생각할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 지식을 다루는 인식론적 입장에서 기호의 의미를 먼저 논의할 것이다. 그리고 수학 학습 과정에서 기호의 이해를 기호 모델로 제시하고자 한다. 이 모델을 토대로 수학기호의 표현과 의미가 서로를 구성해나간다는 점을 살펴보고, 수학기호 학습 지도에 대한 접근 방법을 모색해 볼 것이다.

진행하기에 앞서 용어들을 검토할 필요가 있

* 광장중학교
** 이화여자대학교

다. 학문적 전통에 따라 기호학과 언어학 등에서는 용어와 그 번역을 다르게 하기 때문에 정의가 필요하다. 본 연구에서 기호는 물리적이든 심적인 것이든 어떤 대상을 뜻하면서 그 대상에 대한 해석이 필요한 역동적인 표현이라 정의한다. 다소 포괄적이기는 하나, 수학교육에서 x, y 등의 문자와 규약된 기호 뿐 아니라 그래프, 수학용어, 다이어그램, 일상언어의 문장 모두를 연구 대상으로 포함하고자 함이다. 따라서 본 연구에서 언어는 기호이며, 언어학은 기호학의 일부로 본다. Peirce는 기호를 광의의 의미와 협의의 의미로 나누어, 광의의 의미에서 기호는 표현뿐 아니라 그 의미와 해석까지도 포함한 삼원적 관계로 이루어진 구조를, 협의의 의미에서는 표현만을 언급하는데 사용하였다(김성도, 1998). 여타 문헌에서 기호의 언급 또한 광의와 협의의 의미가 혼용되고 있다. 두 가지의 의미가 구분되어 사용될 필요가 있을 경우, 본 연구에서는 협의의 의미에 기호 대신 기호의 표현이라는 용어를 사용하기로 한다.

기호(sign)와 혼용되어 사용되는 용어로 상징(symbol)이 있다. 이 두 용어의 구분은 유럽과 미국의 학문적 기반에서 서로 다르게 사용되고 있는데, Peirce는 기표와 대상의 관계에 따라 기호를 도상, 지표, 상징으로 나누고 상징은 기호와 대상과의 관계가 규약에 의해 정해진 것으로 보고 있다(Trabant, 1996). 반면에 Saussure는 이것을 기호라 불렀다(Trabant, 1996). 본 연구에서는 수학 사회에서 변수 등을 나타내는 문자와, 대수에서 약정하여 사용하는 대수 기호를 상징이라 부를 것이다.

Ⅱ. 수학기호에 대한 인식론적 입장

수학기호는 종이 위에 표시되어 있는 표현일 뿐 아니라 그 표현이 지시하는 대상이 무엇인지에 대한 해석이 요구되는 역동적인 대상이다. 이러한 역동적인 체계를 이해하기 위해서 그리고 수학기호와 언어가 무엇이고 수학적 지식을 구성하는데 어떤 역할을 하는지 알아보기 위해서는, 지식이 무엇이고 어떻게 구성되는지에 대한 학문인 인식론을 고찰할 필요가 있다. 본 절에서는 Sierpinska & Lerman(1996)의 분류에 따라 Piaget, Vygotsky, 인류학, 상호작용주의에서 수학기호와 언어, 그 의미에 대해 알아보고자 한다.

1. Piaget의 입장

Piaget에 따르면 언어는 인간의 사고가 외적으로 나타난 것이다. 언어는 주관적으로 해석되는 것이기 때문에 개인 내에서 생성된 의미는 객관적이지 못하고, 따라서 언어에 근거를 둔 객관적 지식 역시 존재할 수 없다. 기호는 대상, 사건, 개념적 스키마 등 어떤 것을 표현하는 기능만을 한다(Piaget, 1977, Walkerdine, 1988, 재인용). 이 주장에 의하면 기호의 표현은 사고를 나타내는 것이지만, 기호의 의미는 기호 체계 밖에 있는 것이다. 이 관점에서 1, 2, 3, +, -와 같은 수학기호의 의미는 내면의 사고와 수학사회의 규정을 맞추려 하는 조절 과정에서 존재한다.

학생이 자신의 사고와 사회적 규약을 조절하는 과정에서 얻게 되는 의미를 교사가 전달할 수는 없다. 지식은 인지하는 주체에 의해 활동적으로 구성되는 것이지 환경에 의해 수동적으로 받아들여지는 것은 아니기 때문에 교사의 말을 통해 전달되지 않는다. 말로 전달될 수 있는 지식은 매우 가치 없는 것이며, 단순히 공식을 들어서 배우는 것은 전형적인 문제를

푸는데 적용될 수는 있지만 사고를 요하는 문제를 푸는 데는 도움이 되지 않는다. 기호의 의미는 학생에 의해 구성되어야 하는 것이다. Piaget의 인식론에서 기호의 표현과 의미는 분리되어 존재하고, 기호는 사회화를 위한 의사소통의 도구일 뿐이다.

2. Vygotsky의 입장

Piaget는 사고가 언어 이전에 존재하고 언어를 사용하여 사회화가 되는 것으로 생각했지만, Vygotsky는 언어가 사고를 만드는 것으로 보았다(Zepp, 1989). Vygotsky에 의하면, 인간의 문명은 의사소통을 통해 지식과 가치를 전달하여 성립된 것이고 언어는 문화적 도구, 특히 인간의 의사소통 도구이자 지적 발달을 유도하는 역할을 한다. 논리는 언어를 통해 발달하고, 아동은 언어를 사용하여 경험을 내면화한다. 수학에서 2+3=5와 같은 식은 복잡한 사고 과정을 단순화하는 도구가 될 수 있다.

Vygotsky는 기호를 심리적 도구라 하면서 기호의 지적이고 의사소통적인 본질을 강조하였다. 심리적 도구의 속성은 행동 과정에 포함됨으로써 정신기능의 전반적인 흐름과 구조를 변형시킨다. 즉 기호를 도입함으로써 기억과 같은 정신기능에 근본적인 변형이 일어나게 된다(Wertsch, 1985). 뿐만 아니라 심리적 도구인 기호는 본질적으로 사회적인 것이며 개인적인 것이 아니다. 여기서 기호를 사회적이라고 하는 데는 두 가지 의미가 내포되어 있는데, 언어, 다양한 계산체계, 대수의 상징 체계 등과 같은 심리적 도구가 사회문화적 진화의 산물이며, 대면적 의사소통과 같은 사회적 현상에서 역동적으로 사용된다는 점에서이다.

Vygotsky의 생각에 의해, 수학적 지식은 개인의 내부에 존재하여 외부에서 알 수 없는 것이 아니라, 객관적인 것으로서 대중에게 공표되고 사회적으로 받아들여지는 실재이다. 따라서 개인과 독립적으로 존재하는 수학적 대상의 개념을 받아들일 수 있다(Ernest, 1991, p.55, Brown, 1997, 재인용). 여기서 수학기호가 가리키고자 하는 대상은 정신 외부에서 구성될 수 있는 객관적인 실재를 갖는 것이라는 점을 알 수 있다.

3. 인류학적 입장

학습과 학습이 일어나는 상황의 관계에 초점을 둔 인류학에서는, 어떤 종류의 사회적 참여가 학습이 일어날 수 있는 적절한 맥락이 되는지를 중요시한다. 즉, 학습자가 어떤 문화에 속해 있는지, 인지적 내용은 무엇인지, 언어의 구조와 교육 제도가 어떠한지에 관심을 갖는다(Pinxten, 1994). 수학 학습은 인지적 구성과 문화화 과정 모두에 해당하며, 수학적 활동이 인지적이면서 사회적이라는 것은 여러 분석가들과, 수리 철학, 과학 철학과 사회학의 최근 이론적 발전과도 양립된다(Cobb 등, 1992). 게다가 당연시 여겨지는 수학적 실행이 사회 그룹마다 다를 수 있다는 실험 결과도 있다(예를 들어, Carraher, Carraher, & Schliemann, 1987; D'Ambrosio, 1985; Saxe, 1989, 1991a; Cobb 등, 1992, 재인용).

인류학은 언어의 구조가 화자가 속한 사회의 사고를 결정한다는 Whorf의 언어적 상대주의 가정을 따른다(Pinxten, 1994). 즉, 개인이 사회 안에서 실재를 해석하는 방법은 그 언어에 의해 결정되는 것이다(Mellin-Olsen, 1987). 수학언어는 유럽에서 발전되어 그 언어 구조를 따르는 경향이 있다. 사물과 사물에 대한 조작, 부분적 이해를 통해 전체를 이해해 간다는 기본적인 언어구조의 틀은 동사와 명사의 이분법

뿐 아니라 수학적 추론에서도 나타난다. 단순한 예로, 집합은 원소를 갖고 있고, 도형은 점, 선, 면으로 이루어져 있다. 이와 다른 언어 구조를 갖고 있는 사람이 이러한 수학언어를 학습하는 것은 어려운 일이다.

Pinxten(1994)은 어린 아동의 수학적 아이디어의 발달에 대한 시사점을 토론하면서, 성공적인 학습이 일어날 수 있기 위해서 아동의 세계관이 수학 언어에 포함된 세계관과 연결되어야 한다고 하였다. 학습이 문화와 관련되어 있고 그 문화 속에서 언어가 지대한 영향을 미친다고 할 때, 수학 학습에서 언어에 대한 관심은 마땅하며 언어의 역할이 자각되어야 한다.

4. 상호작용주의 입장

Piaget는 학습을 인지 발달 단계와 상황에 따른 개인적 변화로 생각하며, Vygotsky는 학습을 적당한 매개수단이나 표현 수단이 뒷받침된 기존 사회 구조로의 문화화로 보고 있다(Sierpinska, 1998). 이 두 심리학자의 이론을 연결하려는 수학 교육자들은 수업에서의 의사소통과 언어적 행동이 무엇인지에 관심을 가진다. 이들은 교사와 학생이 상호작용하면서 교실 문화, 학습 주제와 사회적 규제에 대한 규약을 구성한다고 본다(Bauersfeld, 1994).

이러한 연구들은 Bruner의 언어 획득 이론, Wittgenstein의 연구에서 출발했으며, 상호작용주의(interactionism)라 불린다. 상호작용주의에 기반이 되는 인식론은 지식의 타당성의 원천을 객관적 세상에 대한 관찰(경험주의)이나 선천적인 이성(합리주의) 또는 일련의 발달 단계를 거쳐 구성되는 정신의 논리 수학적 구조(급진적 구성주의)에 두지 않고, 사회적 관행인 담화(discourse)에 사용되는 언어에 둔다(Sierpinska, 1998). 여기서 언어는 인지적, 사회적, 그리고 여하의 결과를 성취하기 위한 수단으로서의 언어, 또는 행위로서의 언어 모두를 뜻한다.

상호작용주의에 따르면 언어는 단순한 의사소통의 도구도, 지적 성장을 위한 요소도 아니다. 실제로 인간은 말을 하는 것이 아니라 언어화(languaging)하고 있는 것이다(Sierpinska, 1998). 우리의 생각은 말하고 있는 언어와 교환될 수 있으며, 언어화는 사고를 의사소통하는 것이 아니라 생활의 양식이다. 지식은 교실, 학교 제도, 크게는 사회의 문화에서 공유된 담화의 실행으로부터 등장한다. 더 가치 있는 수학을 배울 수 있는 교실 문화를 만들기 위해, 문화적이고 사회적 과정이 수학적 활동에 통합되어야 하고 교사는 이것을 촉진해야 하는 역할을 해야 하며, 동시에 아동이 자발적으로 학습에 참여해야 한다.

개념의 의미는 정확한 수학적 정의가 아니라 오히려 담화 활동에 참여할 때 발달한다(Dörfler, 2000). 학습의 목적은 암묵적이고 명확한 규칙, 기준, 규약에 따라 담화에 참여하는 능력을 신장하는 것이다. 이렇게 볼 때, 학습자는 수학 담화에 참여하는 것 즉, 수학 용어에 대한 의미를 발전시키는 잠재적인 경험이 필요하며, 담화 활동과 수학적 의미 사이의 역동적 상호작용을 고려할 필요가 있다. 상호작용주의에서 기호의 의미는 담화 내에서 학습자간의 상호작용에서 등장한다.

지금까지 인식론적 관점에서 살펴본 수학기호와 의미에 대한 생각은 다음과 같이 정리될 수 있다. Piaget는 기호의 의미가 언어에 의해 전달될 수 없다고 하면서 기호의 의미를 이해하기 위한 학습자의 자율성과 조절 과정을 강조하였다. Vygotsky는 의미의 발전에 영향을 주는 상호작용 도구로서 기호의 의사소통과 지적 기능을 강조하고, 수학기호의 대상이 객관적인

실재로서 존재할 수 있음을 시사하였다. 인류학적 접근은 언어의 구조가 사회 구성원의 사고를 결정하며, 서로 다른 틀을 가진 일상언어와 수학언어를 학습할 때 추상적인 형식의 수학언어 학습과 일상언어의 갭을 메우기 위한 과정이 설계되어야 함을 시사한다. 상호작용주의는 상호작용에서 이루어지는 담화의 중요성을 강조하면서 기호의 발명이나 탐구 과정을 기호와 의미의 역동적 구성으로 설명한다. 본 연구는 이러한 시사점들을 기호와 의미에 대한 고찰을 하기 위한 기초로 삼고, 인식론적 관점 어느 한 가지에 의존하기보다는 각 인식론의 특징을 절충하여 논의를 진행하고자 한다.

III. 수학기호의 인식론적 모델

1. 기호와 의미의 관계

기호의 의미가 무엇인가에 대한 논의는 역사적으로 수세기 동안 논의되어 왔다. 기호를 보는 관점은 객관주의와 해석주의로 크게 나뉠 수 있다(Yackel, 2000). 음악의 악보에 비유하면, 작곡가가 쓴 악보에 모든 의미가 포함되어 있으며 같은 악보를 연주한다면 그 음악은 동일할 것이라 생각하는 것이 객관주의이다. 악보라는 기호의 해석은 객관적이어야 하며, 따라서 악보를 보고 연주를 하는 음악가의 개성은 고려되지 않는다. 이 관점에서 수학기호의 대상은 추상적이자 현실적인 존재이고, 수학적 실재에 대한 객관적 진리를 추구한다. 해석주의는 동일한 악보라 하더라도 연주자의 주관적인 해석에 따라 연주가 달라진다고 본다. 동일한 대상을 가리키는 수학적 대상이라 할지라도 해석하는 사람의 입장에서 다른 기표가 사용될 수 있고, 동일한 대상의 동일한 표현을 보고도 학습자는 다른 해석을 할 수 있다. 이런 해석주의 입장을 따라 기호의 의미를 살펴보는 것이 본 연구의 바탕이다.

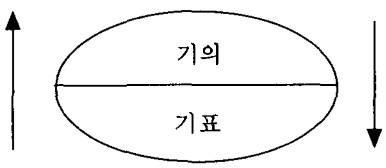
본 연구와 같은 시각으로 20C 초반부터 학문적 자리 매김을 시작한 기호학은 기호와 참조물의 구별에 대해 의문을 갖고 의미의 구성, 특히 수학적 대상에 대한 이슈를 재개념화 하였다. 독립된 실재로 인식되었던 기호의 표현과 그 의미가 분리될 수 없는 통합체라고 보는 관점은 기호학의 창시자들인 Saussure와 Peirce, 그리고 Vygotsky의 연구에 의해 시작되었다. 기호와 의미의 전통적인 이중적 관점의 거부는 Saussure의 용어에서 나타나는데, 그는 기호를 기의(signified, 시니피에)와 기표(signifier, 시니피앙)가 동전의 양면처럼 분리될 수 없이 통일되어 있는 것으로 정의한다. Vygotsky도 물의 은유를 사용해서, "산소와 수소의 성질을 단지 연구함으로써 물의 성질을 아는 것이 불가능한 것처럼, 기표로부터 기의를 떼어놓고 각각을 조사하여 인간의 개념적 사고를 이해하는 것은 불가능하다"고 하였다(Vygotsky, 1987, p.45; Sfard, 2000, 재인용). 기호의 표현과 의미 사이의 관계를 이렇게 재개념화 하는 것은 의미가 어떻게 생산되는지에 대한 메커니즘을 재고하게 한다. 기의를 기표와 독립적으로 생각할 수 없다는 주장은 기호 이전에 의미가 있다는 기존의 객관주의 신념이 유지될 수 없게 한다.

Peirce도 의미를 기호의 복잡한 상호작용에서 나오는 것으로 생각하였는데, 의미작용(signification)과 구성은 어떤 대상체(object)의 표현인 표현체(representamen)를 해석체(interpretant)가 해석하는 것이며, 이때 해석체는 다른 것의 표현체가 되는 과정을 겪는다. Saussure는 기호가 기표와 기의로 이루어진 이원적 구조를 가진 것으로 생각한 반면, Peirce는 대상체, 표현체, 해석체의 삼원적 구조를 가진 것으로 보았다.

각각의 기호 모델에 대해 더 자세히 알아보기로 한다.

2. 이원론적 모델

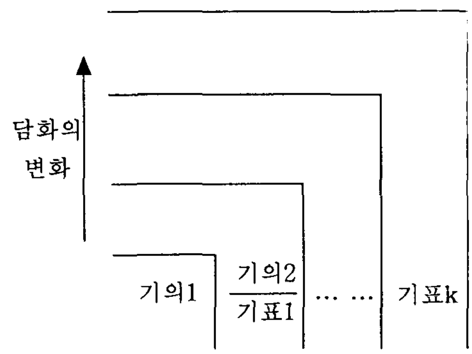
Saussure에 의하면, 기호는 사물과 명칭의 결합이 아니라 개념과 청각영상의 결합으로 이루어진다(김치수 등, 1998). 여기서 개념은 기의, 청각영상은 기표란 용어로 현재 사용되고 있다. 기호는 어떤 것(개념이나 지시 대상)을 보증하는 것이 아니고 동전의 양면처럼 서로 나뉘어질 수 없는 기표와 기의의 단위이다. 이때 기표와 기의는 모두 심적인 실재이며 두뇌 속에서 연상작용을 통해 결합된다. 이 연상작용은 기표가 주어졌을 때 그에 상응하는 기의를 상기시키고 마찬가지로 하나의 기의가 주어졌을 때 기표를 불러낸다. 이때 기표는 바깥에 있는 의미를 운반하거나 지칭하는 형식이 아니라 마음속에 새겨진 소리 자극이며, 기의는 청각적 지각과 연결되지 않은 좀더 추상적인 것이다. 다시 말하면, Saussure에게 기호는 기표와 기의의 양면성을 지닌 양가적인 것이고 따라서 지시체인 대상을 배제한다. 이에 대한 Saussure의 기호 모델은 <그림 1>과 같다.



<그림 1> Saussurre의 기호 모델(Trabant, 1996)

Saussure의 기호 모델에서 기호는 기표와 기의의 관계에 의해서 성립되지만, 프랑스의 심리학자 Lacan은 기표와 기의를 분리시키는 경계선을 기본적인 요소로 하여, 기호가 계속해서 다른 기호를 의미하는 과정을 의미작용의 고리에 의해 설명한다. 기표는 더 이상 기의를 표상하는 기능을 갖지 않으며, 기호의 주체를 또다른 기표로 대신할 뿐이다. 예를 들어 이차함수 기본형의 기표인 상징 x^2은 포물선의 기의로 보여진다. 반대로 포물선은 "기본적인 이차곡선"이란 표현의 기의가 될 수 있다. 이 의미작용의 고리는 Hall(2000)에 의해 일상의 상황에서 나타난 수학과 추상적인 수학의 갭을 연결하는 수학 교수 모델로 사용된 바 있다.

<그림 2>에 따르면, 첫 번째 기호 조합에서 기표(기표1)는 두 번째 기호 조합에서 기의(기의2)가 되며, 이 고리는 계속된다.



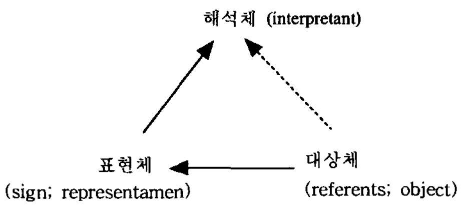
<그림 2> Lacan의 모델에 기초한 일반적인 의미작용 고리(Hall, 2000)

기호가 기의와 기표를 가진 이원적 모델을 갖는다는 생각은 Nemirovsky와 Monk(2000)의 교수 실험에서도 수학기호(기표)와 수학기호가 나타내는 것(기의)을 구분하지 않는 아동의 말, 행동, 제스처의 융합(fusion)을 통해서 보여졌다. 이원론적 모델은 기표와 기의의 이중성을 가진 기호의 정적인 상태를 설명할 수 있고, 어떤 기호의 기표에 해당하는 것이 다른 기호의 기의가 되어 가는 의미작용을 통해 동적인 과정을 묘사할 수 있다.

3. 삼원론적 모델

철학적 전통을 가진 대부분의 기호학은 기호가 다른 사물을 보증하는 것이라는 이론이 거의 배제될 수 없다는 생각에 일치된 견해를 갖는다. 아리스토텔레스 이래로 언어기호는 실재에서 특정한 사물을 직접 보증하는 것이 아닌 것으로, "인식의 내용"(Aristotle), "관념"(Locke), "표상"(Hegel), "개념"(Saussure), "해석체" (Peirce), "지시"(Ogden-Richards), "내포"(Carnap), "모사체"(Klaus)와 연결되어 왔고, 때로는 이를 넘어 실재에서 특정한 사물과 관련될 수 있다는 견해가 거의 모든 기호 이론가들에 의해 대표되었다(Trabant, 1996). 즉, 기호가 대신하는 어떤 것이 존재하고 그 의미가 해석되어야 한다.

Peirce에게 기호는 청각영상과 개념의 단위가 아니라 <그림 3>과 같이 대상체, 표현체, 해석체의 삼원적인 요소를 가진 것이다. Peirce는 기호가 코드화된 단위가 아니라 시간의 상태이며 중단 없는 지식의 획득 과정이라고 했다(김성도, 1998). 기호는 표현체와 대상체의 지시 관계가 어떤 해석체에 의해 해석될 때 존재한다. Peirce가 강조하는 기호의 특성은 표현체, 대상체, 해석체의 공조를 포괄한 기호 작용인 세미오시스로, 기호의 역동성에 있다.



<그림 3> Peirce의 기호 모델(Trabant, 1996)

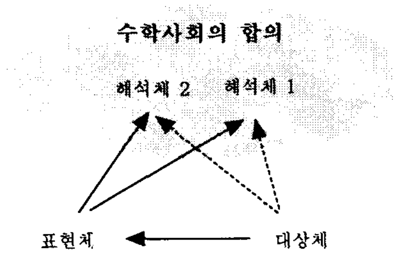
Peirce의 기호모델은 Saussurre의 이중적인 기호 모델의 기의에서 대상체와 해석체를 구분한다. 기호를 이해할 때 대상체와 해석체를 구분하기 어려운 경우가 있으며, 때로는 이 두 가지가 동일할 수도 있다. 이것이 <그림 3>에서 대상체와 해석체의 연결이 점선인 이유다. 본 연구에서는 Vygotsky의 생각에 의해, 수학적 대상을 나타내는 객관적 실재가 있다고 보고 그것을 기호의 대상체로 생각한다. 그리고 Piaget의 생각에 의해, 해석체는 인간의 주관적인 기호 해석으로 볼 것이다. 기호는 대상체에 대한 표현체가 존재하고, 그에 대한 해석이 이루어지며, 이 과정은 <그림 3>에서 화살표로 나타내어져 있다. <그림 3>의 화살표 방향은 대상체를 나타내는 표현체를 해석체가 해석하는 것으로, 이미 존재하는 기호의 해석인 해석화에 해당한다. 새로운 기호의 창조는 대상체를 해석하여 표현체로 나타내는 기호화에 해당한다.

즉, <그림 3>의 화살표 방향을 바꾸어 대상체→해석체→표현체로 나아간다면 기호화가 된다. 기호의 표현과 의미가 함께 구성되는 것은 이러한 해석화와 기호화의 지속적인 작용에 의한 것이다.

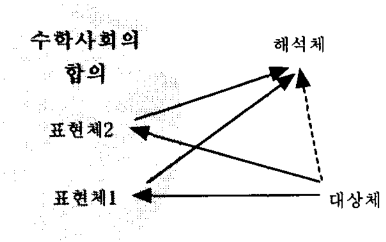
기호의 표현과 대상의 관계를 기술하는 데에는 해석체가 가장 중요하다. 기호의 기능을 파악하고 서술하고 추론하는 일이 의미의 생산과정이 될 수 있으며, Peirce는 Vygotsky의 생각과 유사하게 기호의 해석을 통해서 의사소통과 지식의 성장을 설명한다. 그는 Saussure와 달리 심리적 양상이 아니라 사고과정의 논리에 관심을 두었고, 기호는 지식을 의사소통하기 위한 유일한 수단으로 보았으며, 기호를 해석하는 추론으로 연역, 귀납 뿐 아니라 가추의 논리를 제시하였다. 기호 사용의 주체에 따라 기표와 기의의 연합이 다를 수 있지만, 기호 활동은 항상 기호와 대상 둘 다의 변화를 포함하고, 그에 따른 해석이 이루어진다.

기호의 해석이 사회구성원에 따라 다를 수 있다는 것은 사회적 합의가 필요한 수학 사회

에서 협상을 필요로 한다. <그림 4>는 주관적인 기호 해석이 협상을 통해 규약기호와 통일되어야 한다는 것을 보여준다. 하나의 표현체가 개인과 상황에 따라 다르게 해석하는 경우, 사회적 합의를 통해 의미가 합일될 수 있을 것이다. <그림 5>와 같이 기호화의 과정에서 생각해 본다면, 대상체에 대한 주관적인 해석을 수학사회의 합의가 될 수 있는 표현으로 만드는 것이 상호작용에서 일어날 것이다.



<그림 4> 해석화에서 해석체의 상호작용



<그림 5> 기호화에서 표현체의 상호작용

본 연구는 앞서의 네 가지 인식론적 입장에서 얻은 시사점으로 기호의 인식론적 의미 구성을 알아보고자 하였다. 기호는 그 의미가 기호의 표현과 분리하여 존재하지 않으나 수학기호의 의미 구성은 학습자의 내적인 조절과정을 거친다. 이는 Piaget에 의해 기호의 삼원적 요소가 개인의 정신 내에서 역동적 과정을 겪는 것으로 설명될 수 있다. 그리고 수학기호가 가리키는 대상은 객관적으로 사회적 합의가 이끌어질 수 있는 사실, 성질, 개념, 대상이며 이는 Vygotsky에 의해 알려진 바이다. 또한 수학기호와 의미의 해석은 수학기호체계의 구조에 의해 결정될 수 있으며, 이는 인류학에서 기호와 의미의 해석이 수학언어의 구조에서 결정된다는 점에 의존한다. 그러나 본 연구에서는 기호 각각에 주로 초점을 두었기 때문에 기호체계를 인류학적으로 검토하지는 않는다. 개인의 주관적인 의미의 구성이 사회적 합의에 이르는 상호작용의 담화가 수학기호 학습에 필요하다. 이는 상호작용주의에 의해 수학기호의 의미는 담화를 통한 상호작용에서 등장한다는 것에 따른 것이다. 이렇게 해서, 본 연구는 기호를 <그림 4>와 <그림 5>와 같은 삼원론적 모델을 가진 개념에서 생각하며, 기호의 의미는 해석체의 차원에서 언급될 수 있는 것으로 본다.

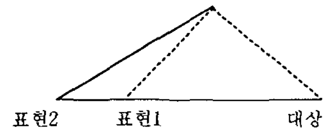
4. 수학 학습 과정에서 기호의 이해

수학학습에서 수학기호는 수학적 개념을 대상으로 학습자의 해석이 이루어지는 표현이다. 수학적 실재, 성질, 관계, 과정, 행동, 구조를 뜻하는 대상에 대해 수학 사회에서 약정한 표기로 발전하면서 그 의미가 해석되고 사용규칙이 약정되어야 한다. Sierpinska(1994)는 의미가 있는 것은 모두 기호라고 하면서, 개념은 기표의 의미가 아니라 의미를 갖는 것이라고 말한다. 수학기호는 학습자와 교사의 마음속에 기의와 기표로서 존재하는 실재이기보다는, 객관적인 수학적 개념이나 연산을 뜻하는 대상이 표현된 것을 인간이 자발적으로 해석하는 역동적인 과정이 포함되어 있다.

수학 기호는 상징, 일상언어, 시각적 표현을 포함한다. 일반적으로 수학은 시각적인 텍스트에 의한 시각적 추론이 연역적인 논리보다 열등한 것으로 취급하는 경향이 있으나, Duval (1998)에 의하면 시각화와 논리적 추론은 인지

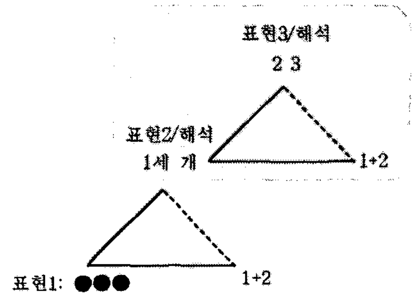
적 경로가 다르고 위계적인 층위를 둘 수 없다. 그러나 상징과 일상언어에서는 위계가 존재하는데, Freudenthal(1978)은 지시적 언어를 사용하는 구체적 언어, 상대적인 관계를 사용하는 언어, 문자를 사용하는 규약적인 변수 언어, 변환 등을 사용하여 나타내는 함수적 언어 수준으로 수학 언어를 나누어, 상징보다 일상언어가 더 낮은 수준의 언어라고 여겼다. 하지만 각각의 기호는 다른 기호에 의해 대신된다고 해서 정확한 의미가 모방될 수는 없다(Lemke, 1998, O'Halloran, 1999, 재인용). 이는 텍스트에서 각각 담당한 역할과 기능이 다르기 때문이다.

수학 기호의 이해는 기호화와 해석화로 이루어진다. 수학 기호 표현의 이해는 기호화로, 다른 기호의 표현을 통해 번역되어 이해된다. 상징으로 표현된 함수를 수학 용어로 풀이하고, 그래프로 나타내는 번역을 함으로써 학습자는 여러 다른 해석을 할 수 있는 기회를 얻게 되고 개념에 대한 의미를 더 풍부히 한다. 이러한 표현체의 역동적 과정을 삼원적 모델로 나타내어 보면 <그림 6>과 같다. 수학 개념을 표현하는 표현1이 있다. 그러나 학생들은 표현1의 해석이 쉽지 않으며 개념과 연결할 수 없다. 이때 표현1과 isomorphic한 표현2로 번역한다면 기호의 의미는 이해하기 쉬워지고 이렇게 해서 수학 학습 과정에 역동적인 표현간의 번역이 일어난다.



<그림 6> 수학기호 표현의 번역

기호의 표현에 따라 기호의 의미(해석)도 학습 과정에서 성장하며, 이것은 해석화에 해당한다. 객관적인 수학적 대상에 대한 의미의 이해는 표현의 발전과 더불어 표현과 의미의 상호작용을 통해 연속적으로 이루어진다. 예를 들어, <그림 7>과 같이 1+2를 구하고자 할 때, 구슬을 이용하여 상황을 표현해 보고, 이것을 '세 개'라고 해석한 것은 다시 구슬의 표현이 되며, 이것의 해석은 더 높은 수준의 기호 표현인 상징 '3'이 될 수 있다. 학습 과정에서 기호의 이해는 기호의 표현과 해석의 의미작용에 의한 역동적 과정을 거친다.



<그림 7> 1+2가 3이 되는 과정

요약하면, 수학기호의 이해는 기호의 표현과 의미의 이해라 할 수 있다. 수학기호의 표현은 시각적 표현, 일상언어, 수학용어와 상징이 있으며, 각 표현간의 번역을 통하여 기호의 의미 또한 성장한다. <그림 7>에서 보듯이 의미가 성장하면서 수학적 지식은 추상적으로 발전하고 그에 따른 표현 또한 발전할 수 있다.

Ⅳ. 수학기호의 도입 방법

수학기호가 객관적인 수학적 대상의 표현과 해석으로 이루어져 있고 표현의 발전과 의미의 성장이 상호작용한다는 관점에서, 학습 과정에 수학기호를 어떻게 도입할 것인지에 대해서는 크게 두 가지 접근 방식이 존재한다. 첫 번째

는 표현적 접근으로 규약된 기호를 일단 도입한 후 그 의미를 채우는 방식이며, 두 번째는 탐구적 접근으로 학생들이 기호를 발명하여 사용하고 그 후에 규약적 기호를 서로 협상하는 방식이다. 두 가지 접근 모두 수학기호의 학습 결과가 수학 사회에서 규약된 기호를 사용하고 그 의미를 파악하는 것이라는데 목표를 두며, 각각 해석화와 기호화를 강조한 것이라 볼 수 있다. 본 장에서는 두 가지 접근 방식이 기호 지도에 어떻게 적용될 수 있는지 그 가능성을 탐색해본다.

1. 표현적 접근

기표와 기의가 서로 구성된다는 Saussure의 입장에서, Sfard(2000)는 기호가 항상 이미 정의된 개념을 기록하는 수단으로 발전하지는 않는다고 주장하였고, 의미가 기호 사용 이전에 반드시 나올 필요는 없다고 하였다. 이는 수학사에서 함수와 복소수 개념의 역사적 발달을 예로 들 수 있다. 함수는 Bernoulli, Euler, Fourier, Diriclet, Bourbaki의 학자들에 연구에 힘입어 그 정의가 계속 변해왔고, 함수의 의미가 명확하게 구성되기 전에 함수라는 기호가 사용되면서 의미가 더 발전할 수 있었다.

수학교과서에서도 이러한 표현적 방법의 접근을 따라 기호를 도입한 예가 있다. 그 중에서 '계수'의 용어 도입을 소개해 본다.

수학 7-가 교과서(강행고 등, 2001)에서는 항, 상수항, 다항식, 단항식의 용어를 도입한 후, 계수라는 기호를 다음과 같이 제시한다.

> 또 $2x$와 같이 수 2와 문자 x의 곱으로 이루어진 항에서, 수 2를 문자 x의 계수라고 한다.
> (보기) 다항식 $5x-7$에서 항은 $5x$, -7이고, 상수항은 -7이다. 또, 항 $5x$에서 x의 계수는 5이다.
> 문제1. 다음 다항식에서 문자가 들어있는 항의 계수를 말하여라.

교과서에서는 계수라는 기호의 의미를 풍부히 하기 전에 표현을 사용하였다. 그리고 나서 계수의 의미를 알 수 있는 보기와 문제를 제시하였으며, 계수가 정작 중요하게 사용되는 동류항 개념은 나중에 등장하며 그때서야 의미가 채워진다.

이러한 기호의 지도 방법은 Sfard(2000)에 의해 지지되고 있다. 그는 기호화 과정은 의미없이 기표가 사용되는 형판-유도(template-driven) 단계와 기호의 대상이 중재되는 대상-중재(object-mediation) 단계로 이루어진다고 보았다. 기호가 처음 도입되어 사용될 때는 기호가 사용되는 형판에 따라 의미가 없이도 사용될 수 있다. 여기서 형판은 기호가 사용되는 문장의 틀로서, 의미가 없이도 기호를 말하고 쓸 수 있게 한다. 예를 들어 우리가 f(x)라는 기호를 사용할 때 그 의미는 알지 못한다 해도, 맥락상 그것이 기하에 해당되는 문장의 한 단어로 쓰이지 않는다는 것을 알 수 있다. 그리고 $x=1$일 때, $f(x)=5$라고 형판에서 말할 수 있다. 수학 학습에서 학생들은 기표가 어떤 것을 대표한다고 생각하기 전에도 어려움 없이 기호를 효과적으로 사용하고 의사소통할 수 있다. 그러나 이 단계는 기호를 왜 사용해야 하는지 깨닫지 못한 채 사용만 하고 있는 것이며, 기호가 어떤 다른 것을 대표하고 있는 것으로 여겨지지 않는다. Skemp의 도구적 이해에 해당한다고 볼 수도 있다.

그 다음, 의미론적으로 중재된 대상이 등장하게 된다. 예를 들어, $2x-3=3x-7$이란 방정식의 해를 구할 때, $y=2x-3$과 $y=3x-7$의 그래프를 생각하고 그 교점을 구하여 '아마 x가 4나 5인 점에서 만날 거예요'라고 답하는 것은 대상이 중재된 단계에서 행해지는 활동이다. Sfard(2000)는 기호가 의미를 갖는 의미론적 공간을 채울 수 있는 대상-중재 단계의 몇 가

지 특성에 대하여 다음과 같이 언급하고 있다.

첫째, 기호 사용에 있어 유연성과 일반성을 갖는다. 예를 들어, 피아노를 기계적으로 사용하는 것과 음악 지식에 기초하여 사용하는 것을 비교한다면, 음악 교육을 받지 못했지만 멜로디를 연주하기 위해 필요한 건반을 암기한 사람은 이 멜로디를 반복할 수 있고 즐길 수조차 있지만, 새로운 멜로디를 연주할 수는 없다. 멜로디를 구성할 수 있는 악상에 맞는 건반을 찾고, 멜로디의 구성원리를 이해하고, 기본적인 소리가 만들어질 수 있는 방법을 아는 사람은 전에 연주해보지 않았던 멜로디도 만들고 적어도 건반에서 찾을 수 있다. 참신한 사용을 창조하는 능력은 종종 의미와 이해의 기준으로 여겨질 수도 있다. Rotman(1994, Sfard, 2000, 재인용)이 말한 대로, 의미를 구성하는 것은 새로운 경우로의 움직임이며, 라벨(기표)에 이어서 나온 사용이다.

둘째, 기호가 표현의 기능을 시작한다. 대상-중재 단계에서 기호는 또다른 실재의 표현으로 역할이 변화된다. 교사는 가끔 별 생각 없이 기호 x^2이나 포물선을 가리키면서 '이것이 이차 함수'라고 말한다. 그러나 '이것은 이차 함수의 표현(그래프)이다' 또는 '이차함수를 표현한다'라고 말해야 옳다.

셋째, 기호가 다른 기호로 번역되어 사용될 수 있다. 예를 들어, 1과 1/2을 사용하여 문장을 만들어보라고 했을 때, 한 학생이 다음과 같이 대답했다: "엄마는 나에게 사과 한 개 반을 주었다." 1과 1/2을 사용하라는 명확한 요구에도 불구하고, 문장에서는 나타나지 않는다. 이 학생은 단어를 보지 않고 이 단어가 나타내는 대상을 보았고, 모르는 사이에 같은 실재를 표현하면서 더 쉽게 적용할 수 있는 다른 것으로 번역한 것이다. 이렇게 수학기호가 일상언어의 기호로 번역된다.

넷째, 표현을 경제적으로 할 수 있다. 대상 중재의 결과, 담화의 효율성에 있어 실질적인 이득은 하나의 기표로 많은 것을 말할 수 있다는 것이다. 기호의 표현 역할만을 본다면, 주어진 기호(예를 들어, 선분 AB)는 동치인 다른 기호(예를 들어, $\overline{AB}$)로 경제적으로 교환될 수 있고, 이렇게 해서 기표 각각에 대해 지금까지 두 번 말했던 것이 한 번만 말해질 수도 있다.

다섯째, 대상-중재 단계에서 기호의 사용은 대상을 추상적으로 경험할 수 있게 한다. 추상적인 대상의 이미지를 갖고 기호를 생각할 수 있게 된다.

기표 이후에 의미가 등장하는 기호의 전 과정은 펌프의 메커니즘으로 묘사될 수 있다 (Sfard, 2000). 기호의 도입은 새로운 의미공간을 창조한다는 점에서 피스톤을 들어올리는 것과 같다. 이 단계는 새로운 기호의 도입에 의해 의미론적 공간을 창조하는 형판-유도의 단계로 기호는 의미 없이도 사용될 수 있다. 새로운 기호가 생명을 얻고 통합된 기표-기의가 한 단위가 되는 대상 중재의 점진적 등장은 피스톤의 공간을 채우는 과정과 유사하다. 새로운 대상을 갈구하는 공간을 지속적으로 조금씩 창조하면서 수학 담화에 참여하는 것은 학습 과정을 확장시킨다. 이렇게 구성된 과정은 기호의 의미가 대상이 중재된 단계에 이르러야 완성되는 것이며, 이 해석화의 과정은 다시 순환되어 의미와 기호가 서로를 구성하게 된다.

2. 탐구적 접근

탐구적 접근은 학생들이 스스로 기호를 발명하여 사용하고 그 후에 규약적인 기호를 서로 협상하는 교수접근으로, 학생들이 자신의 기호화 방법을 개발하고 수정하면서 의미가 성장할 수 있다고 본다. 학습자가 일단 기호를 발명하

고 사용하되 규약적 기호에 이르기 위해 교사는 안내 역할을 담당해야 한다.

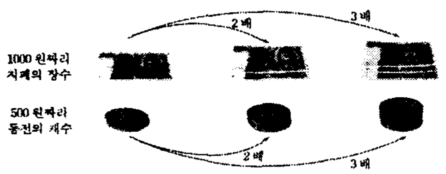
수학 7-가(강행고 등, 2001)에서 탐구적 접근에 따라 '정비례'를 도입한 경우를 살펴본다. 먼저 탐구활동으로 다음의 과제가 주어진다.

> 탐구활동: 동호는 1000원짜리 지폐를 500원짜리 동전 2개로 교환해주는 동전교환기에서 10000원짜리 지폐를 500원짜리 동전으로 교환하려 하고 있다.

과제를 해결하기 위해 1000원짜리 지폐와 500원짜리 동전의 개수를 표로 만들어야 한다. 표를 만드는 것은 두 수량 사이의 모델이 되며, 표를 시각적 표현에 해당하는 수학 기호로 본다면 수평적 수학화가 진행되는 것이다.

1000원짜리 지폐(장)	1	2	3	…	10
500원짜리 동전(개)					

표를 완성한 후 1000원짜리 지폐의 장수가 2배, 3배, 4배, ...10배로 됨에 따라 500원짜리 동전이 개수는 몇 배로 변화되는지를 알아본다.

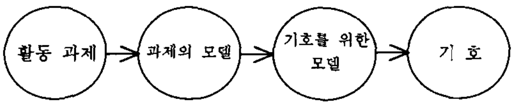


<그림 8> 표에서 찾은 비례 관계

<그림 8>은 이제 정비례라는 새로운 용어를 위한 모델로 사용되고 있다. 여기서 관찰한 내용은 다음과 같이 정리된다.

> 변화하는 두 양 x, y에서 x의 값이 2배, 3배, 4배, …로 될 때 y는 x에 정비례한다고 한다.

정비례라는 용어의 도입은 <그림 9>와 같은 과정을 거쳤다. 탐구 활동을 통한 과제가 제시가 되고, 그 과제의 모델인 표를 사용하여 수학적 표현을 사용한 수평적 수학화가 이루어졌고, 다시 정비례라는 기호를 위한 모델로 표의 내용을 관찰하고, 그 내용을 정리하여 정비례라는 기호가 도입되었다. 정비례라는 용어는 그 의미가 풍부해진 후에야 기표로서 등장한다. 그 과정에서 학생들이 직접 표를 만들고, <그림 8>과 같은 표현을 사용하게 하는 것은 교사가 안내해야 할 역할이다.



<그림 9> 수학기호의 기호화 과정

이러한 탐구적 방법은 RME의 연구 방향과 유사하며, 그 예로 Gravemeijer 등(2000)의 실험 연구가 있다. 그들의 실험에서도 <그림 9>와 같이, 학습자 자신의 모델로 시작하여 학습 과정을 창조하면서 결국 사회적 협상을 통해 교사와 학생이 공동으로 규약적으로 받아들여진 표기가 얻어지는 과정이 있었다. 그들은 1학년 학생들이 20보다 작은 수를 계산하기 위해, 구슬로 묶음을 만들고 이층버스에 탄 사람 수를 그 묶음에서 어떻게 나타내는지, 5나 10 또는 어떤 수의 배수를 단위로 계산하고, 자신이 그 묶음에 나타낸 것을 반성하는 과정을 분석하였다. 교수 실험에서 처음에 묶음을 사용하는 것은 이층 버스 활동 과제의 모델이 되며, 이때 모델은 활동과제를 참조한 수평적 수학화에 대응한다. 여기서 일상언어로 사용하여 아이디어를 포착하고 이 묶음이 수의 상징을 위한 모델로서 상징의 표현으로 거듭나는 것은 수직적 수학화와 관련된다. 묶음의 과정을 숫자 상징으로 나타내어 수학적 표현이 발전하고 초기 활동 과제의 의미 또한 추상적으로 성장했다.

<그림 9>에서 수학기호의 도입을 위해, 특정한 환경의 활동에서 기존에 알고 있는 기표를

사용하고, 그 기표를 새로운 상징의 의미로 받아들이는 것은 기호와 의미의 역동적 과정을 보여준다. 이층버스의 승객을 구슬의 묶음으로, 구슬의 묶음을 일상언어로, 다시 상징으로 표현하는 과정에서 기호와 의미 모두가 상호 발전하였다. 이 과정에서 학생들의 자발적인 대안의 기호 체계 발명을 통해 규약적인 수학기호가 유도되었다. 규약적 기호화는 수학적 아이디어를 의사소통하는 문화적으로 받아들여진 방법을 확립하는 것이며, 새롭게 발명된 기호는 새로운 아이디어와 이해를 개발하려 할 때 생겨난다. 발명된 기호의 의미는 처음에 등장한 환경과 활동에 연결되고 나중에, 이 연결이 점점 배경이 되면서 새로운 기호가 환경에서 분리되어 해석되고, 결국 기호의 학습 과정은 더 넓은 수학 활동의 맥락 내에서 의미를 발달시키는 수학화의 과정이다. 이 과정에서 학생들은, 교사가 학생들의 활동에 알맞은 기호의 규약적 방법을 소개하고 기호의 발달을 지지하는 것을 단지 모방해서는 안 된다. 학습자는 자신의 목적에 적용할 수 있는 자원으로 교사의 기호 표기 방법을 보고, 독자적으로 기호를 추론하고, 동료와 함께 규약적인 기호의 사용에 대한 협상을 해 나간다.

V. 결론 및 제언

수학을 이해하고 아이디어를 표현하기 위해 사용하는 수학기호는, 본 연구에서 객관적인 수학적 대상을 가지고 학습자의 해석이 이루어지는 표현으로 정의되었다. 이렇게 기호를 정의할 수 있었던 것은 Piaget, Vygotsky, 인류학, 상호작용주의의 인식론적 기반 위에서 시사점을 얻은 덕분이다. 본 연구는 역동적인 조직 구조를 가진 수학기호가 수학 학습 과정에서 어떻게 발전하는지 Peirce의 기호 모델을 토대로 알아보았으며, 이러한 수학기호의 지도방법에 대하여 표현적 접근과 탐구적 접근으로 고찰하였다. 두 가지 접근 방법을 통일시키지 않은 것은 학습 내용에 따라 두 접근이 모두 유용할 수 있으므로 절충적인 방법을 모색할 필요가 없다고 보았기 때문이다. 조영미(2001)의 수학교과서 분석에서 수학 기호의 정의는 1200개 이상이 존재하며, 주어진 시간 동안 학습해야 할 모든 기호를 탐구적으로 접근하는 것은 무리이다. Sfard(2000)의 교수학적 접근에서는 표현적 접근이 기호의 의미를 이해하는데 충분한 방법이라는 것을 보여주었다.

기호에 대한 학문인 기호학은 기호의 대상체(참조물), 표현체(기표), 해석체(의미)의 관계에서 어디에 초점을 두었는지에 따라 구문론, 의미론, 화용론으로 학문적 발전이 이루어졌다. 이를 수학기호에 대응시켜 보면, 구문론은 수학기호가 만들어지고 사용되는 규칙과 관련된 분야이고, 의미론은 수학기호가 뜻하는 바가 무엇이고 그 의미가 어떻게 구성되는지에 관련되어 있으며, 화용론은 기호를 사용하는 주체의 의도와 화자와 청자, 독자와 저자 사이에서 기호 사용에 관한 분야이다. 본 연구는 수학기호와 그 의미에 대한 고찰을 기호의 해석체에 초점을 두고 기호 표현과 의미의 공동성장 과정을 담화의 맥락 내에서 찾아야 한다고 하였다. 즉, 기호와 의미에 관련된 의미론에 편중하여 기호에 대한 고찰을 하였다.

그러나 수학기호의 표현체 사이의 관계에 더 초점을 맞춘다면, 수학기호의 구문론을 살펴볼 수 있다. 인류학적 접근에서 언어의 구조에 해당하는 구문론이 사고를 형성하는 틀이 된다는 점을 상기한다면 앞으로 이런 방향에서 기호에 대한 연구가 진행될 수 있으리라 본다. 알고리즘의 측면에서 수학을 보았을 때, 우리는 방정

식을 풀면서 x가 미지의 대상이란 것을 계속 해석하지 않고 조작 규칙을 따르다가 결과를 해석할 때에야 그 의미를 파악하려 한다. 이는 모든 수학기호의 의미가 지속적으로 해석되어야 할 필요는 없으며, 기호표현 간의 관계에도 초점을 맞추어 수학기호에 대한 고찰이 필요함을 암시한다.

수학기호의 구문론적 연구의 필요성은 수학적 기호가 의사소통되기 어려운 점을 들어 설명될 수도 있다. 수학 자체의 특성이 의사소통에서 엄격함을 요구하고 수학 기호의 해석이 이차원적으로 이루어지는 것은 수학 학습의 난점이다. 학습자는 수학기호의 표현에서 사용 규칙을 알아야 한다. 특히, 상징을 다룰 때는 엄격한 수학 사회의 규칙 습득이 수학 교육의 목표이기도 한다. 예를 들어, 2와 x를 곱할 때 곱셈 기호를 생략하여 2x라고 해야지 x2라고 하지 않는다. 언어를 사용할 때도 한국어를 사용하는 문법이 존재하며, 이런 문법 관련 규칙을 아는 것은 텍스트를 이해하고 해석하는데 필수적이다. 또한 일상언어와 상징으로 가득 차 있는 수학교과서는 그 내용을 이해하기 위해 그래프를 보면서 설명을 읽고, 그림을 보면서 기호를 찾아야 한다. 이런 점에서 수학은 이차원성을 갖고, 교과서를 읽는 과정은 교사와 학생사이의 담화 내용이 되고 학습경험에 포함된다.

수학기호의 해석이 담화 내에서 이루어진다고 할 때 기호 사용에 따라 기호의 해석이 어떻게 진행되는지 등에 대하여 사회적·문화적 고찰이 본 연구에서는 부족하였다. 형식적인 규약의 상징에 이르기까지 학습자와 교사는 은유적인 표현을 통해 모호함을 유지하고, 엄밀하지 못한 수학을 의사소통하며, 확고한 수학적 대상의 해석에 도달하려는 노력을 한다. 이 과정에서 수학적 대상과 해석의 관계는 일상언어의 구조 내에 놓이게 되고 Grice의 대화의 원리(이성범, 2001) 같은 화용론적 차원이 적용될 수 있다. 따라서 앞으로의 수학기호에 대한 연구는 기호와 의미 뿐 아니라 수학기호 체계의 규칙을 다루는 구문론과 수학기호의 대상과 해석의 관계를 사회-문화적으로 고려하는 화용론적 차원에서 이루어질 수 있을 것이다. 이러한 연구를 토대로 수학 기호의 학습 지도에 대한 방법적 측면이 제시될 수도 있을 것이다.

참고문헌

강행고 외 (2001). 수학 7-가. 중앙교육진흥연구소.

김성도(1998). 현대기호학 강의. 서울: 민음사.

김치수 · 김성도 · 박인철 · 박일우(1998). 현대기호학의 발전. 서울대학교출판부.

이성범(2001). 추론의 화용론 -언어와 추론-. 서울: 한국문화사.

조영미(2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. In R. Biehler, R.W. Scholz, R. Strässer & B. Winkerlmann(Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*(pp.133-146). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brown, T. (1997). *Mathematics education and language*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in*

Mathematics Education, 23(1), 2-33.
Dörfler, W. (2000). Means for meaning. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain(Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*(pp. 99-131). Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani(Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*(pp.37-51). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
Freudenthal, H. (1978). Weeding and sowing : *Preface to a science of mathematics education*. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.
Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Shitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain(Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*(pp.225-273). Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
Hall, M. (2000). *Bridging the gap between everyday practices and classroom mathematics: an investigation of two teachers' intentional use of semiotic chains*. Doctorial dissertation, Florida State University.
Mellin-Olsen, S. (1987). *The politics of mathematics education*. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.
Nemirovsky, R., & Monk, S. (2000). If you look at it the other way...: an exploration into the nature of symbolizing. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain(Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 177-221). Mahwah, NJ :Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
O'Halloran, K. (1999). Towards a systemic functional analysis of multisemiotic mathematics texts. *Semiotica, 124-1/2,* 1-29.
Pinxten, R. (1994). Anthropology in the mathematics classroom? In S. Lerman(Ed.), *Cultural perspectives on the mathematics classroom*(pp.85-97). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being- or How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain(Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*(pp.37-98). Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemology of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop et al.(Eds.), *International handbook of mathematics education*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Falmer Press.
Sierpinska, A. (1998) Three epistemology, three views of classroom: Constructivism, sociocultural cpproaches, interactionism. In

Steinbring, H., Bussi, M. G. B. & Sierpinska, A.(Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom.* Reston, VA: NCTM.

Trabant, J. (2001). 기호학의 전통과 경향. 안정오 역. 서울: 인간사랑.(영어원작은 1996년에 출판)

Vygotsky(1985). 사고와 언어. 신현정 역. 서울: 성원사. (영어원작은 1962년에 출판)

Walkerdine, V. (1995). *The mastery of reason.* Londen: Routledge.

Wertsch, J. V. (1995). 비고츠키-마음의 사회적 형성. 한양대 사회인지발달연구모임 역(1995). 정민사.(영어원작은 1985년에 출판)

Yackel, E. (2000). Introduction: Perspectives on semiotics and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain(Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*(pp. 1-13). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Zepp, R. (1989). *Language and mathematics education.* Hongkong: API Press.

Reflection and Approach on Mathematical Signs and Their Meanings

Kim, Sun Hee (Gwangjang Middle School)
Lee, Chong Hee (Ewha Womans University)

Mathematics is constructed by many signs, and learning mathematics involves the understanding and uses of them. This study reflects mathematical signs and their meanings, and considers how they can be introduced in learning. For these, we first investigated epistemological positions as Piaget, Vygotsky, anthropology, and interactionism. And we investigated semiotic models that Saussure and Peirce built each. Among these we adopted Peirce' triadic model that is consisted of interpretant, object (referent), and represen tamen(sign). In mathematic learning process, representations are transformed by translations and meanings are growed to the representation of another sign. And the meaning of sign grows by learner's interpretation. In terms of theoretical grounds, we settled that the understanding of mathematical signs involved the understanding of their representations and their meanings. On the foundation of above contents, we searched how we introduced signs to students and there were methods that approached to students representationally or inquiringly.

key words: 수학기호, 의미, 기호의 모델, 표현적 접근, 탐구적 접근
e-mail: ilovemath@empal.com , jonghee@ewha.ac.kr