

‘대칭성’ 관점에서 본 ‘문제해결’ 및 ‘군’ 개념지도

남 진 영* · 박 선 용**

I. 서 론

우리 주변에는 눈 결정, 나무, 불가사리처럼 대칭적인 모습을 가진 생물·무생물들이 많다. 인간 신체의 결모습 역시 거의 좌우 대칭적이며, 봄·가을, 여름·겨울, 낮·밤, 하지·동지 등은 대칭을 이루는 자연 현상이다. 주변에 산재한 사물 및 자연현상의 대칭성의 영향을 받아 우리는 어떠한 대상이든지 좌우의 균형이 깨어져 있으면 무엇인가 잘못된 것 같고, 불안감을 느끼는 반면 대칭적 모습에는 안정감과 아름다움을 느낀다. 때문에 대칭성을 장식물, 건축, 예술 등 모든 美를 추구하는 분야에서 오래 전부터 적극적으로 활용되어 왔다. 대칭성을 지닌 것을 아름답게 느끼고, 예술이나 건축 분야에서 대칭성을 추구하면서 인류는 보이지 않는 물질이나 자연 현상도 대칭적일 것이라 추측하기 되었다. 고대 그리스 천문학자들이 원과 구의 완전한 대칭성을 보면서 천구와 행성의 모습은 구, 행성의 궤도는 원일 것이라

추측한 것이 그 예이다. 그리스 기하학자들은 대칭적인 정다면체의 아름다움에 매혹되어, 존재하는 모든 정다면체를 찾으려 하다가, 이것이 5개뿐임을 오히려 증명해내기도 하였다. 16세기 Kepler역시 정다면체에 매혹되어 행성 궤도의 직경의 비를 5개의 정다면체에 근거하여 계산하는 이론¹⁾을 제기하기도 하였다.

이처럼 대칭성은 오래 전부터 美를 추구하는 분야에서 뿐 아니라 생물학, 물리학, 화학, 우주 과학의 여러 분야에서 현상을 설명하는 하나의 원리이자 탐구수단이 되어왔다. 특히 현대 과학에서는 대칭성의 비중이 더욱 커지고 있다고 한다.²⁾ 수학에서 역시 대칭성은 중요하게 사용되는 원리인데, 특히 이것은 현대 수학의 기초가 되는 ‘군(group)’의 기본 개념이다. 이 글에서는 먼저 대칭성을 정의하고, 학교수학의 문제해결 과정 속에 들어있는 ‘대칭논리’를 몇 가지 예시할 것이다. 다음에 대칭성과 군 개념의 관계에 대해 살펴보고 대칭성을 중심으로 하는 ‘군’ 개념 지도의 가능성을 제시하는 것으로 마치겠다.

* 반포고등학교(제1저자)

** 서울대 대학원(제2저자)

1) 이 이론은 비록 잘못된 것으로 판명되었지만 Newton이 체계를 이룬 현대 물리학의 기초가 되었다. (Yang, 1996)

2) 1996년 5월, 미국 California Irvine에서 National Academy of Sciences 주최로 “과학 전반에 대한 대칭성 (Symmetries Throughout the Sciences)”이라는 주제로 콜로퀴움이 열렸다. 이 콜로퀴움의 서두에서 Ernest M. Henley는 대칭성이 과학의 여러 분야에서 고대부터 사용되어 온 원리이며, 특히 최근 반세기 동안 과학 전반에 걸쳐 다각도로 유용하게 사용되고 있는 중요한 원리라 하였다.

II. 대칭성의 정의

대칭성(symmetry)의 어원은 함께 측정함(measure together)을 뜻하는 그리스어 syn-metron으로, 사전적으로 균형, 조화, 잘 나뉘어짐, 또는 이들로 인한 美를 의미한다. 아마 주변에 산재한 대칭적인 물질, 현상을 보면서 아름다움과 안정감을 느끼지 않는 사람은 없을 것이다. 대칭적인 물질, 현상을 아름답게 느끼기 때문에 인간은 오래 전부터 장식이나 음악, 미술 등의 예술품에, 또 건축물에 이 원리를 적용하여왔다. 과학자들 역시 자기의 분야에서 美를 추구한다고 한다. Kosso(1999)는 물리학자들이 가설을 세우거나 어떤 이론을 창안할 때 많은 경우 美에 의존하며, 때로는 美가 검증 수단으로도 사용된다고 하면서 물리학자들이 의존하는 美의 주된 특징은 대칭성이라고 하였다.

예술과 과학 모두에서 중요하게 사용되는 기본 원리인 ‘대칭성(symmetry)’은 정확하게 무엇을 의미하는가? Weyl(1952)은 대칭성의 개념을 두 가지 의미로 나누었다. 하나는 잘 - 분할된, 잘 - 균형 잡힌 무엇인가를 의미하는 것으로, 부분이 조화롭게 전체를 이루는 아름다움과 연결된 추상적 의미이다. 이러한 의미에서의 대칭성은 인간이 여러 시대를 거쳐 질서, 미, 완전함을 이해하고 창조하는 데 사용하여온 하나의 원리이다. 그러나 이것은 조금 모호하고 포괄적이며 추상적인 개념이다. 좀 더 정확하고 수학적인 개념은 좌우대칭성으로 대표되는 기하적 대칭성이다. “대칭이다”라고 말할 때에는 보통 이 기하적 대칭성을, 특히 좌

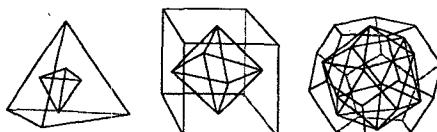
우대칭성을 의미한다. 어떤 모양이 좌우 대칭이라고 하는 것은 그 모양의 가운데를 지나는 세로직선(또는 평면)에 대하여 양쪽 모습이 같다는 것이다. 이등변삼각형, 정다각형, 직사각형, 이차함수의 그래프 등 수학에서 다루는 많은 모양들이 좌우대칭을 이룬다. 특히 원은 중심을 지나는 모든 직선에 대하여 좌우 대칭적이고, 구는 중심을 품는 모든 평면에 대하여 좌우 대칭적이다. 원과 구가 지닌 이러한 완전한 대칭성 때문에 고대 피타고라스 학파는 평면에서의 원과 공간에서의 구를 가장 완전한 기하적 도형이라고 생각하였다고 한다.

좌우 대칭성에 대해 좀 더 자세히 분석해 보자. 좌우대칭을 이루는 모양은 가운데 세로직선(대칭축)을 축으로 ‘반사(reflection)’ 조작을 하였을 때의 모양이 조작 전과 일치한다. 회전 대칭도 마찬가지이다. 회전 대칭성을 가진 모양은 중심을 축으로 적당히 회전하였을 때 처음 모양과 같다. 예컨대 정삼각형은 중심에 대한 $120^\circ \times n$ 회전, 정사각형은 중심에 대한 $90^\circ \times n$ 회전, 정오각형은 중심에 대한 $72^\circ \times n$ 회전(n 은 정수)을 한 후에 모양이 달라지지 않으므로 모두 회전 대칭성을 갖는다. 다시 말하면 좌우대칭성은 반사 조작에 대해, 회전 대칭성은 회전 조작에 대한 불변을 의미한다. 이처럼 대칭에는 원인이 되는 변환이 있고, 어떤 것이 대칭적이라 함은 이 변환에 대해 불변임을 의미한다고 볼 수 있다. Weyl (1952)은 대칭성의 특수한 형태들의 기저에 있는 일반적 아이디어는 변환 아래에서의 원소의 외형의 불변성이라고 하였다. 즉 어떤 물질, 또는 자연현상이 대칭성을 가지고 있다는 것은 어떤 ‘변

3) 대칭성을 이렇게 정의함으로 좌우대칭성, 회전대칭성을 비롯한 현상의 가시적인 특징만이 아니라 비가시적인 특징도 ‘대칭성’이라는 범주로 둑을 수 있다. Rosen은 우리가 흔히 사용하는 유추(analogy)도 대칭적이라고 한다. 자세한 내용은 Rosen의 「Symmetry in Science; An Introduction to the General Theory」(1995)를 참조.

환(조각)’에 대하여 그 물질, 또는 자연 현상이 불변이라는 것으로 정의할 수 있다³⁾. 대칭성을 이렇게 정의하면 대상을 불변으로 하는 대칭 변환의 많고 적음에 따라 대칭성의 정도를 말할 수도 있게 된다.

예를 들어 다섯 개의 정다면체가 가진 대칭성을 살펴보자. 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체 다섯 가지이지만 이들의 대칭성의 종류는 세 가지뿐이다. 정육면체의 여섯 면의 중심을 연결하면 정팔면체가 생기고, 반대로 정팔면체의 여덟 면의 중심을 연결하면 정육면체가 생긴다⁴⁾. 정팔면체와 정육면체의 이러한 관계 때문에 어떤 변환에 대해 정육면체가 불변이면 그 변환에 대해 정팔면체도 불변이며 그 역도 마찬가지이다. 아래 그림에서 보듯이 정십이면체와 정이십면체도 같은 관계를 이루므로 정다면체의 대칭성은 정사면체(대칭변환 12개), 정육면체(정팔면체; 대칭변환 24개), 정십이면체(정이십면체; 대칭변환 60개) 세 가지이고, 구 모양과 가까운, 대칭 변환의 개수가 많은 정십이면체와 정이십면체가 다른 것들보다 더 대칭적이다.



이상에서 살펴본 바에 의하면 대칭성은 변환과 묶여 있으므로 변환의 종류에 따라 대칭여부가 결정되고, 역으로 어떤 물질 또는 현상이 대칭적인가는 불변인 변환의 존재 여부에 따라 결정된다. 예컨대 이등변삼각형은 반사 변환

에 대하여 불변이지만 회전변환에 대하여는 불변이지 않으므로 좌우 대칭적이지만 회전 대칭적이지는 않다. 반면 정삼각형은 좌우 대칭적이면서 회전 대칭적이다.

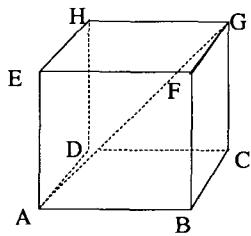
III. 학교수학에서의 ‘대칭논리’를 이용한 문제해결

모양, 또는 함수의 그래프의 대칭성을 이용하는 것은 학교 수학에서 유용하게 사용되는 방법이다. 학교수학에서 대칭성은 주로 대칭이동(반사), 평행이동, 회전이동, 합동, 닮음 등의 변환 기하학적 접근으로 다루어진다. 그리고 도형의 성질 증명과 같은 문제 해결과정에서 대상의 대칭성이 이용되기도 한다. 초등수학에서는 이등변삼각형의 밑각이 같음을 대칭성을 이용하여 종이를 접어 직관적으로 증명한다. 직사각형 모양의 종이에서 정사각형 모양을 자르는 방법⁵⁾ 역시 정사각형의 대칭성을 이용하는 것이다. 중등수학에서도 이차함수, 삼각함수, 기함수와 우함수의 적분, 정규분포 등에서 그래프의 대칭성을 이용하고 있으며 대칭성은 확률 개념의 토대이기도 하다. 이처럼 학교수학뿐 아니라 수학 전반에서 ‘대칭논리’와 ‘비대칭논리’를 이용하여 문제를 해결하는 것은 문제해결의 하나의 패러다임이다. 이와 관련하여 Freudenthal(1973)이 예시한 두 예를 우선 소개하겠다. 처음 것은 대칭성을 이용한 증명이고, 다음은 대칭적인 문제를 비대칭적으로 해결하는 방법론적 패러다임이다. 그리고 나서 Polya가 예시한 대칭성을 중심으로 하는 파스칼의 삼각형의 지도 방법을 제시하겠다.

4) 이들을 사영 기하에서는 ‘polar figure’, 또는 ‘duality’라 한다.

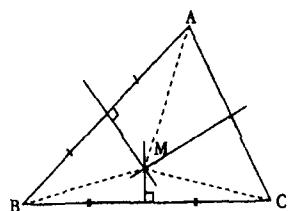
5) 짧은 변을 긴 변에 대고 접은 후, 직사각형 종이에서 남은 부분을 잘라 버리는 방법.

① 다음 정육면체에서 $\overline{AG} \perp$ 평면 BDE 를 증명하자. 전통적인 유클리드식 증명은 $\overline{AG} \perp \overline{BD}$, $\overline{AG} \perp \overline{DE}$ 이므로 $\overline{AG} \perp$ 평면 BDE 이다. (언뜻 보면 이 증명이 간단해 보이지만 $\overline{AG} \perp \overline{BD}$ 가 성립함을 증명하여야 하고, 이를 증명하기 위해서는 직선과 평면의 수직 관계와 성질을 다루거나, 또는 정육면체를 하나 더 만들어 피타고拉斯의 정리를 사용하는 등 여러 단계가 필요하다.)



대칭성을 이용한 증명은 다음과 같다. 정육면체는 대각선 AG 을 축으로 하여 120° 회전하여도 변하지 않는다. 정육면체 전체가 이 회전변환에 대해 변하지 않아야 하므로 삼각형 BDE 나 삼각형 CHF 도 변하지 않아야 하고 따라서 이 평면들은 축 AG 에 대하여 수직이다. 같은 방법으로 두 구의 교선이 원임을 증명할 수 있다.

② 삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점을 지남을 증명하자. 이 정리를 ‘ $\triangle ABC$ 에서 변 AB , BC 의 수직이등분선의 교점을 M 이라 하자. 변 AC 의 수직이등분선은 어디를 지나는가?’와 같이 진술하면 쉽게 증명할 수 있다.



점 M 은 변 AB 의 수직이등분선 위에 있으므로

$$MA = MB \quad \text{-----①}$$

점 M 은 변 BC 의 수직이등분선 위에 있으므로

$$MB = MC \quad \text{-----②}$$

①, ②에 의해서 $MA=MC$ 이다.

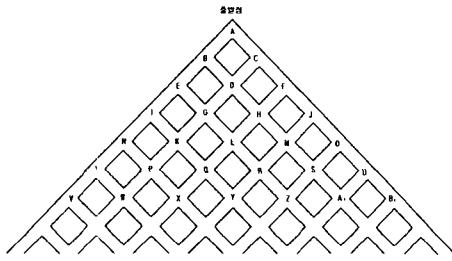
따라서 점 M 은 선분 AC 의 수직이등분선 위에 있다.

선분의 수직이등분선은 그 끝점으로부터 같은 거리에 있는 점의 집합이라는 성질과 선분의 양 끝점으로부터 같은 거리에 있는 점의 집합은 그 선분의 수직이등분선이라는 성질은 서로 역의 관계를 이루고 있다. 그런데, 이 문제의 경우 중요한 것은 서로 역 관계를 이루는 대칭적인 두 명제가 필요충분조건의 관계를 이룸을 파악해야 한다는 점이다. 즉, “ $MA=MC$ ”이므로 점 M 은 선분 AC 의 수직이등분선 위에 있다.”은 ‘수직이등분선 위의 점은 선분의 양 끝점으로부터 같은 거리에 있다’는 성질을 통해 나온 것이 아니라 그 역 명제인 ‘선분의 양 끝점으로부터 같은 거리에 있는 점들은 수직이등분선 위에 있다’는 것을 이용하여 나온 것이다.

이 문제는 겉으로 보기에도 비대칭적 접근으로 해결하고 있지만 문제를 해결하는 과정 속에서의 핵심 아이디어는 필요충분조건의 관계를 이루는 두 명제의 대칭성을 이해하는 것이라 할 수 있다. 이처럼 대칭적인 명제를 비대칭적인 방법으로 접근하여 증명하는 방법론적 패러다임은 수학문제해결과정에서 매우 유용한 사고 전략이다.

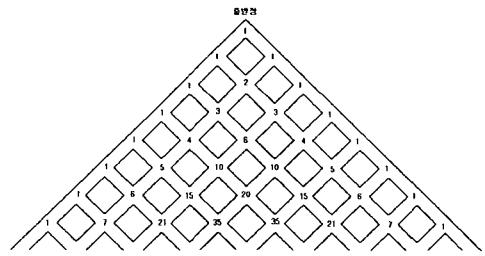
③ 다음 예는 파스칼의 삼각형의 지도를 예시한 것이다. 파스칼의 삼각형은 학생들이 대칭성의 아이디어를 수학화 할 수 있는 매우 좋은 소재이다. 그러나 파스칼의 삼각형을 지금처럼 이항정리와 $nC_r = n-1C_{r-1} + n-1C_r$ 를 통해 도입하는 것은 학생들로 하여금 수평적 수

학화의 과정을 거치게 한다고 보기 힘들다. 그렇다면 학생들이 비형식적으로 파스칼의 삼각형의 아이디어를 접하면서 그 아이디어를 수평적으로 수학화하고 그것을 다시 수학적으로 정리할 수 있도록 하는 방법⁶⁾은 어떤 것일까? Polya의 파스칼의 삼각형에 대한 조합론적 해석은, 먼저 기본 아이디어를 수평적으로 경험하게 한 후 수직적으로 수학화 할 수 있게 하며, 관점을 전환하게 한다는 점에서 주목할만하다. (Tucker, 1995, pp.216-217)



위 그림의 출발점에서 각 교차로 지점 A, B, C, D, E, ...에 이르는 최단 경로의 수를 학생들이 표시해 보도록 한다. A에 이르는 방법은 1가지이다. B, C에 이르는 방법도 각각 1가지이다. D에 이르는 방법은 B, C에 이르는 방법을 더해서 2가지이다. E와 F에 이르는 방법은 각각 1가지이며 G에 이르는 방법은 E와 D에 이르는 방법을 합하여 3가지이다. H에 이르는 방법도 마찬가지로 3가지이다. K에 이르는 경

로의 수는 I와 G에 이르는 경로의 수를 합하여 4가지이다. 이러한 방식으로 학생들은, 어떤 교차지점에 도달하기 위한 경로의 수는 도달하기 바로 직전의 교차점에 이르는 경로의 수(들)의 합이라는 것(${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$)을, 비형식적으로 경험⁷⁾하게 된다. 각 교차점에 이르는 경로의 수를 기록하면 다음과 같다.



이 그림에서 ‘왜 좌우 대칭적인 형태가 나타날까?’ 수평적 수직화의 단계에서 학생들은 직관적으로 같을 수밖에 없다⁸⁾고 생각할 수도 있다. 하지만 ‘경로의 수’, 즉 ‘배열’(arrangement)의 관점에서 학생들은 다음과 같은 정당화를 스스로 시도할 수 있도록 지도되어야 한다.

‘K 지점과 M 지점은 같은 것을 포함한 순열을 이용하면 출발점에서 똑같이 $\frac{4!}{3!}$ 개의 가는 경우의 수를 가진다.’, ‘출발점에서 X 지점과 Z 지점에 이르는 최단경로의 수는 똑같이 $\frac{6!}{4! 2!}$ 개다.’

- 6) 아래에 소개된 과정은 제 6차 교육과정과 마찬가지로 순열의 기본적인 내용을 배운 후 적용될 수 있도록 엮어졌다
- 7) 이러한 경험을 더욱 반성하면 준-일반적(quasi-general)인 방법(Freudenthal의 용어)으로 수학적 귀납법을 사용하는 증명을 할 수 있다. Pascal 역시 준-일반적인 방법으로 증명을 하였는데, 각 지점에 이른 경로의 수는 자신의 바로 원편 선상에 있는 모든 경로의 수의 합과 같다는 것을 다음과 같이 보였다.
Q지점을 예로 들어보자. Q지점에 이른 경로의 수의 합은 K지점과 L지점에 이른 경로의 수의 합과 같다. 그런데, (극남)가정에 의해 L지점의 경로의 수의 합은 G, D, C에 이른 경로의 수의 합과 같으므로 Q지점에 이른 경로의 수의 합은 K, G, D, C에 이른 경로의 수의 합과 같다. 나머지 교차점도 마찬가지 방식으로 증명할 수 있다.
- 8) “구별할 충분한 이유가 없을 때에는 구별할 수 없다”는 ‘이유불충분의 원리’(the principle of insufficient reason)가 이 경우 적용된다고 볼 수 있다. 즉, 학생들은 정당화해야 할 필요성을 느끼지 못하며 당연하게 받아들일 수 있다.

즉 비형식적으로 경로의 수를 세던 단계에서, 이 문제가 이전에 학습했던 ‘같은 것을 포함한 순열’과 같은 문제로 도약한다. 지나야 하는 블록이 총 N개이고 그중 왼쪽으로 지나야하는 블록수가 K개, 오른쪽으로 지나야하는 블록수가 (N-K)개인 모형의 경우에 그런 모형의 한 쪽 모서리에서 다른 대각선 모서리에 이르는 경로의 수는 그것들을 늘어놓는 방법의 수와 같으므로 $\frac{N!}{K!(N-K)!}$ 이다. 또한 지나야하는 블록이 총 N개이고 (앞의 경우와는 대칭적으로) 그중 오른쪽으로 지나야하는 블록수가 K개, 왼쪽으로 지나야하는 블록수가 (N-K)개인 모형의 경우에는 $\frac{N!}{(N-K)!K!}$ 개의 경로의 수가 있으므로, 파스칼 삼각형의 수들은 당연히 대칭적으로 나타날 수밖에 없다.

파스칼의 삼각형이 나타내는 대칭성은 다음과 같이 선택의 관점에서 이해할 수도 있다. N, K, L, M, O 지점은 출발점에서부터 도착하기 위해서는 모두 동일하게 블록을 4개 지나야 하며 ‘왼쪽으로 갈 것인가 아니면 오른쪽으로 갈 것인가’를 결정해야하는 4곳의 교차점을 지나야 한다. 그렇다면 각 도착점에 이르는 동안의 차이점은 무엇일까? 각 도착 지점들에 도착하기 전까지 있었던 교차로 지점에서 몇 번이나 오른쪽(그림에 보이는 대로)을 선택했느냐는 것이 바로 그것이다. 즉, N지점에 이르는 동안 4번의 교차지점에서 오른쪽으로 방향을 선택한 적이 한번도 없으며, K지점은 1회, L지점은 2회, M지점은 3회, O지점은 4회 각각 오른쪽을 선택하였다. 여기서 중요한 것은 4번 중 3번은 왼쪽을 선택했다는 상보적 ‘대칭성’의 아이디어이라는 점이다. 이러한 아이디어에서

는 K지점과 M지점을 본질적으로 4번의 선택의 상황에서 ‘상대적으로 같은 선택’을 한 것으로 본다. 즉, 선택에 있어서의 상보적 대칭성을 인식하는 것이다.

이러한 선택의 상보성을 인식한 후에는, 학생들은 교사의 안내 하에 전 단계에서 익혔던 배열의 관점과 비교하는 활동을 할 수 있다. 즉, 배열의 문제를 선택의 문제로 전환하는 활동을 한 후에는 ‘같은 것을 포함한 순열’과 ‘조합’을 같은 맥락에서 이해할 수 있게 된다. N개 중에 K개를 선택하는 경우의 수⁹⁾는 배열의 관점으로 해석할 때 $\frac{N!}{K!(N-K)!}$ 이며, N개 중에 K개를 선택하는 것은 상보적 대칭성을 생각하면 (N-K)개를 선택하는 것과 같으므로

$${}_N C_K = {}_N C_{(N-K)} = \frac{N!}{K!(N-K)!} \text{이다.}$$

IV. ‘군’의 기본아이디어로서의 ‘대칭성’

1) 대칭성과 군론

대칭성은 예술에서 美의 기본 형태로 사용될 뿐 아니라 물리학, 화학, 생물학, 의학, 천체 물리학 등에서 유용하게 사용되는 기본 원리이기도 하다. 예술가들이 보기의 대칭성은 아름다움을 나타내는 미적 특성이지만, 과학자들이 보기에는 자연 현상을 설명하는 하나의 기본 원리이자 탐구 방법이다. 그리고 그 모두의 저변에 깔려있는 공통점을 추출하여 추상적으로 연구하는 수학자들에게 그것은 어떤 변환에 대한 불변성이다. Weyl은 대칭성의 일반적 아이디어를 자기 동형 변환(automorphism) 아래에서의 대상의 외형적 불변성이라고 하였다.

9) ${}_N C_K$ 와 같은 기호를 여기에서 도입할 수 있을 것이다.

(Weyl, 1952) 대상의 대칭변환의 집합은 임의의 집합이 아니라 ‘자기동형군’¹⁰⁾이라는 아름다운 내적 구조를 가진다는 것을 수학자들이 알게되면서 그들은 대칭성을 변환으로 보는 것이 가장 좋다는 것을 이해하게 되었다.

‘좌우대칭성’은 대상의 정 중앙을 지나는 직선(대칭축)에 대한 반사(reflection) 변환에 대한 불변성을 의미하고, ‘회전대칭성’은 회전변환에 대한 불변성을 의미한다. 모든 사물은 그 자신을 불변이도록 하는 변환의 개수에 따라 대칭성의 높고 낮음이 결정된다. 예컨대 이등변삼각형과 정삼각형이 갖는 대칭성은 다르다. 이등변삼각형을 불변이도록 하는 변환은 반사와 항등변환뿐인 반면 정삼각형은 반사, 항등변환 이외에도 중심에 대한 120° , 240° 회전변환에 대해서 불변이다. 따라서 정삼각형이 이등변삼각형보다 대칭성이 높다. 이처럼 우리는 대칭성을 지닌 물질에 대해 대칭성의 높고 낮음을 말할 수 있다. 어떤 물질이 좌우 대칭성만을 갖는다면, 그 물질을 불변으로 하는 대칭변환의 개수는 중심을 지나는 대칭축에 대한 반사와 아무 것도 변화시키지 않는 ‘항등변환’ 두 개뿐이다. 반면 불가사리와 같은 모양은 반사의 축이 되는 직선이 모두 5개이며 중심에 대하여 $72^\circ \times k$ (k 는 정수)의 회전변환에 대하여도 불변이다. 따라서 불가사리는 좌우 대칭변환과 회전 대칭변환을 합하여 모두 10개의 대칭변환을 갖는다. 하나의 대칭변환이 아닌 여러 개의 대칭변환을 갖는다는 것은 대칭성이 양적 측면을 가짐을 알 수 있다. 즉 대칭변환이 많을 수록 대칭성이 높다고 할 수 있다. 대칭성의 이 양적 측면은 군론과 연결

된다. Armstrong(1988)은 ‘수는 크기를 측정하고 군은 대칭성을 측정한다’라고 하였다. 뿐만 아니라 대칭성의 질적 측면(구조)도 군론과 연결된다. 다음 예를 보자.

정사면체, 정육각형, 정십이각뿔은 모두 12개의 대칭변환을 가지므로 대칭성의 양적 정도는 같다. 그러나 이들의 구조는 각각 다르다. 정사면체의 12개의 대칭변환은 마주 보고 있는 변의 중점을 연결한 직선에 대한 반사 3개, 각 꼭지점을 중심으로 하는 $120^\circ \times k$ (k 는 정수) 회전변환 8개와 항등변환이다. 정육각형의 12개의 대칭변환은 마주보는 변의 중점을 연결한 직선에 대한 반사 3개, 마주 보는 꼭지점을 연결한 직선에 대한 반사 3개, 그리고 중심에 대한 $60^\circ \times k$ 회전변환 6개(항등변환 포함)이다. 반면 정십이각뿔의 12개의 회전변환은 모두 중심에 대한 $30^\circ \times k$ 회전변환이다. 또한 정사면체의 두 대칭변환은 합성에 대해 가환적이지 않으나, 정십이각뿔은 대칭 모두가 가환적이다(위수 12의 회전군을 이룬다). 또, 두 번 하여 원위치로 돌아오는 대칭변환이 정사면체에는 각 모서리의 중점을 잇는 축에 대한 반사 세 개가 있으나, 정육각형은 7개(마주 보고 있는 모서리의 중심을 지나는 대칭축에 대한 반사 3개, 마주보고 있는 꼭지점을 연결한 대칭축에 대한 반사 3개, 중심에 대한 180° 회전), 정십이각뿔은 하나(중심에 대한 180° 회전) 뿐이다. 따라서 어떤 것의 대칭성을 측정할 때에는 대칭의 개수를 세는 것만으로는 부족하다. 그들이 각각 어떻게 결합되는지 생각하여야 하고, 이 정보를 알려주는 것이 바로 군의 내적 구조이다.

10) 대부분의 변환 집합은 군을 형성하지 않는다. 그러나 대칭변환은 군을 형성한다; 한 사물의 모양을 변형시키지 않는 두 대칭변환의 결과 역시 그 모양을 변형시키지 않으므로 대칭변환이다. 다시 말하면 두 개의 대칭의 합성도 대칭이므로 한 사물의 대칭변환은 닫혀있다. 그리고 항등변환이 대칭변환임과, 어떤 대칭변환의 역변환 역시 대칭변환이고 결합법칙이 성립함은 자명하다.

다음은 정다각형의 대칭성에 대해 좀 더 자세히 보자. 정 n 각형의 대칭군을 D_n 이라 하면, D_3 (정삼각형의 대칭군)은 D_6 (정육각형의 대칭군)의 부분군이 된다. 정다각형의 대칭군 D_n 에는 회전변환과 반사(reflection)가 있다. 두 개의 반사를 연속적으로 하였을 때, 꼭지점의 순서는 바뀔 수 있다. 그러나 면을 생각해 보면 두 번의 반사는 그 면을 두 번 뒤집는 것이므로 결국 처음 면이 앞으로 온다. 따라서 반사 두 개의 합성은 다른 반사 조작일 수는 없다. 회전변환 중의 하나이어야 한다. 즉 상세한 계산을 하지 않아도 D_n 에서의 두 반사의 합성은 회전변환 중의 하나라는 결론이 나온다. 그리고, 결국 대칭변환들의 결과는 꼭지점의 치환이므로 대칭변환들은 치환군을 형성한다. 이런 식의 간단한 논의도 군론과 연결된다.

이상에서는 대칭 변환이 군을 이루면서 군론이 대칭성의 양적 측면과 질적 측면 모두를 설명함을 살펴보았다. 다음에서는 군의 발생과정에 나타난 대칭성을 살펴보면서 군의 기본 아이디어가 대칭성임을 밝히겠다.

2) 군의 발생과정 속에서의 대칭성의 역할
군 개념의 발생과정을 보면 군은 닫힘성(closedness), 결합법칙의 성립, 항등원, 역원의 존재라는 군의 현대적 정의 이전 오래 동안 ‘닫힘성(closedness)’을 만족하는 집합만으로 정의되었다. 닫힘성이란 임의의 $a, x \in S$ 에 대하여 $a \cdot x \in S$ 이다. 이 연산을 모든 S 의 원소 a 에 대한 $\cdot x$ 라는 변환으로 생각해보면, 닫힘성이란 이 변환에 대해 집합 S 가 변하지 않음을 의미함을 알 수 있다. 즉 변환 $\cdot x$ 에 대해 S 는 대칭적이다.

연산 $\cdot x$ 는 임의의 원소 a 가 $\cdot x$ 라는 변환에 의하여 다른 S 의 원소 b 로 바뀌는 치환

으로도 볼 수 있다. 군 개념 초기 주로 관심을 가졌던 것은 치환군이었다. 치환이란 순서는 바뀌지만 전체 모양은 변하지 않는 대칭변환이므로 치환군은 곧 대칭군이며 Cayley의 정리에 의하면 모든 유한군은 치환군과 동형이므로 모든 유한군은 대칭군이다.

본격적인 군 개념의 전조가 보였던 5차 이상의 방정식의 일반해가 존재하지 않을 것이라고 추측한 Lagrange의 연구에서 그가 처음 사용하였던 방법은 근의 치환에 대한 연구였으며, Ruffini, Abel 모두가 치환군 개념을 가지고 있었다. ‘group’이라는 용어를 처음 사용하면서 군 개념을 분명한 형태로 자리잡게 한 Galois의 연구는 방정식의 근의 치환에 대한 연구로, 그의 아이디어는 근들의 ‘대칭성의 정도’의 평가에 근거하여 방정식을 나누는 것이었다. 그는 방정식의 해집합을 변화시키지 않는, 방정식의根基의 대수적 관계를 보존하는 근의 치환군에 의해 판별되는 방정식의 ‘대칭성의 정도’로 각 방정식을 특성화하였다. 군의 역사에서 Galois의 중요성은 치환을 방정식의 해결 가능성 이론에 단순히 이용한 것이 아니라, 방정식의 근 사이의 관계를 보존하는 치환군으로 결정되는 대칭성의 정도로 방정식을 나눈 것이고,¹¹⁾ 이것에 분명한 군론적 사고라는 점이다.

Klein은 이전까지 치환군 개념에 머물렀던 군 개념을 변환군 개념으로 확장하였다. 그는 19세기 이후 등장한 다양한 기하 체계를 대칭성이라는 군의 기본 개념과 연결시켜 모든 기하는 변환 아래에서의 불변성(즉 대칭성)을 연구하는 것이라고 하였다. 그에 의하면 각 기하에는 자신만의 변환군이 있으며, 기하적 특성은 이 변환군 아래에서의 불변성으로 특징지어진다. 예컨대 유클리드 기하는 닮음 변환, 사영기하는 사영변환, 아핀기하는 아핀변환 아래에서 보존되는 도형의 성질, 또는 변환군의

불변성을 연구하는 분야이다. 기하학 변환집합 C 를 고정시켜 놓고, 이 변환들에 의해 보존되는 기하적 도형의 성질을 연구하는 것이다. 바꾸어 말하면 기하는 “작용 영역” A (평면, 공간 등)와 이 영역에서 작용하는 “자기동형사상군(대칭군)” G 에 의해 결정되고, 군 G 를 바꾸면 새로운 “기하”를 얻는다. 또, G 의 포함관계에 따라 각 기하의 관계가 결정되기도 한다.

‘변환군 아래에서의 불변성’이란 대칭성을 의미하므로 기하의 특성은 대칭성을 연구하는 것이라고 할 수 있다. 예를 들어 유클리드 기하는 평면 또는 공간에서의 합동과 닮음을 연구한다. 닮음 변환은 군의 공리를 만족하고, 선분의 길이는 변화시키지만 길이의 비와 각의 크기를 보존하므로 도형의 어떤 ‘기하적’ 성질도 변화시키지 않는 변환이다. 전통적으로 ‘기하적’이라는 것은 동형사상에 의해 변화되지 않는 도형의 성질을 일컫고, 대부분의 경우 유클리드 기하의 목적은 닮음 변환이나 닮음 아래에서 보존되는 도형의 성질의 연구라고 할 수 있다. ‘합동’은 두 도형이 포개어짐을 뜻하고, 이는 두 도형 사이에 동형 사상(isometry)이 존재함을 의미한다. 이와 같이 평면에서 작용하는 동형사상 군에 의해 유클리드 기하가 결정되는 것처럼 평면 아핀 기하는 평행 사영 변환군에 의해 결정된다.

군의 역사를 볼 때, 치환군 개념이든 변환군 개념이든 한결같이 동일하게 흐르던 아이디어는 대칭성이라고 할 수 있다. Burn(1996)은 역사적으로 군론은 방정식의 해의 치환에 관한 연구에서 유래하였고, 유클리드 평면에서의 이동(rigid motion)을 분석하면서 발달하였음을 지적하면서 군론의 기본 개념은 치환과 대칭성이

라고 하였다. Freudenthal(1973) 역시 ‘군은 어떤 대상이나 구조(structure)가 자기 자신으로 변환되는 자기동형사상체계’라고 하였다. 이렇듯 대칭성은 군의 기본 개념이자 중심 아이디어이다.

3) 대칭성을 중심으로 한 ‘군’개념 지도의 가능성

닫힌성, 결합법칙의 성립, 항등원, 역원의 존재라는 군의 현대적 정의에서는 대칭성이라는 군의 기본 아이디어를 찾기 힘들다. Klein은 이에 대해 군의 추상적·형식적 정의는 형식적 증명이나 군의 논리적 골격을 세우는 데에는 아주 좋지만, 군의 아이디어를 반영하지 못한다고 하였다.(재인용, Wussing, 1969) 이 외에도 많은 학자들이 군의 현대적 정의는 군의 혼을 배제한 형식일 뿐, 이를 통해서 참된 군 개념을 배울 수 없다고 하였다.(Freudenthal, 1973, Burn, 1996) 그렇다면 군을 어떻게 가르쳐야 할까?

학교수학에서 군은 명시적으로 정의는 하지 않지만 실수 집합의 성질로 다룬다. 유리수, 실수, 복소수, 행렬, 벡터 등 매우 다양한 군을 ‘군’이라는 이름이나 정의, 분류 없이 학교수학에서 다룬다. 특히 행렬은 비가환군이다. 이상에서 보면 군 개념은 중학교 이상에서 주로 다루어지고 유용하게 사용되는 것 같으나 군과 관련된 대칭성은 오히려 초등학교에서 다루어지고 있음을 찾아볼 수 있다. 초등학교에서 다루는 ‘무늬 만들기’가 그것이다.

초등학교에서는 먼저 2-가에서 구체물에 대한 “밀어서 옮기기(평행이동), 뒤집기(반사), 돌리기(회전)” 조작을 다룬다. 이는 구체물을 직접 조작하는 활동이고, 특히 ‘변한다는 측면’을 강조하기 위하여 변환 후 모양이 바뀌는 것들

11) 그는 이 군을 방정식 군이라고 하였고, 지금은 Galois 군이라고 한다. 그러한 군의 가장 단순한(가장 작은) 것은 항등 치환만으로 이루어진 것으로, 방정식의 해가 유리수인 것, 즉根基를 사용하지 않고 군을 나타낼 수 있는 것이다.

을 주로 다루지만, 3-나에서는 거울을 사용한 반사 조작 활동을 하고 이어서 반사 조작 후에도 원래의 모양과 달라지지 않는 모양(좌우 대칭적인 모양)을 찾는다. ‘좌우 대칭적인 모양 찾기’가 직접 군과 관련된다고 보기는 무리이다. 그러나 5-가에 나오는 ‘무늬 만들기’는 군과 직접 관련된다.

‘무늬 만들기’ 단원에서는 한 가지 또는 두 가지 무늬에 대해 ‘옮기기, 뒤집기, 돌리기’ 조작을 하여 새로운 무늬를 만들고 이를 반복하여 평면을 채우는 활동을 한다. 또 역으로 포장지 등에 있는 이미 만들어진 무늬를 보면서 기본 모양과 사용 기법을 찾기도 한다. 이 단원의 목표는 패턴을 찾고, 만드는 것이다. 그러나 이 기법들은 유한군을 이루며, 아동들은 이 활동을 통해 유한군과 군의 연산을 경험하게 된다. 예컨대 아동들은 사용하는 여러 조작(옮기기, 뒤집기, 돌리기)의 합성(연달아 하기)을 경험한다. 또, 어떤 조작들의 합성의 결과가 또 다른 조작일 수 있다는 것($a \cdot b = c$), 합성 순서를 바꾸면 결과가 달라진다는 것 등의 군의 연산과 관련된 내용들을 활동을 통해 직접 경험하게 된다.

이 기법으로 띠 모양의 무늬를 만들 수 있는 방법은 7가지이고, 평면을 채울 수 있는 방법은 17가지, 공간을 채울 수 있는 방법은 230가지뿐임이 군을 이용하여 이미 증명되어 있다. 이 증명을 비롯한 ‘평면과 공간에서 패턴 만들기’에 들어있는 여러 가지 군론적 아이디어들은 ‘군’에 관한 많은 책에서 소개되고 있다. 특히 공간에서 평행이동, 반사, 회전 이동을 사용하여 기본 모양을 대칭적으로 배열하는 것은 분자의 구조를 연구하는 화학에서 중점적으로 다루는 내용이기도 하다. 따라서 초등수학에서 다루어지는 ‘무늬만들기’를 좀 더 심화시키면 학교수학에서도 군 개념을 암묵적으로 다룰

수 있다고 생각한다.

군의 교육에 대해 Freudenthal(1973)은 군을 먼저 정의하고 군 개념에 대한 일반적인 정리들을 증명한 후, 군이 적용될 수 있는 일반 원리들을 전개하고, 이를 원리들에 따라 군을 응용하는 형식의 교육은 체계적이긴 하지만 바람직하지 않다고 하였다. 그는 수학의 역사를 보면 특수한 경우에서 일반적 원리로, 구체적인 것에서 추상적인 것으로 발전하였다고 하면서 군론도 예외가 아니라고 하였다. 그는 군론이 지금과 같은 형태로 분명하게 자리잡기까지 최소 반세기 이상 걸렸음을 지적하면서, 수학에서 이러한 모습은 일상적인 것으로, 어떤 분야의 지식을 조직하기 위해서는 먼저 그것을 탐색하는 시간이 필요하다고 하였다. 또, 정의란 알고 있는 것이 무엇이고, 무엇에 사용되는지 안 후에 내리는 것, 즉 처음이 아니라 탐구의 끝에 일어나는 것이라고 하면서 군을 현대 수학에서와 같은 추상적·형식적 정의로 먼저 도입해서는 안 된다고 하였다. 그리고 군이 학교 수학에 도입된다면 알고리즘적 타당화가 아닌, 어떤 것을 군이라고 하는지 알 수 있는 방식으로 도입되어야 한다고 하면서 군론의 혼을 살리는, 어떤 구조의 자기동형사상군으로 다루는 것이 적합하다고 하였다.

그는 현대 수학에서 가장 현대적인 특징은 알고리즘적 접근이 아닌 개념적 접근이라고 하면서, 군 개념을 학교수학에서 가르친다면 참된 군 개념을 가르쳐야 한다고 하였다. 특히 잘못된 초등화나 군 개념을 손상시키는 도입은 위험하다고 하면서 군 개념의 잘못된 초등화를 다음과 같이 예시하였다.

학교에서는 흔히 위수 2인 순환군 또는 Klein 군이 군의 원소들을 특정한 기하적 도형 같은 것을 사용하여 나타내면서 도입된다: 사각형의 네 꼭지점을 수평, 수직, 또는 대각 변환을 통

해 변환시키는 것. 또는 빨간 삼각형, 사각형, 파란 삼각형, 사각형의 집합을 모양과 색을 바꾸면서 자기 자신으로 보내는 것. 이 사상과 항등 사상은 분명 군을 이루며, 그것 자체로는 아무 문제가 없다. 그러나 잘못된 것은 이런 식으로 시작되는 일반화가 수학적으로나 교육적으로 모두 잘못된 것이라는 점이다... 만들어진 것이 정말 군이냐의 여부를 떠나 이 틀을 타당화 하는 것은 원소의 수가 적지 않으면 무한한 작업이 될 것이며, 원소의 수가 적다 하더라도 알고리즘을 신뢰하는 것은 통찰에 비해 좋은 수학이 아니다. 이렇게 되면 어린 아동들은 이항 연산을 가진 모든 체계가 군이라고, 또는 최소한 교사가 그렇지 않은 것은 제시하지 않으리라고 믿게 된다. 그렇지 않다 할지라도 군의 성질은 가짜 논쟁에 의해, 아니면 올바르더라도 학습자들이 알 수 없는 것으로 주어지게 된다. … 군 표(Group tables)와 군 다이어그램은 군을 분명하게 보여주거나 시각화하기 위한 도구로, 그것 자체가 군을 소개하는데, 아니면 어떤 체계가 군임을 증명하는데 효율적인 도구는 절대 아니다.(Freudenthal, 1973)

과거에 군을 학교수학에 도입하려는 시도(실험)는 여러 번 있었다. Dienes(1965)는 군의 교육에 대해 위수 2인 군과 위수 4인 순환군, Klein군을 색깔이 다른 카드를 통하여 아동에게 가르치는 실험을 하였는데, 위의 Freudenthal의 인용문에 의하면 잘못된 초등화의 예이다. 그의 실험의 취지는 아동이 군 개념을 발견하도록 하는 것이었으나 실험 내용 면에서는 두 원소의 조작 방식을 발견하는, 그 군의 연산 규칙을 발견하는 것이었다. 이는 Weyl, Freudenthal, Klein 등이 생각하는 군 개념과는 거리가 먼, 결과물에 해당하는 추상적인 연산만을 다루는, 군 개념의 혼을 살리지 못하는 교육이라고 할 수 있다.

군론은 현대 수학은 물론, 현대 물리학, 화학 등 여러 분야에서 유용하게 사용되는 매우 중요한 이론이다. 하지만 군론이 현대 여러 학

문에 미적분학처럼 유용하게 사용된다고 하더라도 추상적 군론 자체를 학교수학에 도입하는 것은 무리이며 바람직하지도 않고, 그리 간단한 문제도 아니다. 다시 말해서, 군론이 이들 학문에서 유용한 이유가 대칭성이며 군의 기본 아이디어가 대칭성이라는 점을 생각하더라도, 군을 현대적 정의와 같이 도입하거나 추상적 군론을 직접 다룰 수는 없다. 그러나 초등수학에서 다루어지는 ‘무늬만들기’를 좀 더 심화시킨다면 학교수학에서 군의 기본 아이디어를 충분히 다룰 수 있을 것이다. 초등수학에서의 ‘무늬 만들기’를 좀 더 발전시키는 것은 무늬 만들기에서 사용한 조작(변환) 활동을 반성하게 하고, 그 결과 무의식적으로 경험되던 대칭성을 의식적으로 경험하게 하는 방향이어야 할 것이며, 이에 대해선 보다 깊은 연구가 필요하다고 생각한다.

V. 요약

이 글에서는 대칭성이 문제를 해결하는 수단인 동시에 정신적, 물리적, 사회적 현상을 정리하는 본질로서 보고 대칭성을 다각도로 분석하였다. 먼저 대칭성을 ‘어떤 변환에 의해 변하지 않음’으로 정의하였고, 대칭성의 아이디어가 어떻게 문제해결 과정 속에 작용하는지를 살펴보았다. 즉, 문제를 해결하는 과정 속에서 대칭논리가 사고전략으로서 어떻게 자리잡고 있는지를 확인하였다. 파스칼 삼각형의 지도방향은 대칭성의 아이디어를 살릴 수 있고 수평적·수직적 수학화의 단계를 모두 거칠 수 있도록 제시하였다. 한편 대칭성은 군의 기본 아이디어임을 자기동형사상군과 군의 발생과정을 통해 살펴보았으며 마지막으로 초등수학에서 다루어지는 ‘무늬 만들기’를 좀 더 심화시

키는 것을 통해 대칭성을 중심으로 하는 ‘군’ 개념 지도의 가능성을 제시하였다. 이에 대해선 보다 깊은 후속 연구가 필요하다.

참고문헌

- 우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부
- Armstrong, M. A. (1988). *Groups and symmetry*. New York: Springer-Verlag.
- Burn, B. (1996) "What are the Fundamental Concepts of Group Theory?". *Educational Studies in Mathematics*, 31, 371-378.
- Dienes, P. & Jeeves, M.A. (1965). *Thinking in structures*. London: Hutchinson Educational Ltd.
- Dubinsky. E. D., Leron, U., & Zazkis, R. On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 267-305.
- Freudenthal. H. (1973). What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education. In A.G. Howson (Ed.). *Proceedings of ICME-2: Developments in mathematical education* (pp. 101-114). Cambridge University Press.
- Heilbroner. E., Dunitz J. D. & Pfalzberger R.(1996). 그림으로 보는 문자세계와 대칭성. 이덕환 역. 한국 경제신문사. (영어 원작은 1992년 출판).
- Kosso. P. (1999) Symmetry arguments in physics. In *Studies in History and Philosophy of Science* vol. 30.
- Rosen. J. (1995) *Symmetry in science : An introduction to the general theory*. New York: Springer-Verlag
- Tucker. A. (1995). *Applied combinatorics*. New York, NY: John Wiley & Sons. Ins.
- Weyl. H. (1952). *Symmetry*. Princeton University Press
- Wussing. H.(1984). *The genesis of the abstract group concept*. (A. Shenitzer Trans.). Massachusetts Institute of Technology. (Original work published 1969).
- Yaglom. I. M. (1988). *Felix Klein and Sophus Lie : Evolution of the idea of symmetry in the nineteenth century*. Boston-Basel: Birkhäuser.
- Yang. C. N. (1996). Symmetry and Physics. In *Proceedings of the American Philosophical Society*, vo.140. No. 3., 267-287.

Problem solving and teaching 'group concept' from the point of symmetry

Nam, Jin Young (Banpo High School)
Park, Sun Yong (Seoul National University, Graduate School)

The purpose of this paper is as follows:
ⓐ to disclose the essence of symmetry ⓑ to propose the desirable strategy of problem-solving as to symmetry ⓒ to clarify the relationship between symmetry and group ⓔ to propose a way of introduction of 'group' in school mathematics according to its fundamental characteristic, symmetry.

This study shows that the nature of symmetry is 'invariance under a transformation' and symmetry is the main idea

of 'group'. In mathematics textbooks and mathematics education literature, we find out that the logic of symmetry is widespread. We illustrate two paradigmatic problem related to symmetrical logic and exemplify a desirable instruction of Pascal's triangle. This study also suggests a possibility of developing students' unformal and unconscious conception of group with symmetry idea from elementary to secondary school mathematics.

Index words : symmetry, problem solving, group

대칭성, 문제해결, 군