大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 12 卷 第 4 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XII, No.4, 523-542. Nov 2002

학교수학에서의 유추와 은유

이 승 우* · 우 정 호**

I. 서 론

수학 교과서의 개념을 학생들이 이해하는 것은 주요한 수업목표 중의 하나로 교사는 교과서의 개념을 학생들에게 다양한 방식으로 전달하고 학생들은 교사가 제시하는 방식을 통해 개념을 이해하게 된다[1]. 이 과정에서 교사는 교과서의 내용을 결코 문자 그대로 전달하지는 않으며, 자신이 이해하게된 방식과 그 방식을 통해 이해한 개념의 의미를 전달하기 위해 예나 비유를 이용하여 설명하기도 하고, 관련된 교구와 컴퓨터 또는 특정한 상황을 도입하여 학생들이 활동을 하게 함으로써 수업을 전개하기도 한다. 즉, 학생들은 교과서의 형식적인 표현 그 자체보다는 이해를 돕기 위해 교사가 수업시간에 제시하는 예와 비유, 교구나 컴퓨터 등을 통한 설명, 활동, 상황 등을 통해 개념을 이해하게 되는 것이다.

Fischbein(1987, p.127)은 형식적인 개념을 다루어야 할 때, 개념을 직관적으로 받아들일 수 있게 하는 개념의 대체물을 직관적 모델이라고 하였다. 수업에서 학생들에게 전달하고자 하는 개념을 A라 하고 예, 비유, 교구나 컴퓨터를 통한 활동, 상황 등을 B라 할 때, 학생들은 개념 A의 모델인 B를 통해 개념 A를 직관적으로 이해하게 된다[2]. 이 때, B는 개념 A의 범주에 속하는 하나의 범례일 수도 있고 개념 A와는 다른 개념일 수도 있는데, 이러한 개념 A의 예나 개념 A와 비슷한 유사물이 바로 Fischbein의 직관적 모델이 된다. A의 성질을 추측하고 이해하기 위해 그 대체물 B를 이용하는 방법은 수학과 과학에서 직관적이며, 발견적이고 창의적인 사고 방법이기도 하다. 유추와 은유는 직관적 모델 B를 통해 개념 A가 개념화되는 과정에 작용하며 추상적인 개념의 직관적인 이해를 가능하게 하는 중심적인 사고작용이다. 특히 모델 B가 개념 A의 전형적인 예일 때, B는 개념 범주의 중심에 위치하는 원형으로 기능하게 된다. 원형, 유추, 은유를 통해 획득되는 의미는 수학 개념이 갖는 객관적인 의미와 논리적으로 정확히 일치하지 않는데, 그럼에도 교육의 실제에 있어 원형, 유추, 은유와 같은 직관적 이해의 방식을 배제하는 것은 가능하지 않은 것으로 보이며, 따라서 교육의 과제는 그와 같은 방식의 배제가 아니라 그 결과로 나타

---

* 서울대대학원(제1저자)
** 서울대학교(제2저자)

1) 설명식 수업이건 활동을 통한 수업이건 넓은 의미에서 지식의 전달이라고 볼 수 있을 것이다.
2) 이러한 관계는 B→A로 도식화되며, 유추에서는 A를 표적(target), B를 기저(base)라 하고 은유에서는 A를 표적(target), B를 근원(source)이라 하며 은유에서는 이를 'A는 B이다'로 기술한다.

나는 부분적 이해의 한계를 학생들이 인식하고, 이를 효과적으로 조직하여 사용하도록 하는 것이라 할 수 있다. 즉, 원형, 유추와 은유는 인간 인지의 중심적 요소로 누구나 그것을 이용하여 새로운 개념을 획득하고, 개념의 부분적인 여러 측면을 이해함으로써 개념 전체에 대한 이해에 다다르게 될 것이며, 학생들은 교육을 통해 이러한 방식으로 보다 효과적으로 개념의 전체 의미를 점진적으로 획득할 수 있는 것이다.

본 고에서는 원형, 유추, 은유 등을 수학 개념의 이해와 관련된 중심 문제로 간주하고, 이와 관련된 이론으로 Rosch의 원형이론, 유추와 은유에 관한 이론 등을 고찰한다. 그리고 중학교 교과서에서 사용되고 있는 원형과 관련되어 제시된 예, 유추나 은유를 이용하는 그림이나 표현 등을 조사하여 봄으로써 수학교육에 있어 이들 이론의 적용가능성을 살펴보고자 한다.

II. 유 추

1. 수학적 사고와 유추

유추는 대표적인 귀납추론인 A:B :: C:D 형태의 '비율적 유추'와 각주 2)와 같이 도식화 될 수 있는 '영역간의 유추'로 나누어 볼 수 있다. 비율적 유추에서 일차적 관계인 A와 B의 관계, C와 D의 관계와 두 관계 사이를 연결하는 이차적 관계로 이루어지며 영역간의 유추는 표면적으로 보면 서로 상이한 두 영역을 하나로 접합시켜 주는 추상적인 관계체계를 지각하는 데서 시작한다(김영채, 1995). 유추에 대한 Aristotle의 정의로부터 Piaget이론에 바탕을 두는 인지구조 이론에 이르기까지 일차적 관계의 동등성에 대한 기준은 일반적으로 유추적 추론의 "상징"으로 받아들여져 왔으며, 인지구조 이론에서는 유추가 비례식을 포함하며 이태리:로마 :: 프랑스:파리와 같은 비율적 유추 문제가 비례식 3:4=15:20과 상등하다는 견해가 받아들여진다(Goswami, 1992). 특히 Piaget 이론에서 비례적 추론은 형식-조작적 추론의 상징으로 유추를 하는데는 비례적 추론이 필요하므로, 비례적 추론 능력은 유추적 추론능력의 척도가 되는데 Inhelder와 Piaget(1975)에 따르면 비례적 추론은 이차관계를 포함하고, 아동의 비례적 추론의 초기에는 a-b=c-d나 a+b=c+d 등의 형태가 나타난다[3](Goswami, 1992, pp.26-27). 그러나 Goswami(1992, p.29)는 비례적 추론과 유추의 관계는 명확하지 않으며 어린 아동들도 유추를 할 수 있으므로 형식적 조작기에 나타나는 비례적 추론 능력이 유추적 추론 능력의 척도가 되지는 못 한다고 주장한다. Gosuami와 같은 이러한 입장을 지식 기반 이론이라 하는데 이 이론에 따르면 유추는 형식적 조작기의 특징이 아니며 어린 아동들이 유추에 실패하는 이유는 유추의 근거가 되는 관계지식의 부족으로 설명된다. 이와 같은 구조 이론과 지식 기반 이론의 입장차이는 수학교육에서 수학적 사고와 유추의 관련성, 교과서를 구성할 때 유추의 사용시기와 전략 등에 대한 문제를 제기하고 있다.

수학적 사고가 무엇이며 그것의 바탕이 되는 능력이 어떤 것인가에 대해 뚜렷한 의견의 일치점은 없으나(Sternberg, 1996), Dreyfus와 Eisenberg(1996, p.260)는 수학적 사고능력의 개발에 있어 가장 중요한 것을 유추로 보고 있으며

3) English와 Halford(1996)는 정보처리적 관점에서 비율적 유추는 두 개의 2항관계로 처리되지만 비례적 추론은 4항관계로 처리되므로, a±b=c±d가 아닌 a/b=c/d와 같이 표현되는 관계로 특징지어지는 것만을 비례적 추론으로 간주할 것을 주장한다

English와 Halford(1996, p.14)도 인간의 인지활동에서 특히 중요한 역할을 수행하는 유추가 수학 학습에서 중요한 함의를 가진다고 주장한다. 인간사고에서 외연적 요소인 유추는 구조적 정보의 전이로서, 기억으로부터 인출된 유사물의 구조를 새로운 대상에 사상시켜 그 대상의 구조를 추측하는 것이므로(Sterberg, 1991, p.93), 패턴과 구조를 연구하는 학문인 수학과 관련된 사고과정에서 유추가 중심적인 역할을 하게 된다. 특히, 유추는 비례적 추론, 동형사상, 준-동형사상, 수학의 응용 등과 같은 수학적 사고와 관련이 깊다.

정비례 함수, 선형사상 등은 비례적 관계가 형식화되어 표현된 것이므로, 유추의 일종인 비례적 추론은 학교수학은 물론 고등수학과 과학의 초석이 되는 중요한 수학적 사고이다. Lamon(1995, p.177)은 비례적 추론과 관련된 요소로 절대적인 사고와 상대적인 사고, 比感(ratio sense), 하나의 상황 내에서 공변과 불변(covariance and invariance)을 조화시키는 것 등을 들고 있으며 이들 수학적 개념에 대해 아동들의 이해를 증진시키는 현상학적 활동으로 관계, 분할, 단위로 묶기 등의 관계를 다음과 같이 제시하고 있다.

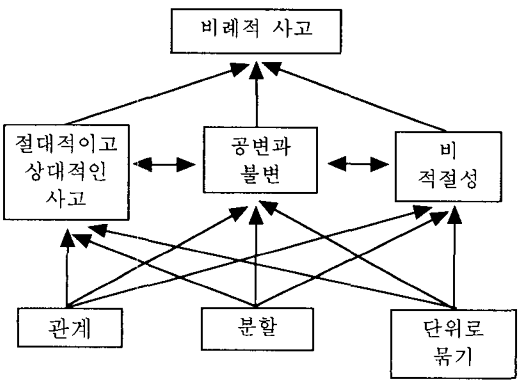


그림 II.1 비례적 추론에 대한 수학적, 교수 현상학적 차원

Gentner(1983)의 정의에 따르면 유추는 기저에서 표적으로의 구조적 정보의 전이로서 두 영역의 관계 구조를 비교하여 그 유사성을 찾는 것이므로 수학의 구조적 사고와 밀접히 관련된다. 이러한 점에서 수학에서 구조적 정보를 밝히는 유용한 도구가 되는 동형사상과 준-동형사상은 유추가 수학적 정확성을 갖고 행하여지는 것으로 생각할 수 있으므로, 동형사상은 구조의 전이를 나타내는 수학화된 유추이며 준-동형사상도 구조의 체계적인 축소 번역으로서 수학화된 유추라고 할 수 있다.

유리수체 $Q(\sqrt{2})$에서 복소수체 C로 확장되는 유추에서는, 유리수의 범위 안에 존재하지 않는 무리수 $\sqrt{2}$가 $x^2=2$의 근으로 도입되듯이 허수 i도 $x^2=-1$의 근으로 도입된다. 한 실수의 제곱이 언제나 양 또는 0이므로 음의 실수의 제곱근은 실수의 범위 안에 존재하지 않는 새로운 형태의 수이다. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}\ (a>0,\ b>0)$로부터 $\sqrt{-a}=\sqrt{-1}\sqrt{a}\ (a>0)$임을 유추하여 $\sqrt{-a}=i\sqrt{a}$로 정의할 수 있으며 a, b, c, d가 유리수일 때, $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2} \Leftrightarrow a=c,\ b=d$이므로 a, b, c, d가 실수일 때 $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c,\ b=d$라고 정의할 수 있다. 또한 복소수의 연산도 실수에서와 같이 가법, 승법에 관하여 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립하는 것으로 생각하고 실수의 연산을 확장하여 그 결과를 바탕으로 유추하여 다음과 같이 정의하는 것이다.

$$
\begin{aligned}
&x_1+iy_1 \ \pm\ (x_2+iy_2)=x_1\pm x_2+i(y_1\pm y_2)\\
&(x_1+iy_1)\ \times\ (x_2+iy_2)=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2)\\
&(x_1+iy_1)\ /\ (x_2+iy_2)=(x_1x_2+y_1y_2)/(x_2^2+y_2^2)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +i((y_1x_2-x_1y_2)/(x_2^2+y_2^2)
\end{aligned}
$$

이렇게 볼 때, 기존의 수체계에서 인정된 성질이 유지되도록 대수적 구조를 확장하는 형식불역의 원리는 관계구조의 전이인 유추를 바탕으로 하는 것임을 알 수 있다.

실수에서 복소수로 확장되는 것이 실수로부터의 계속되는 유추의 결과이듯이 복소수의 표현도 R^2 평면에서 C평면으로 유추함으로써 도입될 수 있다. 모든 음수가 (-1)과 대응하는 양수와의 곱이므로 $\sqrt{-1}$에 대한 수를 도입하면 충분하다. 이러한 생각은 수직선의 한 부분이 양수, 다른 한 부분이 음수라는 사실로부터 가우스 평면에서 가로축을 실수축, 세로축을 허수축이라고 유추하는 것을 자연스럽게 한다. 그러면 복소수 $z=x+iy$는 순서쌍 (x,y)를 좌표로 갖는 평면상의 점으로 표현되고, x축과 y축의 점은 각각 복소수 $z=x+0i$, $z=0+iy$에 대응되며, 복소수의 실수부와 허수부는 현실적인 직관적 해석을 얻게 된다. 실수 평면 R^2에서 원점으로부터 점 (x,y)에 이르는 거리가 $\sqrt{x^2+y^2}$ 인 것으로부터 하나의 복소수 $z=x+yi$의 절대값 $|z|$을 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$라고 유추를 통해 정의할 수 있게 한다. 또한 복소수의 덧셈과 뺄셈은 힘의 덧셈과 뺄셈과 같이 벡터로서 표상 가능한 실제적인 대상이 되어 기호적 표현에서 기하적 표현으로 현실적이고 직관적인 의미를 부여하는 유추를 가능하게 한다. 기호표현을 기하학적 표현으로 옮기는 것은 보다 익숙한 느낌을 가져다주고, 가시적인 조작 가능성을 부여하여 직관적 수용을 용이하게 하는 효과가 있다. 이와 같이 수와 도형 사이의 기본적인 동형 대응에 근거해서 함수를 좌표평면에 기하학적으로 표현하여 생각하는 것 또한 대표적인 유추의 경우로 직관적으로 수용하기 쉬운 사고과정이며 Lakoff & Núñez(1997)는 이를 수체계와 좌표계 사이의 연결 은유로 설명하고 있다.

동형사상과 준-동형사상은 수학적 구조 관계를 명확하게 함으로써 수학의 응용을 가능하게 한다. 작게는 학생이 교과서의 응용문제를 푸는 것에서 크게는 과학자가 문제를 해결하기 위해 수학을 응용하는 것에 이르기까지, 수학의 응용 과정 자체는 유추적 추론과정이 된다. 수학의 응용 과정은 수학적 구조의 전이 과정으로 동형사상이 그 기반이 되는데 실제의 현상이나 상황의 구조를 A, 추상적인 수학적 구조 B라고 하고 서로 동형이라고 할 때 B→A, 즉 현상 A를 수학의 구조 B로 설명하는 것은 수학의 응용이며, 반대로 A→B는 구체적인 현상 A를 바탕으로 수학의 구조(개념) B를 이해하는 것으로 볼 수 있다. 예를 들어, 미분을 속도로써 이해할 수도 있고 속도를 미분으로 설명할 수도 있는 것이다. 따라서 수학 개념의 이해와 수학의 응용이 결코 분리되어 추구될 수 없는 수학 교육의 목표라는 것을 생각해 볼 때, 수학 개념의 이해와 수학의 응용이라는 양측면에서 수학적 사고에서 중심적인 역할을 하는 유추는 교육적으로 매우 중요한 수학적 사고로 강조되어야 하며 이와 관련된 많은 연구가 요구된다.

2. 문제해결과 유추

Polya(1986)는 문제의 제기가 수학을 창조하는 결정적인 사고 단계이며, 문제를 제기하고 형식화하는데 학생들을 참여시키는 것이 학습 동기를 유발시켜 줌은 물론이고 바람직한 과학적 태도를 가르치는 것이라는 점에서 강조하고 있다. 그러나, 문제를 발견하고 형식화하는 과정은 학교수학의 실제에서 대부분 결여되어 있으며, 이것은 학생들이 주어지는 수학 문제를 수동적으로 받아들이고 단순계산과 반복연습을 통해 답을 구하는 수준에 머무르게 하는 중요한 원인이 되고 있다. Polya는 문제 발견과정의 부재로부터 발생되는 학교수학의 이러한 문제점이 유추를 통해 보완될 수 있음을 보이고 있다. 유추를 통해 문제가 제시되면 학생들은 문

제가 체기되는 문맥을 자연스럽게 파악할 수 있으며 문제해결 수단도 함께 파악할 수 있는데 특히, 학생이 유추를 통해 스스로 문제를 제기하는 경우에는 문제가 제기되는 문맥을 이미 파악하고 있는 상태이므로, Polya의 발견술의 첫 번째 단계인 문제의 이해 과정이 생략될 수 있다 새로운 문제를 발전적으로 제기하는 것도 가능해진다. 다음과 같은 문제 제기의 예를 살펴보자.

① 가로와 세로의 길이가 각각 a,b인 직사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2}$ 이다. 가로와 세로의 길이가 각각 a,b,c인 직육면체의 대각선의 길이는 어떻게 되겠는가?

② 균질인 막대의 무게 중심은 그 막대의 두 끝점 사이의 거리를 1:1 비율로 분할한다. 균질인 삼각형의 무게중심은 각 꼭지점과 그 대변의 중점 사이의 거리를 2:1 비율로 분할한다. 그러면 균질인 사면체의 무게 중심과 각 꼭지점 및 그 대면의 무게 중심 사이의 거리는 어떻게 되겠는가? (Polya, 1986, p.241)

이러한 문제의 제기는 각각 다음과 같은 비율적 유추 문제로 형식화될 수 있다.

①′ $[a,b] : \sqrt{a^2+b^2} :: [a,b,c] : ?1$

②′ [선분의 무게중심] :[1:1]
:: [삼각형의 무게중심]:[2:1]
:: [사면체의 무게중심]: ?

학생들은 위와 같은 유추를 통해 문제제기의 문맥을 자연스럽게 이해할 수 있으며 그 결과를 추측할 수 있다. ①′과 같은 유추에서 학생들이 피타고라스의 정리를 이용하여 직사각형의 대각선을 구했다는 것을 알고 있다면 그것을 문제해결 과정에 곧 적용시켜보려고 할 것이다. ②′은 일종의 귀납에 의한 추론으로 이는 귀납이 자연스럽게 유추에 근거하고 있음을 보여주고 있으며, 계속되는 유추는 n차원으로의 확장을 암시하여 새로운 문제로 발전적인 접근 가능성을 보여준다.

수학문제 해결과정에서 유추는 강력한 사고 도구이다. 그러나 '교사는 정원사이다'와 같은 일상적인 유추에서는 우리가 유사한 두 경험영역의 공통 구조에 주의를 쉽게 집중하여 별다른 노력 없이도 그 구조를 즉시 이해할 수 있는 반면, 수학의 문제해결에서 요구되는 유추는 대부분 즉각적으로 이루어지지 않는다. Vosniadou & Ortoney(1989)는 유추를 관계로 이루어진 두 개 이상의 집합간에 어떤 대응을 만들어 냄으로써 미지의 요소를 알아내는 것으로 정의하고 있는데, 그러한 대응을 생성하는 신속성의 차이는 사상되는 집합 사이의 구조의 수준에 따라 결정될 것이다. 따라서, 수학 구조의 추상성, 복잡성 등은 유추가 이루어지는 대응을 방해하는 요소일 것이며, 수학적인 유추는 일상적인 유추와는 달리 보다 자신의 수학적 지식을 검토하여 구조의 공통성이나 유사성을 찾으려는 의식적인 노력과 효과적인 방법이 요구된다고 볼 수 있다. 이러한 측면에서 수학문제 해결과정 상의 유추는 유추를 문제해결에 이용하려는 의식적인 노력을 통해 수행되는 사고과정으로 발견술적인 측면을 갖는데, 片桐重南(1988, p.128)은 이를 유추와 유추적인 생각으로 구분하고 있다.

Polya(1986)의 발견술은 많은 부분이 유추의 발견술적인 측면을 구체적이고 효과적으로 체계화한 것으로, 그림을 그리게 하고, 문제를 본적이 있는지, 관련된 문제, 유사한 문제를 알고 있는지, 관련된 문제의 방법이나 결과를 활용할 수 있는지, 또한 문제의 구조를 단순화하거

나 일반화할 수 있는지 검토하도록 하고 있다. 특히, Polya(1954)는 유추를 통한 피타고라스의 정리의 증명과정을 제시하면서 일반화와 특수화가 유추의 두 측면으로 수학적 발견과 문제해결을 위한 강력한 사고전략이 된다는 것을 밝힌 바 있다. 따라서 학생들로 하여금 유추의 발견술적인 측면, 즉 유추의 기본적인 착안점을 찾고 유추를 이용하는 태도를 습득하게 하는 것은 수학적 구조에 의식적으로 주목하도록 함으로써 문제해결 능력을 신장시킬 수 있을 것이며, 이러한 태도를 학생들이 갖도록 하는 것이 문제해결 교육에서 필수적이므로 학생들이 유추를 의식적으로 사용할 수 있도록 하는 교수 방안에 대한 연구가 요구된다.

III. 은유와 환유

1. 은유이론과 '수학적 아이디어 분석'

Lakoff & Johnson(1980, p.21)에 의하면 개념체계는 우리의 일상적인 실재를 규정하는데 핵심적인 역할을 하며 개념 체계의 본성은 본래 은유적인 것으로, 은유는 우리의 언어뿐만 아니라 사고와 행위에 넓게 퍼져 있어 우리의 사고 방식, 경험 대상, 일상 행위 등은 매우 중요한 은유의 문제가 된다. 또한 인간의 모든 사고와 이해의 뿌리는 신체적 경험과 활동에 있으며 개념체계는 이러한 신체적 경험과 활동 속에서 끊임없이 되풀이되는 단순구조인 이미지스키마로 분해될 수 있다[4]. Lakoff와 Johnson(1980, p.4)은 이와 같은 자신들의 철학적 입장을 체험주의(experientialism)라 부르고 있는데 체험주의에서 지식은 결코 명제적인 속성으로만 이루어진 것이 아니라 경험과 활동에 근거하며 그에 따른 형태(gestalt)와 다양한 이미지-스키마를 포함하는 것이다. 이처럼 개념구조가 근본적으로 신체적 경험과 결부되어 있으므로 수학 지식을 구성하는 것도 그러하며 수학의 추상적인 사고도 이미지-스키마와 은유적 사고에 기초한다. 여기서 은유적 사상은 추론구조와 이미지-스키마 구조를 보존하며 표적영역에 구조를 덧붙이기도 하는데 수학적 증명이 안정된 이유 중의 하나는 수학적 아이디어에서 중심적인 개념적 은유의 추론구조가 안정되기 때문이며[5], 이러한 은유의 특징이 정리가 일단 증명되면 증명된 것으로 인정되는 이유가 된다 (Lakoff & Núñez, 1997, p.30).

MacLane(1981)은 세기, 측정하기, 모양 만들기, 조립하기 등의 인간 활동이 각각 산술, 해석학, 기하학, 군론 등의 여러 수학 분야와 관련되며 이를 기초로 수학은 대상과 연산(덧셈, 곱셈, 크기의 비교)을 암시하는 다양한 인간 활동에서 시작해서 형식적 공리체계(Peano의 산술체계, Euclid 기하, 실수 체계, 체론 등)에 포함되는 개념에 이르게 된 것으로 결론을 내리고, 수학에서 사용되는 형식은 인간활동에서 나온 것이며 그러한 활동을 이해하기 위해 사용되므로, 수학이 형식적(formal)이지만 형식주의적(formalistic)인 것은 아니라고 말한다. 이러한 맥락에서 Lakoff(1987)는 수학의 발전이 많은 사람들이 오랜 시간에 걸쳐 현상을 주의

4) 이미지-스키마는 공간 추론을 특징짓는 기초 역학적이고 위상적인 방향구조로 시각-운동 경험에 언어를 연결시키는 역할을 하며 언어와 즉각적인 몸짓, 특히 공간적 관계에 대한 언어 표현을 통해 경험적으로 연구될 수 있다. 이미지-스키마의 중요한 특징은 그 추론구조가 은유적 사상아래서 보존된다는 것이다 (Lakoff & Núñez, 2000).

5) 개념적 은유는 문학에서의 비유법인 은유적 표현과는 다르며 범주나 인지모형 사이를 연결하는 비대칭인 사상으로 'B는 A이다(A→B)'와 같이 표현된다(Lakoff & Núñez, 1997, p.35).

깊고 통찰력 있게 관찰하고 현상을 보통의 일상적인 언어로 모순 없이 이해한 다음 그에 대응하는 수학 용어로 번역함으로써 이루어진 것이며, 여기서 수학의 성공의 핵심은 경험을 기본적인 인지적 개념으로 이해하는 인간의 능력이므로, 수학에 대한 유일한 기초는 존재하지 않고 수학의 여러 가지 기본적 아이디어를 사용해서 경험을 이해하는 방식은 다양하게 존재한다는 것이다. 따라서 Lakoff와 Núñez(1997)에게 있어 인간의 관념은 일상적인 인지와 인체의 메커니즘에 기초하고 수학은 플라토닉한 초월적인 존재가 아니며, 수학의 본질은 인간적인 수학적 아이디어이고 형식적 증명, 공리, 정의 등은 그러한 수학의 일부일 뿐인 것이다[6].

수학이 인간의 활동을 바탕으로 하고 인간의 활동은 일반적인 스키마 구조를 가지고 있으므로 수학의 기본적인 아이디어인 대응, 연속성, 순서, 유계 등은 이미지-스키마인 연결, (이동의) 경로, 방향, (용기의) 경계 등에 각각 대응되며 이러한 이미지-스키마는 추론구조의 바탕이 된다. 또한 대부분의 추론이 개념망을 이루는 수학적 아이디어를 사상하는 개념적 은유를 통해 무의식적으로 발생하게 되므로 Lakoff와 Núñez(2000)는 경험적인 언어분석을 통해 이미지-스키마와 개념적 은유를 밝히는 것을 주요 목표로 하는 '수학적 아이디어 분석(Mathematical Idea Analysis)'을 제안한다. MIA는 수학을 구성하는 개념적 구조의 바탕인 수학적 아이디어에 대한 인지과학적 연구이며 자동적이고 무의식적인 수학적 이해를 결정짓는 메커니즘을 분석하는 것으로서 일상적인 개념과 인지적 메커니즘이 어떤 방법으로 수학의 예리한 추론 구조를 제공하는지 밝히고자 하는 것이다.

2. 수학에서의 개념적 은유

Lakoff와 Núñez(1997, p.34)는 수학적 아이디어를 형성하는 기본 은유로 기초 은유(grounding metaphor)와 연결 은유(linking metaphor)를 제시하고 있다[7]. 기초 은유는 수학개념을 표적영역으로 하고 우리의 일상경험을 바탕영역으로 하는 사상이다. 즉, 산술연산은 실생활에서 우리가 사물을 모으고, 구성하고, 공간을 통해 이동시키는 등의 일상경험을 통해 개념화된 것으로 그 개념화 과정에 기초 은유가 작용하고 있는 것이다. 또한, 연결 은유는 수학의 한 분야를 그와는 다른 수학 분야와 연결시키는 은유로 '집합론은 그래프이론이다'와 같은 것이 해당된다.

기초 은유는 일상경험을 바탕으로 수학을 이해하게 하므로 교육에서는 새로운 주제를 도입하기 위해 주로 사용할 수 있다. 다음은 Lakoff와 Núñez(1997)가 이끌어낸 기초은유인 '산술은 물건의 모임이다'인데, 근원영역에서 표적영역으로 옮겨지는 관계구조의 사상을 보여주고 있다[8].

다음 표에서, 우리가 물건을 모으고 무게를 재며, 다양한 물건의 모임을 만드는 등의 활동이 양, 등식, 산술의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 등을 이해하고 사용할 수 있도록 하는 근거가 되는 것이 드러난다. 수학적 대리인(mathematical agent)은 근원영역에서 수학의 어떤 측면

6) 이러한 입장에서 Lakoff와 Núñez(1997, p.21)는 수학의 본질이 보편적이고 객관적이며 인간의 마음과는 무관하다고 가정하는 관점을 '마음과 무관한 수학(mind-free mathematics)'라 규정하고, 수학이 수학답게 되는 것은 의미있는 수학적 아이디어라고 하면서 '마음에 근거한 수학(mind-based mathematics)'을 주장한다.

7) Lakoff와 Núñez(2000)는 여기에 재정의적 은유(Redefinitional metaphors)를 추가하였다. 본 고에서는 기초은유와 연결 은유만을 다룬다.

8) 이것은 Lakoff와 Núñez(1997)가 수집한 영어 표현을 바탕으로 분석한 것을 단순하게 번역한 것이다

근원 영역(물건의 모임)		표적 영역(산술)
균일한 크기의 물리적 물건의 모임	→	수
물건을 모으는 것	→	수학적 대리인
물건의 모임을 만드는 것	→	산술 조작
물건의 모임	→	산술 조작의 결과
가장 작은 모임	→	단위(일)
모임의 무게	→	수로 측정된 양
물건의 무게를 재는 저울의 균형이 맞음	→	등식
어떤 모임을 다른 모임과 합쳐서 더 큰 모임을 만드는 것	→	덧셈
큰 모임에서 작은 모임을 덜어내어 새로운 모임을 만드는 것	→	뺄셈
각 행동을 수행할 때마다 단위를 더하는 것	→	행동이 수행된 횟수
주어진 횟수와 동일하게 덧셈을 반복하는 것	→	곱셈
모임을 제시된 작은 크기의 모임으로 나누어 놓는 것	→	나눗셈
아무 것도 없는 모임	→	0

표 III.1 기초은유 '산술은 물건의 모임이다'에 의한 사상

을 특징짓는 역할을 하는 것으로 가정되는 이상적인 배우인데, 덧셈을 물건을 모아 놓은 것으로 개념화하는 경우 수학적 대리인은 그것을 모으는 역할을 한다. 위의 기초은유는 산술을 개념화[9]하는데 사용될 뿐만 아니라 우리가 산술에 대해 말할 때 사용하는 언어의 기초를 형성하여, '일조는 *큰* 수', '20 *안에는* 5가 몇 개 *들어 있는가*?', '12(개)에서 5(개)를 빼면 7(개)이 *남는다*', '10안에는 2가 *몇 개* 들어 있는가?', '8은 5보다 3*만큼 많다*' 등의 문장에서 알 수 있듯이 수를 물건으로 생각하고 표현하게 한다. 즉, 산술에 대한 기초 은유 '산술은 물건의 모임이다'가 수에 대해 '크다', '안', '남는다', '들어 있다', '더 많다'등의 단어사용을 일반화시킬 뿐만 아니라 사용된 단어가 근원영역인 물건의 모임에서 공급하는 추론 패턴을 일반화시키고, 수에 대해 추론을 할 때 그러한 추론 패턴이 사용되도록 작용하는 것이다. 따라서 언어표현이 개념적 사상의 체계성을 설명해 주고 개념적 사상의 존재성에 대한 증거를 제공하므로, 개념적 은유에 대한 연구는 언어표현 연구가 출발점이 된다.

기초 은유가 친숙한 경험이라는 영역에서 수학을 이해할 수 있도록 해주는 것인 반면 연결은유는 수학의 분야를 다른 분야로 연결시키는 것을 가능하게 하는 은유이다. 즉, 수학의 한 분야에 대한 이해를 수학의 다른 분야로 투사하는 것이다. 다음은 Lakoff와 Núñez(1997)가 제시한 연결 은유 중 '산술은 기하이다'이다[10].

근원 영역(기하)		표적 영역(산술)
직선 위의 점	→	수
원점	→	0
(원점으로 부터의) 거리	→	양
(수직 방향의 직선에 대해) 위	→	더 크다
(수평 방향의 직선에 대해) 오른쪽	→	더 크다

표 III.2 연결은유 '산술은 기하이다' 의 사상

이 은유는 Euclid 기하를 산술 위로 사상하여, 기하영역과 산술영역을 연결한다. 특히, 이 은유는 근원영역과 표적영역의 합성인 은유적 혼합(metaphorical blend)을 형성할 때 사용되는

9) Lakoff와 Núñez(1997)는 산술을 개념화하는 기초 은유로 위에서 제시한 은유 이외에도 '산술은 물건의 구성이다'와 '산술은 이동이다'라는 기초은유를 제시하고 있다.

10) 연결은유는 이외에도 '함수는 산술이다', '산술은 기하이다', '집합론은 그래프이론이다'등이 있다.

데 이 때, 은유적 혼합은 수와 직선 위의 점의 합성인 수직선이다.

3. 교육적 은유

개념적 은유가 우리의 일상 경험에 의해 동기화 되어 개념을 구조화하고, 인간의 사고과정에 무의식적으로 개재되어 수학의 이해와 추론에 영향을 미치는 자연발생적인 것이라면, 교육적 은유는 학교에서 실제로 많이 사용되는 인공적인 은유로 특정한 교수 측면에서 유용하도록 비유, 교구나 상황을 통한 활동, Dienes 자료나 Cuisenaire 색막대, 수나 도형의 그림표현 등과 같은 Fischbein의 수학 외적인 유추모델 등을 도입하는 것과 관련된다. 이러한 교육적 은유는 개념적 은유를 확장하거나 한 개 이상의 은유를 복합해서 만든 새로운 은유를 사용할 수 있는데, 인간의 사고가 은유적이라는 은유이론의 측면에서 볼 때, 인간의 사고과정에 개재하는 개념적 은유를 교육적 은유로 확장하거나 복합적으로 활용하는 것은 수학개념에 대한 학생들의 자연스러운 이해와 수학적 사고의 발달을 가능하게 할 것으로 생각된다.

우리의 경험에 기반하는 기초 은유는 수학의 개념을 부분적으로만 이해 가능하게 하므로 기초 은유를 혼합하거나 새롭게 확장하여 인공적인 은유를 만들어 특정한 교수 목적을 위해 사용할 수 있다. 예를 들어 기초 은유 '산술은 물건의 모임이다'를 어떤 상황을 통해 음수의 범위까지 확장할 수도 있으며, 이렇게 도입된 상황도 음수에 대해 부분적인 이해만을 가능하게 하고 인위적인 면을 갖는다. 기초 은유가 수학 개념에 대응하여 모순 없이 자연스럽게 확장되기 어렵기 때문에 교사와 학생들은 여러 가지 은유를 동시에 사용할 수 있다. 이 때, 여러 가지 표적 개념을 근원영역과의 관계를 통해 서로 연결시키기 위해 같은 근원영역을 가진 여러 가지 은유를 사용할 수 있으며, 단일한 표적개념의 이해를 위해 근원 영역은 다양하나 표적이 공통인 몇 가지 은유를 사용할 수도 있다. 예를 들어, 기초 은유 '산술은 이동이다'와 공간을 통한 '이동'이라는 동일한 근원영역을 가진 '변수는 여행자이다'와 같은 은유를 사용하여 변수와 산술을 연결할 수 있으며, 산술을 이해하기 위해 산술에 대한 여러 기초은유를 동시에 사용할 수 있는 것이다(Chiu, 1996, p.137).

4. 환 유

은유가 원칙적으로 한 사물을 다른 사물의 관점에서 생각하는 방식으로, 그 중요한 기능이 이해인 반면, 환유는 1차적으로 지시 기능을 가지며 한 개체를 대신하여 다른 개체를 사용하는데, 현저하게 관계된 속성이나 물건이 다른 것을 나타내는데 사용되는 정식의 환유(metonymy proper)와 전체와 부분, 부분과 전체의 관계로 나타나는 제유(synechdoche)로 나눌 수 있다. 예를 들어 일차함수 $y=2x+1$의 그래프($\{(x, y) \mid y=2x-1\}$)를 $y=2x+1$로 표시하는 것은 그래프를 특징짓는 방정식으로 그래프 전체를 표시하는 환유이며, $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\cdots$ 에서 $\frac{2}{3}$가 대표로 사용되는 것은 부분으로 전체를 나타내는 환유이다. $y=2x+1$가 문맥에 따라서 일차함수, 미지수가 2개인 일차방정식, 일차함수의 그래프 등 여러 의미를 가질 수 있다는 점에서 알 수 있듯이 환유는 중의성을 그 특징으로 하며 또한 복잡한 기호를 생략하여 간단하게 표현하므로 필요한 것만을 효과적으로 부각시켜 전달함으로써 경제적인 의사소통을 가능하게 한다. 이러한 측면에서 환유는 수학 기

호체계의 기초가 되는데, 'x를 임의의 정수라고 하자', '△ABC를 임의의 삼각형이라고 하자' 등과 같이 어떤 집합, 원리나 수학적 개념을 나타내는 문장은 환유를 사용하는 것이다 (Presmeg, 1997, p.271). 또한 교과서에 그려지는 대부분의 도형 그림은 첫째, 개념의 원형으로서 둘째, 증명 과정과 설명과정에서 일반성과 대표성을 갖는 임의의 예로서 셋째, 추상적인 수학개념인 도형이 폭이 있는 선을 가진 실재 그림으로 그려진다는 점에서 환유적이다.

환유는 위에서 언급한 것과 같은 지시 기능만을 갖는 것은 아니며 환유 역시 이해를 돕는 기능을 수행하고, 지시되고 있는 어떤 측면에 좀더 구체적으로 초점을 맞추게 한다. 특히, 하위 범주나 범주의 구성원이 어떤 목적 하에 전체 범주를 나타낼 때, 잠재적인 원형효과를 가지는데[11], Lakoff(1987)는 개념 체계에는 추론을 하거나 판단을 내릴 목적으로 범주의 한 구성요소나 하위범주가 범주 전체를 나타낼 수 있는 수많은 환유모델이 존재한다고 주장한다. 그가 제시한 대표적인 환유모델 중 수학과 직접적으로 관련된 모델로는 전형적인 예와 생성원, 하위모델 등이 있다.

전형적인 예와 관련되는 원형은 개념의 외연적인 측면, 내포적인 측면, 개념의 위계 구조적인 측면 등에서 생각해 볼 수 있는데, Rosch는 원형이 인지적 표준점(cognitive reference point)으로서 범주 내에서 특별한 인지적 위상을 차지하며 학습, 짝짓기, 기억, 유사성의 판단 등이 이 인지의 표준점으로 수렴한다는 것을 여러 가지 실험을 통해 보였다. 다음은 원형과 관련된 Rosch의 실험결과를 평행사변형의 예에 적용하여 생각하여 본 것이다[12](Lakoff, 1987, 재인용).

피험자들은 그림 Ⅲ.1에서 그림 1-1이 전형성이 가장 높은 것으로 생각하며[13], 평행사변형임을 판단하는 시간에 있어 그림 1-1에 대한 반응이 가장 빠르고, 다른 그림들이 그림 1-1과 비슷하다고 생각하는 경향이 그 반대로 생각하는 것보다 높으며(유사성의 비대칭성), 원형인 그림 1-1에 관한 새로운 정보를 비전형적인 구성원으로 일반화시켜 가는 경향이 그 반대의 경우보다 높았다(일반화에서의 비대칭성). 이러한 측면에서 범주는 Wittgenstein의 가족적 유사성으로 구조화되어 있는 것이다. 이 실험의 결과는 평행사변형이라는 용어의 정의를 이해하거나 평행사변형에 관한 명제를 증명하는 과정에서 전형적인 그림 1-1을 사용하고 그것을 통해 추론하려는 경향이 존재함을 설명해주는데 수학 교과서에서 평행사변형에 대한 그림 중 그림 1-1이 대부분을 차지한다는 것은 이러한 실험결과를 간접적으로 뒷받침한다고 볼 수 있다.

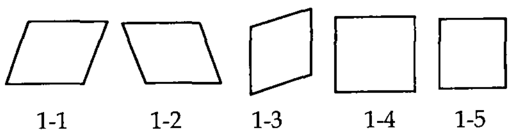


그림 III.1 평행사변형

11) Aristotle에 따르는 범주에 대한 고전적 견해에서는 어떤 범주의 구성원들은 그 범주를 결정하는 필요충분적인 속성을 공유하여 모든 구성원은 서로 동등한 지위를 갖게 되며 구성원간의 관계는 대칭적인 반면 Rosch의 원형이론에서 원형은 주변의 구성원보다 특별한 지위를 갖는다. 범주의 구성원 사이의 비대칭성을 원형효과(prototype effect)라 하며 원형효과의 중요한 발생원인의 하나는 환유이다. 즉, 부분(하위 범주나 구성원)이 추론이나 인식을 할 때 범주 전체를 나타내는 경우이다(Lakoff, 1987). 이러한 측면에서 몇몇 인지 학자들은 환유가 가장 이상적인 인지모델이라고 주장하며 Lakoff와 Johnson은 환유란 단순히 언어에 그치는 문제가 아니라 언어의 테두리를 벗어나 좀더 인식론과 맞닿아 있는 문제라고 결론짓는다(김욱동, 1999, p.109).

12) Rosch는 색채, 새, 의자 등으로 실험을 했고 다음의 설명은 그 결과를 평행사변형이라는 개념에 대해 연구자가 임의적으로 적용하여 설명한 것이며, 어떤 실험적인 데이터에 근거한 것이 아니다.

13) 이것은 그림 1-1이 평행사변형의 원형에 해당한다는 연구자의 해석에 근거한다.

Austin은 한 단어가 갖는 의미에 있어 일차적으로 핵이 되는 의미, 즉 원형이 있음을 지적하였는데, 의미도 원형이 되는 의미로부터 다른 의미로 확장된다. 다음과 같은 평행사변형의 여러 의미를 생각해보자.

① 두 쌍의 대변이 평행한 사각형
② 두 쌍의 대각이 각각 서로 같은 사각형
③ 두 개의 대각선이 서로 다른 것을 이등분하는 사각형
④ 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같은 사각형

물론 ①, ②, ③, ④는 수학적으로 서로 동치이다. 이것은 일상적인 단어의 여러 가지 의미 사이의 관계와는 차이가 있지만 일반적으로 평행사변형의 정의로 삼는 ①이 그 의미에 있어 원형적인 위치를 차지한다고 볼 수 있다. 즉, ①, ②, ③, ④ 중 어느 것에서 출발하여도 수학적으로는 같은 결과를 얻겠지만 그 출발을 ①로 하는 것이 가장 자연스러울 것이다.

평면도형-사각형-사다리꼴-평행사변형-직사각형-정사각형, 탈것-차-승용차-스포츠카-페라리 등과 같은 개념의 위계 구조에서 Rosch는 중간에 위치하는 기본층위의 범주가 상위 범주나 하위 범주보다 보다 특별한 성질을 갖는다는 것을 발견하였다(Lakoff, 1987). 이는 기본층위의 범주가 하나의 원형범주로 기능한다는 것으로 Lakoff(1987)의 해석에 따르면 다음과 같은 상황이 발생하게 된다.

첫째, 기본층위의 범주에는 형태(Gestalt) 지각이 집중되고 단일한 심적 이미지를 수반하므로 삼각형과 사각형 구분은 평행사변형과 직사각형의 구분보다 더 빠르게 있어난다. 둘째, 의사소통의 측면에서 기본층위의 단어는 형태가 가장 짧고 일반적으로 사용되며 문맥적으로 중립적이어서 삼각형(세모)이나 사각형(네모)이 평면도형이나 직사각형, 정사각형보다 형태적으로 짧고 아동들이 먼저 습득하게 되는 용어이다. 셋째, 범주의 구성원의 대부분의 속성은 기본층위 범주에서 축적되므로 사각형이나 차에는 사다리꼴, 평행사변형, 승용차, 스포츠카 등의 대부분의 속성이 들어 있다. 넷째, 기본층위 범주는 기능적으로 일반적인 운동 프로그램(general motor program)과 관련되어 있어 자연수의 범주는 하위 범주인 짝수, 홀수, 소수, 3의 배수 등이나 상위 범주인 정수, 유리수 등과 비교할 때 물건을 세면서 손가락을 접는 활동과 직접적으로 연관된다.

생성원이란 작은 하위 범주로 범주 전체를 만들어내는 것을 말한다. 대부분의 사람들에게 자연수란 0에서 9까지의 정수에 기본 덧셈과 곱셈 및 산술의 규칙을 부가함으로써 특징지어지는 수이다. 0에서 9까지의 숫자 하나만으로 나타내어지는 수는 범자연수 범주의 중심적인 구성원이다. 즉, 0에서 9까지의 수에 일반적인 산술의 원리가 주어지면 자연수의 범주가 생성되고, 동시에 여기서 쓰고 있는 뜻의 환유적인 성격을 가진 모델이 생겨난다. 즉, 자연수 범주 전체가 0에서 9까지의 수라는 하위 범주에 입각해서 이해되며, 수 표기 체계에서도 임의의 자연수를 0에서 9까지의 수의 연쇄로 쓸 수 있는 것이다. 유리수, 실수 등도 환유모델에 의해 생성되는데 유리수는 자연수의 비로서 이해되고, 실수는 자연수가 무한히 계속될 수 있는 연쇄로서 이해된다. 즉, 유리수와 실수는 자연수를 원형으로 해서 환유적으로 생성되고 이해되는 것이다. 그러나 짝수, 홀수, 소수, 비소수 등과 같은 범주는 환유적인 것이 아니라 고전적인 Aristotle적인 논리에 의해서 구성되어 있는 것이다.

하위 모델이란 범주를 이해하는데 하위 범주

를 사용하는 것을 가리킨다. 예를 들어 수의 상대적인 크기를 이해하는데 있어 10, 100, 1000 등의 10^n꼴을 사용하는 것과 같은 것이다. 이와 같은 하위 모델의 구성원은 Rosch의 인지적 표준점으로 추론, 특히 계산하고 크기를 어림할 때 특별한 지위를 차지한다. 그래서 '100은 거의 98에 가깝다'라는 진술보다는 '98은 거의 100에 가깝다'라는 진술이 참으로 받아들여지는 것이다[14].

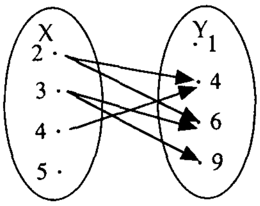
IV. 수학 교과서에서의 유추와 은유

1. 개념과 유추

교과서[15]에서는 유사성에 비추어 비교하여 설명하는 표현으로 '~같이', '~듯이'[16], '~에서 알 수 있듯이', '~와 마찬가지로', '일반적으로' 등을 사용하여 예와 개념을 연결시키고 있으며 이는 학생들이 직관적 이해를 기대하는 표현이라 볼 수 있다. 특히, 용어를 정의하거나 원리를 일반화시키는데 있어 간단한 예를 많이 사용하고 있으며 대부분의 예는 사전의 예이며 도형 영역에서는 사후의 예가 사용된다.

· 'y는 x의 배수이다'인 관계를 위의 그림과 같이 나타낼 수 있다.

이와 같이 X의 원소에 Y의 원소를 짝지어주는 것을 X에서 Y로의 대응이라고 한다(중1, p.145).



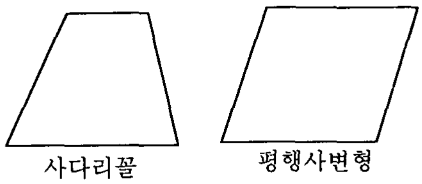
· $5x \times 3y = (5 \times 3) \times x \times y = 15xy$

이와 같이, 두 단항식의 곱셈은 계수의 곱에 문자를 곱하면 된다(중2, p.20).

· $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$ 일반적으로, 다음과 같은 관계식이 성립한다(중2, p.23).

· [사다리꼴의 정의] 한 쌍의 대변이 평행한 사각형

[평행사변형의 정의] 두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형(중2, p.195).



다음은 무리수나 자연수와 같은 수의 영역과 다항식의 영역, 부등식 영역과 방정식 영역, 유리수 영역과 자연수 영역 등에서 두 영역의 관계적 유사성을 파악하도록 하는 표현이다.

· $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$의 계산은 이를테면, $\sqrt{2}$를 다항식 $3a+5a=8a$로 보아 다음과 같이 계산할 수 있다(중3, p.34).

· *자연수의 소인수분해와 같이* 다항식을 몇 개의 식의 곱 꼴로 나타내는 방법을 생각해 보자(중3, p.61).

14) 이것이 일반적이기는 하지만 문맥에 따라 다음 문장과 같이 다르게 나타날 수도 있다. "A의 현재 체온은 27℃로 정상체온 26.5℃에 가깝다."

15) 사용된 교과서는 참고문헌에 제시된 중학교 수학 1, 2, 3 각 1권씩이며, 이를 각각 중1, 중2, 중3으로 표시하였다.

16) 보통 'A는 B와 같다'라는 형태로 표현되는 직유는 유추의 한 형태이며, 은유를 내적 유추, 직유를 외적 유추라고 구분하기도 한다(Presmeg, 1998). 본 고에서는 직유를 유추로 보는 이러한 관점을 받아들인다.

· 부등식에서도 *방정식과 마찬가지로*, 부등식을 참이 되게 하는 x의 값을 그 부등식의 해라고 한다(중2, p.87).

· 부등식의 응용문제도 *방정식과 같은* 방법으로 푼다(중2, p.106).

· 실수의 절대값도 *유리수일 때와 같이*, 수직선 위에서 원점과 그 실수의 대응점 사이의 거리를 말한다(중3, p.23).

· 유리수에서도 *자연수와 마찬가지로*, 수직선 위에서 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수보다 크다고 말한다(중1, p.58).

다음에서는 구체물이나 그림 등의 외적모델과 개념을 대응시키고 있다.

· 십진법 - 100원짜리 동전, 10원짜리 동전, 1원짜리 동전(중1, p.39)

· 양수, 음수 - 온도계(중1, p.55)

· 등식 - 저울

· 순서쌍 - 교실의 좌석 배치도(중1, p.158)

· 각의 이등분선 - 종이의 인접한 변을 맞춰 접었다 폈을 때, 생기는 선분(중1, p. 210)

· 도형의 합동 - 두 장의 종이를 겹쳐서 어떤 모양을 오리기(중1, p.223).

· 삼각형의 내각의 합 - 종이로 만든 삼각형에서 각 꼭지점 부분을 찢어서 붙이기(중1, p.229).

· 원과 직선의 관계 - 일출 장면(중1, p.239)

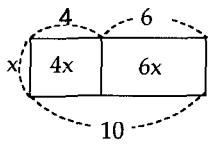
· 평면의 결정조건 - 세 연필의 끝점이 책받침을 지탱할 수 있다(중1, p.252).

· 회전체 - 도자기 선반을 회전시킨다(중1, p.261).

· 뿔의 부피 - 각뿔이나 원뿔 모양의 그릇에 가득 채운 물을 밑넓이와 높이가 같은 각기둥이나 원기둥 모양의 그릇에 부으면 기둥 높이의 1/3 만큼 물이 찬다(중1, p.270).

· 닮음의 위치 - 환등기로 어떤 도형을 비추어 만들어지는 상과 원래의 도형(중2, p.241)

· $4x+6x \overset{\text{분배법칙}}{=} (4+6)x$
$= 10x$



(중1,p.107)

2. 유추의 전이

교과서에서 예제와 유제[17]의 구조적 유사성은 대체로 높은 편이며 특히 대수부분에서 이러한 특징이 두드러져 보인다. 다음은 일차방정식의 활용문제에서 구조적 유사성을 반영하는 정도에 차이가 있는 두 가지 예이다(중1, pp.134~136).

위의 예제와 유제는 표면적으로는 시간, 속력, 거리가 관계되는 유사성을 갖고 있지만 구조적 유사성은 표 IV.1의 경우보다는 훨씬 낮다. 특히 학생들이 움직이는 물체인 기차의 길이를 유제에서 A와 B 사이의 거리로 대응시키

예제와 제시된 풀이(근원)	유제와 유추되는 풀이(표적)
두 개의 유리병 A, B에 약품이 각각 225 mL, 103 mL씩 들어 있다. 약품을 A에서 B로 몇 mL 옮기면 두 병의 약품의 양이 같아지는가?	두 개의 병A, B에 기름이 들어있다. A에는 400mL, B에는 100mL가 들어 있는데, A가 B의 3배가 되도록 하려면 A에서 B로 몇 mL를 옮겨야 하는가?
A에서 B로 옮겨지는 약품의 양을 x mL라고 하면 (A의 양)=(B의 양)이 되므로 $225-x = 103+x$, $-2x = -152$, $\therefore x = 76$ 답 76 mL	A에서 B로 옮겨지는 기름의 양을 x mL라고 하면 (A의 양)=3(B의 양)이 되므로 $400-x = 3(100+x)$, $400-x = 300+3x$, $-4x=-100$ $\therefore x=25$ 답 25 mL

표 IV.1 활용문제에서 구조적 유사성이 높은 경우

17) 예제 다음에 제시되는 문제를 유제라고 보았다.

예제와 제시된 풀이(근원)	유제와 유추되는 풀이(표적)
일정한 속력으로 달리는 기차가 길이 480m의 철교를 통과하는데 36초가 걸리고, 길이 360m의 굴을 통과하는데 28초가 걸린다고 한다. 기차의 길이를 구하여라.	A에서 B까지 자전거를 타고 시속 12 km로 가면, 시속 4 km로 걸어가는 것보다 1시간 빨리 도착한다고 한다. A와 B 사이의 거리를 구하여라.
기차의 길이를 x m라고 하면 (철교를 통과할 때의 속력) = $\frac{480+x}{36}$ (굴을 통과할 때의 속력) = $\frac{360+x}{28}$ 그런데 속력이 일정하므로, 구하는 방정식은 $\frac{480+x}{36}=\frac{360+x}{28}$ 위의 방정식을 풀면 $13440+28x=12960+36x$ $\therefore x=60$ 답 60 m	A와 B 사이의 거리를 x km라 하면 (A에서 B까지 자전거를 타고 갈 때 걸리는 시간) = $\frac{x}{12}$ (A에서 B까지 걸어갈 때 걸리는 시간) = $\frac{x}{4}$ A에서 B까지 자전거를 타고 갈 때, 걸어갈 때 보다 1시간 덜 걸리므로, 구하는 방정식은 $\frac{x}{12}+1=\frac{x}{4}$ 위의 방정식을 풀면 $x+12=3x$ $\therefore x=6$ 답 6 km

표 IV.2 활용문제에서 구조적 유사성이 낮은 경우

기보다는 자전거의 길이에 대응시키기 쉬울 것이라는 점에서, 예제와 유제의 관계적 유사성을 파악하기 힘들고, 유추적 전이도 상대적으로 어려울 것으로 예측된다. 교과서에서는 활용 문제에서 관련된 소재에 따라 속력, 농도, 도형의 넓이 등으로 예제와 유제의 유형을 분류하는 경향이 있다. 관련된 식이 유사하면 풀이 방식도 비슷할 것이므로 구조적 유사성이 잘 반영될 가능성이 높지만 표 IV.2의 경우와 같이 반드시 그런 것은 아니며 문제의 서술 방식, 문제에서 제시되는 상황 등과 풀이 방식 등을 종합적으로 고려해서 예제와 유제를 배치할 필요가 있을 것이다. 대부분의 학생들이 활용문제를 특히 어려워한다는 측면에서 예제와 유제의 유사성을 높임으로써 활용문제를 좀 더 쉽게 제시하는 것도 고려해 볼 수 있을 것이다.

4. 은유적 표현과 환유

다음의 은유적 표현에서 수, 동류항, 식 등을 물건처럼 모으거나, 묶고, 옮기며, 연결하고, 간단하게 만들 수 있으며, 분해할 수도 있는 대상으로 생각하며 근호도 안과 밖이 있는 용기로 다루고 있음을 알 수 있다.

· 3x-6=3의 좌변이 -6이 부호가 바뀌어서 +6이 되어 우변으로 *옮겨짐을* 알 수 있다(중1, p.127).
· 수를 *소인수분해한다*(중1, p30).
· 동류항이 있으면 *모아서 간단히 한다*(중2, p.38).
· 각 다항식을 괄호로 묶어, 기호 + 또는 -로 *연결한다*(중2, p.32).
· 다음 식의 괄호를 풀고 *간단히 하여라*(중2, p.33).
· …… 근호 밖의 수 2를 근호 *안에 넣어* $\sqrt{a}$꼴로 만들 수 있다(중3, p.29).

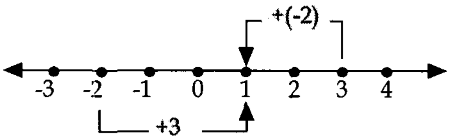
다음은 수직선 위의 점을 수로 보는 은유적 표현인데 Lakoff는 이것을 연결은유 '산술은 기하이다'에서 근원영역과 표적영역이 합성되는 은유적 혼합이라 보고 있다.

· *수직선 위에서 주어진 수*보다 얼마만큼

더 큰 수나 더 작은 수를 구할 수 있다(중1, p.60).
· 이것은 *수직선이 실수를 나타내는* 직선이라는 것을 말하고 있다(중3, p.22).

다음은 개념적 은유인 '산술은 이동이다'에 해당하는 은유적 표현으로 수의 크기를 수직선 위에서 이동하는 거리로 보고 있다.

· 3+(-2)는 '3보다 2*만큼* 작은 수'이고, (-2)+3은 '-2보다 3*만큼* 큰 수'이므로 두 수는 서로 같다. 즉, 3+(-2) = (-2)+3 (중1, p.69)

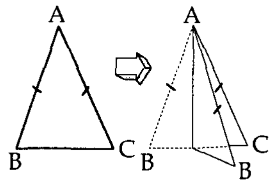


다음은 함수의 그래프가 방향을 잡아 스스로 움직이거나 그래프를 물건처럼 이동할 수 있는 대상으로 보는 은유적 표현이다.

· a>0이면 이 함수의 그래프는 오른쪽 위로 *향하는* 직선이다(중2, p.131).
· y=3의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 (0,3)을 *지나며*……(중2, p.137).
· 이차함수 $y=2x^2+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y=2x^2$의 그래프를 y축의 양의 방향으로 3만큼 *평행 이동시켜* 그리면 된다(중3, p.116).

다음은 도형을 종이와 같은 물질로 만들어졌다고 생각하는 은유적 표현이며, 도형을 접는 활동을 수학적 대리인이 수행하고 있다고 생각할 수 있다.

· $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC를 오른쪽 그림과 같이, 변 AB가 AC에 *겹쳐지도록 접으면,* $\angle B$는 $\angle C$와 겹쳐지는가? (중2, p.204)



· 원 O에 중심각 ∠AOB와 크기가 같은 중심각 $\angle A'OB'$을 잘라서 오른쪽 그림과 같이 *회전시키면,* 이 부채꼴은 부채꼴 OAB에 *포개어지는가*를 조사하여라(중3, p.209).

다음은 대상을 의인화하는 은유적 표현들로 수선의 발은 영어의 은유적 표현인 'foot of perpendicular'의 직역에서 비롯된 것으로 생각되는데, 영어 표현과는 달리 우리말에서는 의인화된 표현으로 해석되기 어렵다.

· 점 H를 점 P에서 $\overline{AB}$에 내린 *수선의 발*이라고 한다(중1, p.203).
· 두 수직선이 원점에서 서로 수직으로 *만나도록* 긋는다(중1, p.158).
· 이 이차방정식은 한 개의 근만을 *가진다*(중3, p.87).
· 이들 부등식을 동시에 *만족시키는* x의 값을 연립부등식의 해라 하고……(중2, p.103)

다음에서 부채꼴은 도형을 부채의 모양으로 특징짓는 환유이며, 이등변삼각형, 원소나열법, 조건제시법, 유한집합, 무한집합, 공약수, 최대공약수, 최소공배수, 십진법의 전개식, 역수, 동류항, 이항, 순서쌍, 수직이등분선, 활꼴, 외심, 무게중심 등 대부분의 용어가 환유적이다.

· *부채 모양과 같이,* 원 위의 두 점 A, B에 대하여 반지름 OA, OB와 호 AB로 이루어진 도형을 *부채꼴*이라고 한다(중1, p.237).

다음은 기호를 생략하여 나타내는 환유이다.

· sinA, cosA, tanA에서 A는 ∠A의 크기를 나타낸 것이다(중3, p.266)

자연수 전체의 집합에서 임의의 원소를 a, b, c로 나타내는 것도 환유이며, 미지수를 x라 놓는 것, 임의의 일차함수의 그래프를 y=ax+b라 표시하는 것 등도 이에 해당된다.

· 세 자연수 a, b, c에 대해서 a=b×c 일 때, b와 c를 a의 약수라고 한다(중1, p.25).

다음은 곱셈공식을 이용하여 계산할 때, Lakoff의 환유모델 가운데 '하위 모델'을 이용하는 것이다.

· $98^2=(100-2)^2=100^2-400+4=9604$ (중3, p.55)

VI. 결 론

Neves(1983), VanLhen(1983) 등은 새로운 개념을 이해하고, 알고 있는 개념을 확장시키며, 문제를 해결하는 중요한 사고 도구로서, 직관적이고 발견적인 특성을 갖는 유추는 긍정적 요소뿐만 아니라 부정적 요소도 가지고 있음에도 불구하고 인간이 가질 수 있는 가장 강력한 지식습득의 도구는 유추적 추론일 것이라고 주장한다(김영채, 1995, 재인용). 특히, 수학은 관계를 발견하고 구조를 연구하는 학문이므로, 유추는 비례적 추론과 수학의 이해와 응용 모두에서 무엇보다 중요한 사고도구로서, 수학적 사고 능력의 개발에 있어 중요한 역할을 한다. 형식불역의 원리에서 볼 수 있듯이 유추를 통해 수학개념을 확장할 수 있으며, 기호표현이나 기하학적 표현, 수학 외적인 모델로부터 유추를 함으로써 개념을 직관적으로 수용하는 것이 가능하다. 또한 유추는 흔히 일반화, 특수화와 함께 작용하는 강력한 문제해결 도구일 뿐만 아니라 문제제기 시에도 중요한 역할을 하는데, Polya가 제시한 발견술 중 많은 부분이 유추를 이끌어내기 위한 질문과 권고로 이루어져있음을 볼 때, 학생들이 유추를 이용하는 태도를 습득하도록 하는 지도가 요구된다. 또한 학생들이 문제가 제기되는 문맥을 자연스럽게 파악할 수 있도록 하면서 학습동기를 유발하는 유추적인 문항의 개발이 필요하다.

Chiu(1996)에 따르면 아는 것이 많은 학생일수록 은유를 더 많이 사용하는데, 학생들은 수학 개념과 알고리즘을 이해하기 위해 이전의 지식으로부터 은유를 구성하고 문제를 해결하기 위해 은유를 추이적으로 적용하며, 효율성을 향상시키기 위해 은유를 자동화시키는 등 수학학습에 있어 은유는 매우 중요한 역할을 하고 있다. 교사는 새로운 수학 주제를 도입할 때 기초 은유를 사용할 수 있으며, 또한 학생들이 수학의 한 분야에 대한 이해를 바탕으로 다른 분야를 이해하도록 할 때는 연결은유를, 그리고 특별한 점을 강조하기 위해서 인공적인 교육적 은유를 사용할 수 있다. 학생들은 여러 가지 다른 근원영역을 가진 다중 은유를 사용함으로써 각각의 은유가 갖는 한계와 근원과 표적 사이에 존재하는 모순을 뛰어 넘어 수학적 사고를 의미 있게 할 수 있는데 학교수업에서 교육적 은유를 도입할 때는 표적인 수학개념과 도입되는 근원영역이 구조적 동형성, 근원영역의 구조의 단순 명료성, 학생들에게 친숙한 일상의 경험구조나 이미 학습된 지식의 구조의 반영 정도 등을 고려해야 할 것이다. 또한 개념과 직관적 모델이 결코 완전한 동형을 이루지는 못 하므로 근원영역의 구조의 인

식은 표적영역의 구조에 대해 부분적인 이해만을 도울 것이다. 따라서 교사와 학생 모두 이러한 한계점을 파악하는 것이 필요하며, 교사는 사용된 유추나 은유의 결과로 학생들이 획득하는 개념이 어떤 것인지 확인하고, 개념적 사상을 용이하게 하는 다양한 방법을 개발하는 과정에서 자신의 역할을 충분히 인식하고 효과적으로 수행하여야 할 것이다. 이러한 측면에서 방정식의 풀이나 인수분해 모델로 Dienes가 제시하는 블록이나 점판을 이용한 활동은 그 구조가 수학개념과 동형이 되기는 하지만, 그 구조가 대단히 복잡하고 학생들에게 친숙한 일상적 경험구조나 지식 구조를 반영하지 않으며, 학생들의 은유적 사상을 위한 교사의 역할이 분명하지 않다는 점에서 그 한계가 있는 것으로 보인다. 적절하지 못 한 은유의 도입은 학생들에게 혼란과 어려움을 야기할 수 있으므로 유추나 교육적 은유의 선택과 사용에 있어 교사의 세심한 주의가 요구된다.

교과서에서는 개념의 정의와 함께 간단한 예를 제시하고 있는데 '~같이', '~듯이' 등의 직유적인 표현을 통해 예와 개념의 정의를 비교하게 함으로써 학생들이 개념에 대해 직관적인 이해를 하도록 유도하고 있다. 이러한 이해 과정에서 제시된 예는 그 개념에 대한 원형으로 표상될 것이며, 원형은 정의, 이해, 학습, 문제해결 등 모든 지적 활동에서 근본적인 역할을 하므로(Fischbein, 1987) 문맥을 고려하여 보다 효과적인 예를 선택하고 개발해야 할 필요가 있다.

교과서의 예제와 유제는 대수적인 계산 문제에서 구조적 유사성이 매우 높았으며 유제는 대체로 예제보다 문항수가 많고 약간 더 어려운 문제가 포함되어 있었다. 활용문제에서 예제와 유제는 속력, 농도, 도형 등의 소재에 따라 분류되는 경향이 있는데 속도-거리 공식, 농도 공식, 넓이나 부피 공식 등이 예제와 유제에 동시에 관련되므로 대개 구조적 유사성이 높으나 그렇지 않은 경우도 있다. 학생들은 대부분 활용문제를 매우 어려워하므로 활용문제의 예제와 유제는 구조적 유사성을 높임으로써 문제해결 과정에서 유추의 전이를 용이하게 하고, 보다 다양한 활용문제는 연습문제에서 다루는 방식을 고려해볼 필요가 있다고 생각한다. 수학 교과서에 제시되는 외적 유추 모델의 수는 학년이 높아갈수록 적어지는데, 이는 추상적인 개념일수록 학생들의 경험과 관련되는 구체물과 연관시키기가 어렵다는 것을 의미하며, 구체물은 도형영역에, 그림과 기하학적 표현은 대수영역에 상대적으로 많이 제시되어 있다. 교과서에는 여러 가지 유추모델이 제시되어 있는데, 많은 표현에서 유추를 통한 직관적인 이해를 요구하고 있으나 교과서에 제시되어 있는 모델과 개념 사이의 대응이 명확하게 서술되어 있는 경우는 드물고 또한, 서술되어 있는 경우라 하더라도 그 관계의 대응을 대부분의 학생들이 스스로 파악하기가 어려울 것이라는 점에서 기저인 유추 모델과 표적인 개념 사이의 관계의 대응을 명확히 하고 학생들의 사고를 자극함으로써 학생들이 유추를 통하여 이해하도록 유도하는 것은 전적으로 교사의 역할에 의존하게 된다.

교과서에는 다양한 은유적인 표현이 있으며 이들 표현은 Lakoff와 Núñez(1997)가 밝힌 개념적 은유를 실제적으로 뒷받침하는데, 언어분석을 통한 개념적 은유의 발견은 학생들의 개념형성과 관련하여 수학교육에서 중요한 의미가 있을 것으로 생각된다. 특히, 은유이론에서는 개념적 은유가 근본적으로 신체에 기반하므로 인간의 개념구조의 보편성을 설명하면서도, 개념적 은유의 사상이 그 본질에 있어 은유적인 일상적 언어를 통해 한 사회 문화권 내에서 발생되어 전달되고 보존되므로, 언어발

달이 사고발달에 중요한 영향을 미친다는 비고츠키적인 언어 상대주의적 관점을 자연스럽게 받아들이는 것을 가능하게 만든다. Choi와 Boweman(1991)은 한국어권, 영어권 아동들이 자신들의 언어를 기초로 물건 사이의 공간적 관계를 다르게 개념화하고 이해한다고 보고하고 있는데(Dirvin & Verspoor, 1998, pp.140-141, 재인용).

수학에서도 영어와 한국어의 차이만큼 그 개념화의 차이가 존재한다고 가정해 볼 수 있다.예를 들어 영어와는 달리 '수선의 발'은 의인화된 표현으로 생각되기 어려운데, 한국학생은 번역된 수학용어를 영어권 학생과는 다른 방식으로 이해하고 사용할 수 있는 것이다. 이러한 점에서 은유이론은 교사와 학생들이 수학시간에 사용하는 언어에 대한 연구의 필요성과 함께 한국인만의 독특한 개념적 은유의 존재 가능성도 제기한다. 따라서 교과서의 형식적 표현뿐만 아니라 교사가 구사하는 표현에 대한 연구를 통해 교사가 갖고 있는 개념적 은유가 학생들에게 어떻게 전달되고 해석되는가하는 것은 매우 중요한 실제적인 문제로, 학생들에게 기본적으로 형성되어 있는 개념적 은유와 교사가 구사하는 은유가 어떤 방식으로 통합되며 발전되어 가는지, 또한 그것이 학생들의 수학개념 형성에 구체적으로 어떤 도움과 한계를 가져다 줄 수 있는지 밝혀져야 한다. 또한 Núñez(2000)에 따르면 언어적 표현에 기초하여 학생들의 개념구조를 연구하는 것은 수학학습에 방해가 되는 어려움, 동기 부족, 불안 등의 근원을 밝혀 줄 수 있다고 한다. 이상과 같이 은유이론은 수학교육에서 새로운 연구방향과 방법의 가능성을 보여주고 있으나, 본고에서 언어분석을 통한 개념적 은유의 발굴이 아닌, 교과서의 은유적 표현에 대한 단순 조사에 머문 것은 그 한계점으로 계속된 연구의 필요성이 제기된다.

참고문헌

구광조, 황선욱(1994). 중학교 수학 1. 서울: 지학사.

김연식, 김홍기(1998). 중학교 수학 3. 서울: 두산동아.

박두일, 신동선, 강영환(1995). 중학교 수학 2. 서울: (주)교학사.

김욱동(1999). 은유와 환유의 언어학적 기초. 은유와 환유, 한국기호학회, 서울: 문학과 지성사, 97-115.

김영채(1995). 사고와 문제해결심리학. 서울: 박영사.

김진우(1999). 인지언어학의 이해. 서울: 한국문화사.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

______(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부.

정희자(1998). 은유의 해석에 대하여. 외대논총, 제19집, 85-111.

______(1999). 삶으로서의 은유. 외대논총, 제19집, 3호, 219-245.

하대현(1992). 수 유추 문제해결에 사용되는 메타요소적 전략계획에 관한 연구. 인제논총, 제 8권, 제 1호, 297-310.

English, L. D. (1997). Analogies, metaphors, and image: vehiecles for mathematical Reasoning. In Lyn D. English(Ed.), *Mathematical reasoning.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Chiu, Ming Ming(1996). Building mathematics understanding during collaboration: *Students Learning Functions and Graphs in an Urban, Public High School.*

Doctorial Dissertation, University of Calif-fonia, Berkely.

Dirver, R. & Vespoor, M. (1998). *Cognitive exploration of language and linguistics.* Amsterdam: Jhon Benjamins Publishing Company.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company

Gentner, Dedre. (1989). The mechanism of analogical learning. In Vosniadou & Ortony(Eds.), *Similarity and analogical reasoning*(pp. 199-241). Cambridge: Cambridge University Press.

Goswami, U. (1992), *Analogical reasoning in children.* Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1995). 삶으로서의 은유. 노양진 · 나익주 (공역). 서울: 서광사. (영어원작은 1980년에 출판).

Lakoff, G. (1987). *Women, fire, and dangerous thing. chicago*: The University of Chicago Press.

Lakoff, G. & Núñez, Rafael E. (1997). The metaphorical structure of mathematics: sketching out cognitive foundations for a Mind-based Mathematics. In D. Lyn(Ed.), *Mathematical Reasoning*(pp. 21-89). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Lamon, Susan J. (1995). Ratio and proportional elementary didactical phenomenology. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle(Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle Grades*(pp.167-198.). New York: State University of New York Press.

MacLane, S. (1981), Mathematical models : A Sketch for the philosophy of mathematics. *American Mathematical Monthly, Aug. Sept.*, 462-472

Núñez, Rafael E. (2000), Mathematical idea analysis: What Embodied Cognitive Science Can Say About The Human Nature of Mathematics. PME, Vol.1, 3-22.

Pólya, G. (1954). Induction and analogy in mathematics. Princeton NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1986). 어떻게 문제를 풀 것인가?. 우정호 역. 서울: 천재교육. (영어원작은 1986년 발행).

Presmeg, N. C. (1997a), Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In D. Lyn(Ed.), *Mathematical Reasoning*(pp.267-289), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Presmeg, N. C. (1997b), Generalization using imagery in mathematics. In Lyn D. English(Ed), *Mathematical Reasoning* (pp. 299-312), Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Analogies and metaphors in school mathematics

Lee, Seoung Woo (Seoul National University, Graduate School)
Woo, Jung Ho (Seoul National University)

The matter of understanding mathematical concepts in learning mathematics is one of the most important issues in mathematics education. There have been so many studies about it but the more practical study has been asked. When we Think using intuitional models such as examples, figures of speech, situations and activities, it is supposed that the major elements of cognitive mechanism are prototypes, analogies, metaphors and metonymies. In this paper, we tried to examine Rosch's prototype theory, the studies about analogies in congnitive psychology, Lakoff and Johnson's metaphor theory from the viewpoint of teaching mathematics, and then tried to analyze examples, analogies, analogical transfers, metaphorical expressions, metonymies in middle school mathematics text books used in Korea now.

Index words : prototypes, analogies, conceptual metaphors, metonymies
원형, 유추, 개념적 은유, 환유