大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 12 卷 第 4 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XII, No.4, 543-556. Nov 2002

탐구형 소프트웨어를 활용한 기하영역의 수학화 교수학습 방법

정 보 나* · 류 희 찬** · 조 완 영***

Ⅰ. 서 론

기하학은 본래 실제적인 측량 활동이나 주변 환경을 기술하기 위한 인간의 필요성으로부터 출발하여 추상성과 형식성이 중시되는 연역적인 수학체계로 발전되고 있지만 다른 수학의 여러 영역에서와 마찬가지로, 기하학에서도 실제에서 형식으로의 발전은 한 방향으로만 진행되는 것은 아니다. 연역 기하는 그 자체로 완성된 학문을 구축하여 나가지만 동시에 연역의 결과는 다양한 실제적 활동에 응용되어진다. 즉, "실제"와 "형식"이 순환하면서 서로에 영향을 미치는 과정을 통해 발전해 가고 있다.

전통적으로, 기하교육은 학생들의 연역적 추론 능력을 기르는데 주안점을 두어 왔다. 다만, 이러한 형식적 기하를 지도하기 위한 전 단계로 기하학적 공간을 직관적으로 파악하는 것을 목표로 하는 직관 기하가 부여되어 왔다. 우리나라 기하 교육과정에서도 이러한 전통에 입각하여 초등학교와 중학교 1학년에서는 직관기하, 중학교 2학년, 3학년에서는 평면 논증기하, 고등학교에서는 입체 논증기하와 해석기하와 벡터기하를 연역적 측면에서 다룬다. 이러한 교육과정 구성은 학생들로 하여금 직관적인 경험을 쌓은 후 형식적인 기하교육을 받도록 한다는 점에서 합리적인 것처럼 보이나, 사실은 직관기하와 형식기하 사이의 연계성 측면에서 문제를 야기할 수 있다.

우리 나라 기하교육에서 중학교 1학년까지는 정의를 배우거나, 정의를 바탕으로 하는 단편적인 판단이나 일차적인 적용 문제해결 활동만 하고 있으며 중학교 2학년에서 배울 연역적 증명 능력을 배양하기 위한 사전 훈련적 요소는 찾아보기 힘들다. 중학교 2학년부터 그 이전에 배운 내용이나 방법과는 차원이 다르게 기하를 연역적으로 지도함으로써 직관 기하와 형식기하 사이의 연계성이 매우 취약하다. 예를 들어, 중학교 2, 3학년에서 평면논증 기하는 귀납적 활동을 통한 재발명 과정이 생략된 채, 연역적이고 종합적인 전개방식에 의한 추상화되고 형식화된 증명을 바로 도입함으로써 학생들은 증명의 참 맛을 느끼지 못하고 그 증명을 암기하는데 급급한 실정이다. 따라서 학생들은, 기하를 공부 잘하는 학생들만이 할 수 있는 현실과 관계없는 증명 위주의 과목이라는 잘못된 인식을 갖게 된다.

이러한 문제점을 개선하기 위해서는 중학교 1학년의 기하가 2학년의 연역적 활동과 무관하게 조직되어서는 안되며, 2, 3학년의 형식기하의 연역적 증명활동만을 강조할 것이 아니라 기하의 발생적 측면인 실험과 관찰에 의해 탐

* 오창중학교(제 1저자)
** 교원대학교(제 2저자)
*** 충북대학교(제 3저자)

구하고 추측하며 가설을 설정하는 비형식적 활동도 강조해야 한다. 즉, 1, 2, 3학년 공히 연역적 증명활동과 비형식적 활동이 통합되어 같은 정도로 다루어져야 하고, 학생들 스스로 발견하는 귀납적인 활동이 연역적 증명의 과정에 앞서 강조되어야 한다(류희찬외, 1998).

본 고에서는 이러한 기하교육의 개선방안으로서 <수학화> 교수학습론을 제시한다. 수학화란 수학의 내적, 외적 상황이나 문제 속에서 수학을 창조해 가는 과정을 말하는 것으로, 이 수학화 활동을 통해 학생들로 하여금 수학적 상황을 보는 기하학적 직관과 논리적 추론 능력의 향상이라는 두 가지 목적을 동시에 추구한다. 수학화 교수학습론은 수학의 외적 상황이나 문제 속에서 실험과 관찰에 의해 탐구하고 추측하며 가설을 설정하는 비형식적인 탐구활동을 통해 정리를 만들고, 자신이 창안한 정리를 정당화시키는 연역적인 증명활동을 통해 직관기하와 형식기하의 단절과 형식기하의 지나친 강조라는 기하교육의 문제점을 개선할 수 있다.

수학화 방안을 강구하는 절차는 다음의 단계를 거칠 필요가 있다. 첫째, 그 정리를 창조해 낼 수 있도록 적절한 문제나 외적 상황을 제시해야 한다. 둘째, 문제와 외적 상황으로부터 수학을 창안할 수 있도록 탐구활동을 제시해야 한다. 셋째, 탐구활동을 통해 가설설정을 한 후, 그것을 정당화할 수 있는 연역적 증명 활동을 제시해야 한다. 이 때 중요한 것은 이 과정에서 교사가 학생들에게 수학을 창안할 수 있도록 어떻게 안내를 할 것인가 하는 점이다. 따라서, 교사는 사고실험을 통해 수학화 활동을 고안해야 한다. 사고실험은 주로 물리학에서 많이 사용되는 방법으로, 현실의 실험 장치를 사용하지 않고 마치 실험한 것처럼 머리 속에서 결과를 유도해 내는 것을 의미한다. 수학교수학습에서 사고실험이란 교사가 아동을 실제로 지도하기에 앞서, 사고 속에서 가상적으로 지도해보는 것이다. 본 고에서는 사고실험을 통해 고안된 수학화 교수학습의 예를 제시할 것이다.

교사가 사고실험을 통해 수학화 교수학습 방안을 고안하는 경우를 생각해보자. 예를 들어, 삼각형의 세 내각의 합이 180도라는 수학적 정리의 경우, 교사는 학생들로 하여금 여러 가지 삼각형을 가지고 귀납적인 탐구활동을 통해 세 내각의 합이 180도라는 가설을 설정하도록 문제 상황을 제시해야 한다. 또 학생들이 세 내각의 합이 180도라는 가설을 설정할 수 있도록 탐구활동을 안내해야 한다. 그 탐구활동에는 수많은 삼각형이 필요하고 그 삼각형의 내각을 측정하는 활동이 필요하다. 그러나 지필 환경은 이러한 귀납적인 탐구활동을 하는 데 제한적이다. 이 때 탐구형 소프트웨어를 도구로 활용할 수 있다. 탐구형 소프트웨어를 활용하여 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형의 모든 경우에 이 삼각형의 세 내각의 합이 180도임을 확인한 후 가설을 설정할 수 있다. 그 후, 그 가설이 모든 경우에 다 적용될 수 있는 근거를 찾는 활동으로 진행되어야 한다. 이 가설을 연역적으로 증명하는 활동으로 마무리되어야 한다.

탐구형 소프트웨어는 교사가 수학화 교수학습 방안을 고안하고 지도할 때, 다음과 같이 교사와 학생들을 지원할 수 있을 것이다. 먼저 교사는 수학적 정리를 창조해낼 수 있도록 적절한 문제나 외적 상황을 고안할 때, 좀 더 다양한 문제나 상황을 제시할 수 있다. 둘째, 학생들에게 공통된 성질을 인식시키고 가설을 설정하게 하기 위한 귀납적 탐구활동을 조직할 때, 탐구형 소프트웨어는 교사에게 도움을 준다. 셋째, 학생들 자신이 설정한 가설이 옳고 그른 지를 확인하는데 도움을 준다. 넷째, 탐구

형 소프트웨어는 학생들로 하여금 증명에서 보조선의 발생적인 과정을 확인할 수 있게 한다.

본 고에서는 수학화 교수학습론을 지원하는 도구로서 탐구형 소프트웨어의 활용가능성을 탐색한다. 또한 사고실험을 통해 탐구형 소프트웨어를 활용한 수학화 교수학습의 예를 제시한다.

II. 기하영역의 수학화

1. 기하교육의 방향

(1) 기하교육의 목적

기하교육의 목적은 기하학적 직관력과 논리적 추론 능력을 향상시키는데 있다. 이 목적을 달성하기 위해 기하교육의 접근 방식은 크게 두 가지로 나눌 수 있는 데, 하나는 직관적, 귀납적 방법에 의한 비형식적 기하교육이고, 다른 하나는 체계적, 논리적인 방법에 의한 형식적 기하교육이다. 비형식적 기하의 접근 방법을 통해서는 실용적 의미를 가지고 기본적인 기하학적 사실에 대한 이해를 통한 기본적 소양 교육과 기하학적 변환에 관한 기본적인 이해, 공간 상상력의 신장 등의 목표를 달성시킬 수 있을 것이다. 형식적 기하의 접근 방법을 통해서는 연역적 방법에 대한 이해와 추론과정의 연역적 법칙의 습득, 외적 연결성으로 표현되는 기하학적 개념과 수학의 다른 분야와의 결합의 목표를 달성할 수 있을 것이다.

기하교육의 목적을 달성하기 위한 세부 목표를 제시하고 있는 기하 교육과정을 고찰해보자. 중학교 1학년 기하영역의 목표는 기본 도형의 개념을 이해하고 간단한 평면도형과 입체도형의 성질을 학습하는 것이다. <7-나 단계>의 기하영역은 도형과 측정으로 구분된다. 도형에서는 기본도형, 작도와 합동, 평면도형의 성질, 입체도형의 성질 등을 다루고 측정에서는 다각형과 각의 크기, 도형의 길이와 넓이와 부피 등을 다룬다. 이 영역의 목표들은 "이해한다", "알아본다", "작도할 수 있다", "구할 수 있다" 등의 종결어로 끝이 난다. 또 학습 지도상의 유의점으로 직관적인 탐구활동을 통해 점, 선, 면, 각, 원에 대한 성질을 알게 해야 한다고 제시하고 있다. 전체적인 목표와 세부적인 목표, 그리고 학습지도 상의 유의점 등을 고찰해 본 결과, <7-나 단계>의 기하영역은 직관기하에 해당된다. 따라서 <7-나 단계>에서는 비형식적으로 기하를 지도해야 한다. Freudenthal(1973)은 기하를 공간에 관한 학문으로 정의한다. 그는 현실과 밀접한 관련을 맺는 공간의 탐구로부터 기하를 시작하자고 주장하는 데, 이는 비형식적인 기하 지도에 부합된다. 비형식적인 기하의 접근 방법을 통해서는 실용적인 의미를 갖는 기본적인 기하학적 사실에 대한 이해를 통한 기본 소양교육, 기하학적 변환에 관한 기본적인 이해, 공간 상상력 신장의 목표를 달성시킬 수 있다. 그런데, <7-나 단계>는 기본적인 기하학적 사실에 대한 이해를 중점적으로 다룰 뿐, 기하학적 변환에 관한 기본적인 이해나 공간 상상력의 신장 등은 제외되어 있다. <7-나 단계>에서 다루는 직관기하의 내용은 중학교 2, 3학년에서 다룰 형식기하를 위한 준비과정의 내용을 다루고 있음을 알 수 있다.

<8-나 단계> 기하영역의 목표는 삼각형의 합동조건, 닮음조건을 이용하여 간단한 도형의 성질을 증명하는 것이다. <9-나 단계>의 경우, 피타고라스의 정리를 알고 이를 활용하는 것과, 원에 대한 여러 가지 성질을 이해하고 이를 활용하는 것을 목표로 하고 있다. <8-나 단계>는 삼각형과 사각형의 성질, 도형의 닮음,

닮음의 응용으로 구분된다. <9-나 단계>는 도형과 측정으로 구분되는데, 도형은 피타고라스 정리, 원과 직선, 원주각으로 구성되며, 측정에서는 삼각비를 다룬다. <8-나 단계>와 <9-나 단계> 기하영역의 목표를 고찰해본 결과, 주로 삼각형, 사각형, 원의 성질을 증명하고 활용하는 것을 목표로 하고 있다. 따라서 <8-나 단계>와 <9-나 단계>는 형식기하에 해당되며, 이 영역은 형식적인 기하 접근 방법을 통해 지도될 필요가 있다. 형식적인 접근 방법을 통해서는 다음과 같은 목표를 달성할 수 있다. 첫째, 연역적 방법을 이해할 수 있다. 둘째, 추론 과정의 연역적 법칙을 습득할 수 있다. 셋째, 외적 연결성으로 표현되는 기하학적 개념을 학습하여 다른 분야의 지식과 결합시킬 수 있다. 그러나 중2, 3학년의 형식기하에서는 성질의 증명과 활용 등을 강조하지만, 연역적 방법의 이해나 추론과정의 연역적 법칙 습득이나 외적 연결성에 대한 목표는 발견되지 않았다. 비형식적인 귀납적 탐구활동을 통해 추론하고 가설을 설정하고 그 가설을 정당화하는 활동이 생략된 채, 연역적인 증명만을 학생들에게 부과하기 때문에, 연역적 방법의 이해나 추론 과정의 연역적 법칙 습득이나 외적 연결성을 달성하기 어렵게 된다. 이것은 연역적 증명만을 강조함으로써, 직관기하와 형식기하의 단절이라는 기하교육의 문제를 야기한다.

이러한 기하 교육과정 자체의 문제로, 학생들은 기하학습에 많은 어려움을 느끼고 있다(Atara, S., & Ehud, B., 1997). 첫째, 학생들은 자신의 생각을 정리하고 국소적인 주장을 만드는 것에 어려움을 느낀다. 따라서 귀납적 탐구활동을 통해 추론하고 가설을 설정하는 활동을 통해 이 어려움을 해소해야 한다. 둘째, 학생들은 형식적 증명의 필요성을 인식하는 데 어려움을 느낀다. 학생들에게 수학적 정리가 주어지고, 학생들은 그 정리를 왜 증명을 해야 하는지 이해하지 못하고 증명을 재발명 하지 못한 채 증명을 암기하게 된다. 이것은 가설을 설정하고 그 가설을 확인하고 수정하며 정당화하는 과정을 통해 증명의 필요성을 인식하게 할 수 있다. 셋째, 학생들은 연역적이고 형식적인 증명에 관한 형태들을 학습함에 있어 어려움을 느낀다.

(2) 발견과 정당화

기하 교수학습에서 발견법은 중요하다(나귀수, 1998; 조완영, 2000; 우정호, 2000). 발견법은 귀납과 관련된다. 귀납적 탐구활동을 통해 학생들은 다양한 예에서 공통된 성질을 찾아내고, 그것을 가설로 설정한다. 이 가설이 타당함을 밝히는 활동이 전개되고 이 과정에서 학생들은 증명의 필요성을 인식하게 된다. 귀납적 탐구활동을 통해 발견된 정리는 그 학생에게 의미를 갖는 정리가 될 수 있다. 이러한 발견법을 통한 학습은 학생으로 하여금 그 지식을 오래 기억하게 하며, 수학적 자신감을 갖게 한다(류희찬 & 정보나, 2001).

발견이 귀납과 연결된다면 연역과 연결되는 것은 정당화이다. 중학교 기하 학습과정은 먼저 귀납적 탐구활동을 통해 가설을 설정하는 과정과 설정된 가설을 입증하는 과정, 가설을 연역적인 논리체계에 의해 증명하는 과정 등 세 부분으로 구분될 수 있다. 정당화는 학생들이 발견한 가설을 입증하는 과정과 가설을 연역적인 논리체계에 의해 증명하는 과정을 포괄하는 개념이다. 조완영(2000)은 정당화를 경험적 정당화와 연역적 정당화로 구분하고 있는데, 경험적 정당화란 실험과 측정에 의해서 또는 시각적인 그림을 이용하여 어떤 명제가 참이며 왜 참인지를 설명하는 것을 말하며, 연역

적 정당화란 보다 엄밀하고 형식적인 전통적인 의미에서의 증명을 뜻한다. 직관기하에서 학생들은 귀납적 탐구를 통해 가설을 발견하고, 형식기하에서는 연역적인 논리체계에 의한 증명을 학습한다. 기하교육의 문제는 직관기하에서 가설을 발견하는 활동과 형식기하에서 연역적인 논리체계로 증명하는 활동이 자연스럽게 연결되지 못한다는 점이다. 직관기하와 형식기하를 자연스럽게 연결할 수 있는 방법이 경험적 정당화이다. 경험적 정당화는 발견된 가설을 연역적으로 증명하기 전에, 학생들의 능력에 맞게 가설이 참임을 보이는 활동이다. 따라서 경험적 정당화는 직관기하와 형식기하의 단절을 연결시키는 다리 역할을 할 수 있을 것이다. 기하교육의 또 하나의 문제는 연역적인 증명만을 지나치게 강조한다는 점이다. 연역적인 증명만을 강조하기 때문에, 학생들은 증명하고자 하는 정리의 의미와 증명의 필요성을 인식하지 못한 채, 암기를 통해 증명을 학습한다. 그러나 학생들은 경험적 정당화 활동을 통해 증명하고자 하는 정리의 의미를 이해하게 되고, 그 정리가 참임을 입증하는 과정을 통해 증명의 필요성을 인식하게 된다.

2. 기하영역의 수학화

수학화란 수학의 내적, 외적 상황이나 문제 속에서 수학을 창조해 가는 과정으로, 현상을 수학적 수단인 본질 즉 수학적 개념, 구조, 아이디어로 조직화하고 체계화하는 것을 의미한다. 수학화 과정은 현상과 본질의 교대 작용에 의해 수준 상승이 이루어지는 과정으로 현실 상황을 조직하는 수학화에서 출발하여 나중에는 수학 자체의 수학화로 이어진다. 수학화는 처음에는 국소적으로, 나중에는 전체적으로 진행된다(Freudenthal, 1973, 1983, 1991). Treffers (1987)는 수학화를 알려지지 않은 규칙과 관계, 구조를 발견하기 위해서 자신이 이미 알고 있는 지식과 능력을 이용하여 조직화 및 구조화하는 활동이라고 정의하고 있으며, 문제 장면을 수학적 문제로 변형하는 과정과 수학적 체계 내에서 처리하는 과정으로 구분하기 위해 수평적 수학화와 수직적 수학화로 구분하였다. Freudenthal(1991)은 수평적 수학화와 수직적 수학화를 다음과 같이 구분하였다.

> "수평적 수학화는 실세계에서 기호의 세계로 이끄는 것이다. 우리는 실세계 내에서 살고, 활동한다. 또 다른 세계에서 기호는 기계적으로 이해할 수 있게 되고, 반성적으로 형성되며, 재형성되고 조작된다. 이것이 수직적 수학화이다. 실세계는 현실로서 경험하는 것이다. 반면 기호세계는 추상화와 관련된다. 확실히, 이 영역은 모호하게 나타난다. 그 세계는 확장될 수도 있고 축소될 수도 있다."(p. 41, 42)

수평적 수학화란 관찰, 실험, 귀납추론 등의 경험적 접근 방법을 통해 문제 상황을 수학적인 방법을 이용할 수 있도록 변형하는 과정 즉 모델 형성, 도식화, 기호화를 통해 수학으로 향하는 길을 여는 것을 말하며, 수직적 수학화란 수평적 수학화 이후에 따라오는 수학적 과정, 문제를 풀고 일반화하고 형식화하는 것과 관련된 과정 즉, 수학적 처리 과정과 탐구 중인 문제 장면의 구조화 속에서의 수준 상승 과정과 관련된다(김용성, 2000).

중학교 기하를 수학화의 관점에서 비교한다면, 직관기하는 수평적 수학화에, 형식기하는 수직적 수학화에 부합된다. 직관기하에서는 관찰과 실험 등을 통해 도형의 개념을 정의하고 기호화한다. 형식기하에서는 수학적 명제를 기호로 표현하면서 연역적 증명을 하게 된다. 따라서 직관기하는 실세계에서 기호의 세계로 이끄는 것이므로 수평적 수학화에 해당되고, 형

식기하는 기호를 가지고 증명 활동을 하는 추상화 과정에 해당되므로 수직적 수학화에 해당된다. 중학교 기하의 문제를 직관기하와 형식기하의 단절, 또 형식기하의 지나친 강조라는 관점에서 본다면, 결국 이 문제는 수평적 수학화와 수직적 수학화를 자연스럽게 연결하고 수직적 수학화만을 지나치게 강조하는 것이 아니라 같은 비중으로 수평적 수학화를 경험하도록 해야 한다는 것이다.

수학화는 현실에서 출발하여 수학 자체의 수학화에 이르는 과정이므로 수학 영역 전반에 걸쳐있다. 학생들은 수학화 활동의 경험을 통해서 수학의 여러 가지 내용을 재발명 해봄으로서 그 필요성을 알게 되고, 점진적으로 형식화해 나가며, 현실과 수학을 연결시켜봄으로써 수학의 유용성을 경험할 수 있다. 학생들은 수학화 활동을 통해 수학의 필요성과 유용성을 인식할 수 있기 때문에, 학생들에게 수학학습의 동기를 유발할 수 있다. 또한 수학은 뛰어난 수학자들의 활동만이 아니라 수학이 인간의 활동이라는 사실을 인식할 수 있다. 그리고 학생들 스스로 정리를 재발명해가는 과정을 통해 그 정리의 의미를 깨닫게 된다. 또한 연역적 증명을 통해 일반화와 추상화를 경험하게 된다. 따라서 수학 학습에서 수학화 활동은 중요하다. 수학화 활동 중에서 학교 수학에서 경험할 수 있는 수학화의 기본적인 활동으로는 패턴 찾기, 추론하기, 정의하기, 일반화, 도식화, 형식화, 알고리듬화, 국소적 조직화를 들 수 있다(박순규, 1996; 유현주, 1997; 이범규, 1985; 정영옥, 1997).

학생들의 수학화 활동을 위해서는 교사의 지도가 중요하다. 수학화를 안내하는 수학 학습-지도 원리로 교수학적 현상학, 안내된 재발명의 원리, 학습 수준이론 등이 있다(정영옥, 1997; 우정호, 2000; 이승희, 2001). 점진적인 수준의 이행을 위한 여러 가지 현상들을 제공해주고자 하는 목적으로 제시된 원리가 교수학적 현상학이다(Freudenthal, 1983). 교수학적 현상학은 수학의 특정 부분에 의해 수학화될 수 있는 학습자 주변의 현상을 살펴보고 역사적인 고찰에 의해 수학화 과정을 분석함으로써, 수학적 내용이 어떤 중요성을 갖는지를 분석하여 학생들로 하여금 그것을 생각해 내고 이해하도록 도와주는 것을 목적으로 하며, 또 학생들로 하여금 수학적 내용을 예상하도록 돕는 방법을 찾는 것을 목적으로 한다(정영옥, 1997, 재인용). 교사는 학생들의 수학화 활동을 위해 우선 학생들이 그 정리를 창조해낼 수 있도록 적절한 문제나 외적 상황을 제시해야 하는데, 이때 교수학적 현상학은 교사에게 학습자의 학습 출발점을 알려주는 방법을 제공한다.

수학화 활동은 교사가 제시한 적절한 문제나 외적 상황에서 출발하여 수학을 창안하는 과정으로 진행된다. 수학을 창안하는 탐구 활동은 다음의 원리에 의해 제시된다. 안내된 재발명 원리란 인류의 발달을 그 순서 그대로 재현하는 것이 아니라 학습자의 현실 속에서 교사의 안내 하에 새롭게 재창조하는 것을 의미한다. 즉, 교사는 학생들에게 수학을 재발명할 수 있도록 안내해야 한다. 왜냐하면 재발명을 통해 얻은 지식은 덜 활동적인 방식으로 얻은 지식보다 파지와 전이 면에서 월등하기 때문이다. 또한 재발명 과정을 통해 학생들은 발견의 즐거움을 느낌으로써 수학학습의 동기를 유발할 수 있기 때문이다. 또한 수학을 인간적 활동으로 보는 바람직한 수학적 태도를 길러줄 수 있기 때문이다(Freudenthal, 1991). 재발명이 가능하기 위해서는 '사고실험'이 중요하다(Freudenthal, 1973). 사고실험은 교사나 교과서 집필자가 학생집단을 상상하고 머리 속에서 가능한 상호작용을 생각해봄으로써 미리 가르쳐보는

것을 의미한다. 사고실험을 통한 학생들의 활발한 활동은 교사로 하여금 수업 방법을 결정하게 만든다(Freudenthal, 1973). 따라서 교사는 사고실험을 통해 재발명을 위한 탐구 활동을 제시해야 한다.

학생들이 수학학습을 통해서 수학화 과정을 재발명하도록 하는 것은 수준의 비약이 가능하도록 적절한 교수학적 조치를 취해가면서, 점진적으로 안내해 가는 것을 의미한다. 이러한 학습 지도의 방법적 기초로서 제시된 것이 van Hiele 학습수준 이론이다.(우정호, 2000) van Hiele은 학생들의 기하 학습 과정에서 도약에 주목하고, 여러 가지 학습수준이 존재한다는 것을 확인하였다. van Hiele은 시각적 수준, 서술적 수준, 국소적인 논리적 관계를 파악하는 수준, 형식적 논리를 파악하는 수준, 논리적 법칙의 본질을 파악하는 수준으로 구분하였다. 기하에서 수학화 활동은 적절한 문제나 외적상황에서 출발하여 정리를 재발명하는 탐구활동을 통해 가설설정을 한 후, 그것을 정당화할 수 있는 연역적 증명 활동으로 전개되어야 한다. 이 과정은 수평적 수학화에 머무는 것이 아니라 수직적 수학화로 연결되는 불연속적인 수준상승의 과정이다. 교사는 학생들의 이러한 수준상승을 위해 수학화활동을 안내해야 한다.

학생들의 점진적인 수학화 활동을 위해서는 교수학적 현상학에서 출발한 적절한 문제나 상황을 이용해 현실 속의 현상과 부단한 관계를 맺으면서 수평적 수학화와 수직적 수학화가 교대로 일어나도록 하여 반성에 의한 수준 상승이 자연스럽고 자발적으로 이루어지도록 해야 한다(정영옥, 1997).

III. 수학화와 탐구형 소프트웨어

1. 탐구형 소프트웨어와 기하 수업

최근 컴퓨터의 발달과 함께 탐구형 소프트웨어는 역동적이고 상호작용이 가능한 교육매체로 개발된 것으로, 이러한 교육매체는 단순히 컴퓨터로부터 학습자로의 일방적인 지식의 전달에서 탈피하여 학습자와 컴퓨터와의 상호작용을 강조하고 있다.

지필 환경에서 종이와 연필, 그리고 자와 컴퍼스만을 이용해서 생생한 기하학적 원리를 담은 그림을 그리기에는 여러 가지 한계가 있다. 특히 수업 시간에 자와 컴퍼스로 작도를 한다는 것은 시간상 제약이 있고 정확성에서도 한계가 있다. 또한 지필 환경에서는 한번 그려진 그림을 조작할 수 없기 때문에, 여러 가지 기하학적 성질을 탐구하는 데 어려움이 있다. 이러한 한계점을 극복하기 위한 방법의 하나는 기하학습에 탐구형 소프트웨어를 활용하는 것이다.

de Villiers M.(1998)은 역동적인 기하 소프트웨어의 발달은 유클리드이래 기하에서 가장 흥미 있는 발달이며, 많은 나라의 기하 교육과정을 회생시켰다고 주장하였다. 또 역동적 기하 소프트웨어는 실험적으로 탐구하고 추측할 수 있으며 추측들이 참임을 증명하는 강력한 도구일 뿐 아니라, 거짓 추측에 대한 반례를 구성하는 데 매우 중요한 도구로서 논리적 사고를 촉진시킨다고 하였다. 또한 역동적 기하의 발전은 증명에 대한 수업에서 근본적인 변화를 요구한다고 주장한다. 따라서 설명과 발견과 같은 또 다른 증거 제시의 기능들이, 학생들에게 의미 있는 활동으로서 증명을 도입하기 위해 효과적으로 활용되어야 한다고 강조한다.

McGehee(1998)는 상호 작용하는 기하 소프트웨어는 시각적 정당화와 경험적 사고를 형식

적 증명에서 논리적 정당화와 함께 보다 높은 수준의 기하적 사고와 연결시키며, 중학교 기하 교육과정에서 "중요하고 재미있는 개념을 학생들이 학습하도록 안내해주는 소프트웨어라고 주장하고 있다.

Silver(1998)는 '증명을 가르치기 위해 컴퓨터를 사용할 수 있는가?'라는 주제의 논문에서 GSP가 변환 과정을 통해 관계를 발견하고 주장이 거짓임을 직관적으로 이해할 수 있도록 풍부한 기회를 제공할 수 있음을 보이면서, GSP가 일반적인 증명은 아니지만 정당화에 좋은 도구임을 주장하고 있다. 그는 새로운 도구인 Geometry Proof Kit(Silver, 1996)이라는 컴퓨터 프로그램을 이용하여 보다 일반적인 증명을 가르칠 수 있다고 주장하고 있다.

위의 주장들을 종합하면, 탐구형 소프트웨어의 사용은 기하교육을 개선할 수 있는 많은 가능성을 가지고 있으며, 특히 발견과정, 즉 귀납뿐 아니라 경험적 정당화에 큰 역할을 할 수 있음을 알 수 있다.

2. 수학화 과정에서 탐구형 소프트웨어

탐구형 소프트웨어는 귀납적 탐구 활동의 강력한 도구이다. 탐구형 소프트웨어는 학생들이 수학화 활동을 할 수 있도록 지원할 뿐 아니라 교사가 수학화 교수학습 방안을 고안하고 지도하는 데 도움을 준다. 탐구형 소프트웨어는 다음과 같이 교사와 학생들을 지원할 수 있다. 먼저 교사는 학생들이 수학적 정리를 창조해낼 수 있도록 문제나 외적 상황을 고안할 때, 좀 더 다양한 문제나 상황을 제시할 수 있다. 예를 들어 정다각형과 그 정다각형의 중점을 연결하여 만든 중점 연결 정다각형의 넓이의 관계를 탐구하는 활동을 생각해보자. 이 활동을 위해 다음의 문제가 주어진다.

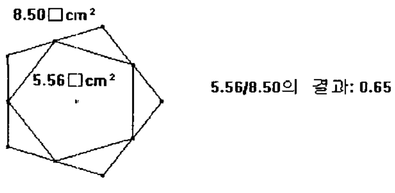
> 지리산에 있는 산장의 한 벽은 정삼각형 모양의 유리창으로 되어있다. 햇살이 너무 눈이 부셔서 그 정삼각형의 각 변의 중점을 연결한 중앙의 정삼각형만을 제외한 나머지 부분을 창호지를 이용하여 빛을 차단하였다. 그렇다면 빛은 예전보다 얼마나 적게 들어오겠는가?

학생들은 쉽게 0.25임을 알 수 있다. 정사각형의 경우도 쉽게 0.5임을 찾을 수 있다. 그러나 정오각형의 경우는 다르다. 지필 환경에서는 정오각형을 작도하기 어렵다는 사실에서부터 탐구 활동이 제한을 받는다. 그러나 컴퓨터 환경에서는 탐구형 소프트웨어를 이용하여 정오각형을 작도한 후 중점 연결 정오각형을 작도할 수 있고 측정 도구를 이용하여 그 넓이를 측정할 수 있다. 이를 통해 정오각형의 두 넓이의 비를 찾을 수 있다. 다음으로 정육각형, 정칠각형, 정팔각형 등의 귀납적인 활동이 진행된다. 이 활동을 통해 학생들은 그 관계를 찾아 가설을 세우고 그 가설을 확인하고 정당화할 수 있다.

둘째, 학생들이 공통된 성질을 인식하고 가설을 설정하게 하기 위해, 교사는 귀납적 탐구 활동을 조직해야 하는데, 이 때 탐구형 소프트웨어는 교사에게 도움을 준다. 예를 들어, 삼각형의 세 내각의 합이 180도라는 정리를 생각해보자. 교사는 학생들로 하여금 여러 가지 삼각형을 가지고 귀납적인 탐구 활동을 통해 세 내각의 합이 180도라는 가설을 설정하도록 문제 상황을 제시하고, 학생들이 세 내각의 합이 180도라는 가설을 설정할 수 있도록 탐구 활동을 안내해야 한다. 탐구활동에는 수많은 삼각형이 필요하고 그 삼각형의 내각을 측정하여 계산하는 활동이 필요하다. 이 때 탐구형 소프트웨어의 dragging 기능은 하나의 삼각형을 변형시켜 수많은 삼각형을 만들 수 있고, 또 탐

구형 소프트웨어의 측정 기능을 이용하여 삼각형의 내각을 측정할 수 있고, 탐구형 소프트웨어의 계산기 기능을 이용하여 삼각형의 세 내각의 합을 계산할 수 있다. 따라서 탐구형 소프트웨어를 활용하여 학생들은 삼각형의 세 내각의 합이 180도라는 가설을 설정하고 확인할 수 있다.

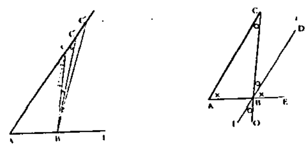
셋째, 탐구형 소프트웨어는 학생들 자신이 설정한 가설이 옳고 그른 지를 확인하는데 도움을 준다. 첫 번째 제시한 예로 돌아가 보자. 정삼각형의 경우, 중점연결삼각형과의 비가 0.25($\frac{1}{4}$)이고, 정사각형의 비는 0.5($\frac{2}{4}$)임을 컴퓨터 환경이 아닌 지필 환경에서도 쉽게 알 수 있다. 만약 어떤 학생이 정오각형의 비를 0.75 ($\frac{3}{4}$)로 추측하고, 정n각형의 비를 $\frac{n-2}{4}$라는 가설을 세웠다고 하자. 추측한 정오각형의 비를 확인하기 위해서 지필 환경에서는 정오각형을 작도하고 그 넓이를 측정하는 데 어려움을 겪게 된다. 따라서 가설을 확인하는 과정 또한 어렵게 된다. 그러나 이 학생은 탐구형 소프트웨어를 활용하여 자신이 추측한 정오각형의 비가 잘못되었음을 확인할 수 있다.



<그림 1> 정오각형의 비

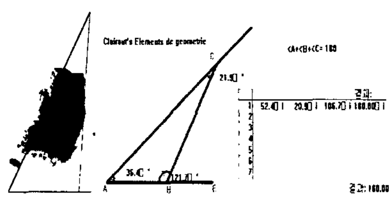
이러한 확인을 통해 자신의 가설이 타당하지 못하다는 사실을 인식하고 새로운 가설을 설정하기 위한 탐구활동을 다시 시작할 수 있다.

넷째, 탐구형 소프트웨어는 학생들로 하여금 증명에서 보조선의 발생적인 과정을 확인할 수 있게 한다. 학생들이 증명에서 겪는 어려움 중에 하나가 보조선을 긋는 문제이다(Senk, 1985). 학생들은 보조선을 왜 거기에서 그어야 하는지에 대한 발생적인 과정을 알지 못하기 때문에 암기할 수밖에 없다. 삼각형의 세 내각의 합이 180도라는 정리의 경우를 생각해보자. 귀납적 탐구활동을 통해 학생들은 모든 삼각형의 세 내각의 합이 180도임을 확인한다. 그러나 이 정리를 증명하기 위해서는 밑변의 연장선을 긋고 다른 한 변에 평행한 직선을 보조선으로 그어야 한다. 이 때 탐구형 소프트웨어를 활용하여 보조선의 발생과정을 확인할 수 있다. Clairaut는 유클리드의 정의를 따라 각을 기울기로 정의하고, 발생적 과정에 따라 교과서를 집필하고 있다(우정호, 1998). 다음은 그 과정을 보여주는 그림이다.



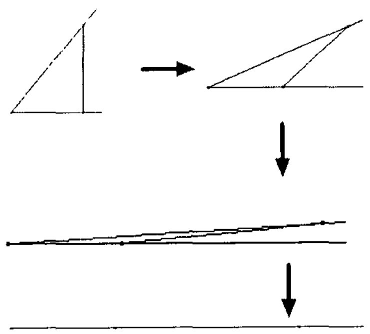
<그림2> Clairaut의 증명

다음 그림은 Clairault의 Elemns de geometire(1741)에 제시된 삼각형의 내각의 합을 구하는 방법을 Laborde(1998)가 CabriⅡ를 통해 구현한 그림이다.



<그림3> Laborde의 작도

다음은 탐구형1 소프트웨어를 활용하여 삼각형의 세 내각의 역동적인 변화과정을 보여주는 그림으로, 학생들은 세 내각의 합이 평각과 같음을 눈으로 확인할 수 있다.



<그림4> 삼각형의 역동적인 변화과정

Ⅳ. 수학화 교수학습의 실제

기본적인 수학화 활동으로 패턴찾기, 추론하기, 정의하기, 일반화, 도식화, 형식화, 알고리듬화, 국소적 조직화가 있다. 본 고에서는 테설레이션 만들기의 예가 제시된다.

이 예는 테설레이션을 만드는 탐구활동을 통해 패턴찾기, 정의하기, 추론하기 등의 수학화 활동을 한다. 패턴찾기와 정의하기 활동은 두 개의 테설레이션 작품을 보고 공통점과 차이점을 확인하고 패턴을 찾는 활동을 한 후, 그 패턴을 이용하여 테설레이션이라는 용어를 정의하는 활동으로 연결된다. 테설레이션이라는 용어의 정의가 주어지는 것이 아니라 학생들 스스로 정의를 만들어보는 활동이다. 추론하기 활동은 주변에서 테설레이션을 찾아보고 테설레이션이 가능한 정다각형을 찾고 이유를 설명하는 추론 활동으로 전개된다. 확인하는 과정에서 탐구형 소프트웨어가 중요한 역할을 한다. 마지막으로 탐구형 소프트웨어를 활용해서 패턴을 이용한 테설레이션을 만드는 활동으로 전개된다. 이 예는 생활주변에서 접하는 소재를 활용하여 합동의 개념과 변환의 개념을 소개할 수 있다. 만들기 활동은 수학적인 개념을 활용하여 공간을 아름답게 꾸미는 미술 활동과 연계됨으로써, 이 활동을 통해 학생들은 수학적 아름다움을 느낄 수 있다.

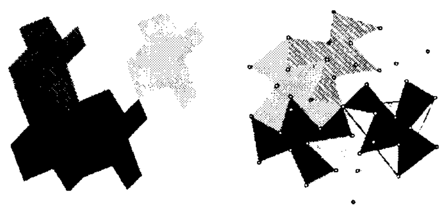
<테설레이션 만들기>

◉ 개요

· 학년수준: 중학생 2학년
· 사전지식: 삼각형, 평행사변형, 평행이동, 회전이동
· 탐구형 소프트웨어 : GSP
· GSP 활용 능력 : 능숙한 사용자
· 단원 : 사각형의 성질

· 활동목표 : 평행이동, 회전이동을 이용한 테설레이션 만들기를 통해 실생활과의 연결성과 함께 수학의 유용성, 수학의 아름다움을 느낄 수 있다.

◈ 패턴 찾기



<탐구문제1> 위의 두 작품은 테설레이션 활동에 의한 작품이다. 두 작품을 보고 테설레이션이 무엇인지 생각해 보자.

· 두 그림의 공통점과 차이점을 적어라.
· 두 작품 속에 계속 반복되는 도형이 있다.

계속 반복되는 도형은 어떤 다각형을 변형한 것인지 말해보자.

· 하나의 도형을 이동하여 테설레이션한 것이다. 각각 어떻게 이동하였는지 말해보자.

◈ 정의하기

<탐구문제2> 테설레이션이란 무엇일까?

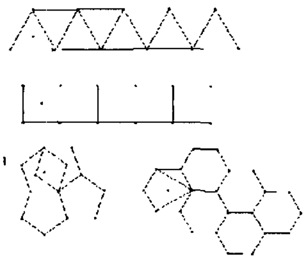
◈ 추론하기

<탐구문제2> 우리 주변에서 테설레이션을 이용한 것을 발견할 수 있다. 목욕탕 벽은 정사각형 모양의 타일을 이용하여 테설레이션한 것이다. 이 외에 우리 주변에서 테설레이션을 이용한 것은 어떤 것이 있을까?

<탐구문제3> 정다각형을 가지고 테설레이션 해보자. 정삼각형을 가지고 테설레이션할 수 있는가? 정사각형의 경우는 어떠한가? 정오각형은? 색종이를 가지고 정다각형을 만들어 확인해보아라.

<탐구문제4> 테설레이션이 가능한 정다각형은 어떤 것이 있는가? 왜 그렇다고 생각하는지 이유를 적어보아라.

<탐구활동> 탐구형 소프트웨어를 활용하여 테설레이션이 가능한 정다각형을 조사하여라.



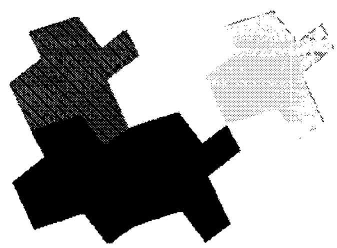
<탐구문제5> 탐구활동을 통해 확인된 사실을 표로 정리하라.

도형	테설레이션 가능(○,×)	평행이동 (○,×)	회전이동	
			가능	회전각
정삼각형				
정사각형				
정오각형				
정육각형				
정칠각형				
정팔각형				
정구각형				
정십각형				

<탐구문제6> 테설레이션이 가능한 정다각형은 어떤 것이 있는가?

<탐구문제7> 테설레이션이 가능한 정다각형의 공통된 특징은 무엇인가?

◈ 테설레이션 만들기



<작도문제1> 위의 작품을 만들기 위한 작도의 과정을 계획하라.

- 시작도형은 어떤 도형인가?
- 단위도형은 어떤 도형인가?
- 단위도형을 만들기 위해 어떤 조작이 필요한가?
- 단위도형을 만든 후엔 어떤 과정이 필요한가?
- 작도 순서를 적어보아라.

<작도활동> 탐구형 소프트웨어를 활용하여 작도하여라.

<작도문제2> 만약 테설레이션이 제대로 작도되지 않았다면 그 이유는 무엇인가? 다시 한번 수정하여 작도하여라.

<작도문제3> 다음의 작도과정과 자신의 작도과정을 비교하여라.

***직사각형과 평행이동을 이용한 테설레이션 작품 만들기 ***

1단계: $\overline{AB}$를 작도한다.

2단계: 점 A와 B를 지나며 $\overline{AB}$에 수직인 직선을 작도한다.

3단계: 수직인 한 직선 위에 점 C를 작도하고 $\overline{AB}$에 평행한 직선을 작도한다.

4단계: 교점에 점 D를 작도한다.

5단계: 세 직선을 숨기고 네 점을 선분으로 연결한다.

6단계: $\overline{AC}$ 위에 임의의 셋 또는 네 개의 연결된 선분을 작도한다.

7단계: 작도한 선분들을 직사각형의 대변에 평행 이동시키기 위해 점 A, B를 선택한 후 변환 메뉴에서 벡터 지정을 선택한다.

8단계: $\overline{AC}$ 위의 불규칙한 선분과 점들을 선택한 후 평행이동한다.

9단계: $\overline{CD}$에 6단계에서 8단계의 작도를 한다.

10단계: 작도된 도형의 꼭지점을 선택한 후 내부 명령을 선택한다.

11단계: $\overrightarrow{CA}$에 의해 내부를 평행 이동한다.

12단계: $\overrightarrow{AB}$에 의해 내부를 평행 이동한다. 또 행과 열에 원하는 만큼 계속 반복한다.

13단계: 원하는 종류의 색을 선택하여 모양이 보이도록 한다.

<조별과제> 조별로 테설레이션 작품을 만들고 발표한다(조별평가).

<테설레이션 예시작품>

Ⅳ. 결론

본 연구는 수학적 상황을 보는 기하학적 직관과 논리적인 추론 능력의 향상이라는 중학교 기하교육의 목적이 달성되지 못하고 있다는 문제의식에서 출발하였다. 중학교 기하교육의 문제를 직관기하와 형식기하의 단절, 형식기하의 연역적 증명에 대한 지나친 강조라는 관점에서 출발하여, 개선 방안으로 수학화 교수학습론을 제시하였다. Freudenthal은 기성수학과 활동수학의 양면성을 구분한 후, 기성수학을 그대로 암기하는 것이 아니라 수학화 활동을 통한 학생들의 수학하는 활동을 강조하였다. 수학화 활동을 위해서는 교사의 끊임없는 연구와 세심한 노력이 요구된다. 우선 수학을 창안할 수 있도록 적절한 문제나 외적 상황을 제시해야 한다. 또한 문제와 외적상황으로부터 수학을 창안할 수 있도록 탐구 활동을 제시해야 한다. 탐구

활동을 통해 가설을 설정한 후 그것을 정당화하는 활동을 제시해야 한다. 교사는 사고실험을 통해 수학화 활동을 고안해야 한다. 수학화 교수학습론을 지원하는 도구로서 탐구형 소프트웨어의 활용 가능성을 탐색한 결과, 다양한 문제나 상황을 제시할 수 있으며, 귀납적 탐구활동을 가능하게 해주고, 학생들이 설정한 가설을 확인하는 데 도움을 준다. 또한 보조선의 발생과정을 역동적으로 보여줄 수 있다.

마지막으로 사고실험을 통해 고안된 수학화 활동의 예가 제시되었다. 이 예는 사고실험을 통해 고안된 활동으로 학생들에게 직접 투입하여 검증된 활동이 아니기 때문에, 학생들에게 직접 투입하여 관찰하고 반응을 확인하여 수정할 필요가 있다. 제시된 예가 정의하기, 추론하기, 패턴찾기 등의 수학화 활동으로 수직적 수학화 보다는 수평적 수학화에 부합되는 활동으로, 수직적 수학화와 관련된 수학화 활동이 개발될 필요가 있다. 또한 교사들이 기하 수업에 활용할 수 있는 수학화 활동 자료가 보다 많이 개발될 필요가 있다.

참고문헌

김용성(2000). 문제상황을 기초로한 수학화 경험이 수학적 신념과 문제해결력에 미치는 효과. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

나귀수(1996). 기하 교육에서 공간적 사고의 중요성에 대한 고찰. 대한수학교육학회논문집, 6(1), 189-201.

류희찬, 정보나, 유공주(1998). 캐브리II를 활용한 기하교육II. 대한수학교육학회 수학교육학연구발표대회논문집, 375-397.

류희찬, 정보나(2001). 탐구형 소프트웨어를 활용한 탐구활동에 관한 사례연구. 대한수학교육학회 수학교육학연구발표대회논문집, 653-682.

박순규(1996). 수학화 지도에 관한 연구. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

우정호(1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부

우정호(2000). 수학학습-지도원리와 방법. 서울대학교 서울: 서울대학교출판부.

유현주(1995). 유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구. 대한수학교육학회 논문집, 5(2), 129-141.

이범규(1985). H. Freudenthal의 활동주의 수학교육론과 현상학적 수학교수학에 대한 고찰. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

이승희(2002). Freudenthal의 수학화 활동을 위한 중학교 기하영역의 학습자료 개발. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

정영옥(1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

조완영(2000). 탐구형 기하소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

Atara, S., & Ehud, B. (1997). Theory of global and coherence and applications to geometry. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 152-159). Lahti: University of Helsinki.

de Villiers M. (1998). The future of secondary school geometry. *Proof Newsletter,* Mars/Apvril.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

_______________(1983). *Didactical phenomeno-*

logy of mathematical structure. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

______________(1991). *Revisting mathematics education: China lectures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Laborde, J. M. (1998). Technology empowering teachers: some snapshots from cabri-geometry. In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in school mathematics education around the world.* Proceedings of the Fourth UCSMP. NCTM: Reston.

McGehee, J. J. (1998, March). Interactive technology and classic geometry problems. *The Mathematics Teacher.* 204-207.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher. Vol. 78, No. 6,* 448-456.

Silver, J. A. (1998, November.) Can computers be used to teach proofs? *The Mathematics Teacher,* 660-663.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education -The Wiscobas project.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

"Mathematising learning and teaching methods" using dynamic software in geometry

Jung, Bo Na (Ochang Middle School)
Lew, Hee Chan (Korea National University of Education)
Cho, Wan Young (Chungbuk National University)

The purpose of this study is to find a method to improve geometry instruction. For this purpose, I have investigated aims and problems of geometry education. I also reviewed related literature about discovery methods as well as verification.

Through this review, "Mathematising teaching and learning methods" by Freudenthal is presented as an alternative to geometry instruction. I investigated the capability of dynamic software for realization of this method. The result of this investigation is that dynamic software is a powerful tool in realizing this method.

At last, I present one example of mathematic activity using dynamic software that can be used by school teachers.

Index words : mathematising, dynamic software
수학화, 탐구형 소프트웨어