

WDM 링에서의 루팅 및 파장할당에 관한 연구*

김후곤** · 백천현*** · 정용주****

A study on the routing and wavelength assignment in WDM ring*

Hu-Gon Kim** · Chun-Hyun Paik*** · Yong-Joo Chung****

■ Abstract ■

The ring routing and wavelength assignment problem arose in the planning of optical communication networks which use WDM rings. Traffic demands are given for each pair of nodes in an ring : each demand must be routed one of the two possible connections round the ring and the wavelength assignments must be made so that there are no conflicts : that is, no two connections whose routes share a link can be assigned the same wavelength along that link. The objective is to minimize the number of used wavelengths. We propose the local optimal routing for the problem and show that there always exists an optimal solution satisfying it. Furthermore we suggest a new lower bound for the problem and show that it is very efficient for the worst case example.

Keyword : Circular Arc Graph Coloring, Circle Graph, Ring Routing and Wavelength Assignment

1. 서론

WDM(Wavelength Division Multiplexing)은

하나의 광 케이블을 이용하여 여러 개의 서로 다른 파장(wavelength)을 동시에 전송할 수 있으므로, 기존에 설치된 광케이블을 그대로 이용하면서도 용

논문접수일 : 2002년 1월 15일 논문게재확정일 : 2002년 8월 8일

* 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R01-2001-00508) 지원으로 수행되었음.

** 경성대학교 경영정보학과(e-mail : hkim@star.ks.ac.kr)

*** 동의대학교 기계산업시스템공학부 산업공학과

**** 부산외국어대학교 정보시스템학과

량은 파장의 수만큼 증가시킬 수 있다는 장점 때문에 각광받고 있는 광 전송 기술이다[11]. WDM을 이용한 광전송망은 기존의 SONET(Synchronous Optical Network) 및 SDH(Synchronous Digital Hierarchy) 방식으로 구축된 광전송망을 대신하여 새롭게 구축되는 기가급(Gigabps) 이상의 기간 통신망(backbone network)에 주로 이용되고 있다. 이미 구축된 SONET 방식의 광전송망들이 대부분 운용 및 유지보수가 편리하면서도 생존도를 보장할 수 있는 구조인 링을 가장 많이 채택하고 있는 것처럼, WDM 전송망의 경우에도 링 형태가 선호되고 있다.

WDM 네트워크에서는 수요 노드와 공급 노드 간의 트래픽 처리를 위해 두 노드간 논리적 연결(logical connection)을 위한 광경로(lightpath or route)의 설정과 설정된 광경로에 파장(wavelength)을 할당하는 결정이 동시에 이루어져야 한다. 이때 광경로상에 놓인 노드에서 파장 변환을 허용하는 경우와 파장 변환을 허용하지 않는 경우로 나누어지는데, 전자의 경우 후자에 비해 장비의 가격이 비싸고 개발 또한 힘들다. 파장 변환을 허용하지 않는 경우 하나의 광경로는 거쳐가는 링크들에 동일한 파장(wavelength)이 할당된 것이므로, 동일한 링크를 공유하는 광경로들은 같은 파장을 사용할 수 없다는 제약이 따르게 된다. 또한 노드 쌍간 트래픽 수요(the required connection)가 여러 개이면 이에 상응하는 광경로를 설정하여야 하므로, 본 연구에서는 트래픽 수요(traffic requirement or connection requirement)와 광경로를 동일한 용어로 간주하기로 한다.

RWAP(Routing and Wavelength Assignment Problem)는 각 노드 쌍간 트래픽 수요의 집합(a set of lightpaths)이 주어지고 각 노드에서 파장 변환이 허용되지 않을 때, 이들 트래픽 수요를 위한 광경로의 설정과 광경로들에 파장(wavelength)을 할당하는 문제이다. 이때 목적함수는 할당하는 파장의 수를 최소화하는 것이 된다. 본 연구에서는 네트워크를 링의 경우로 국한하기로 하는데, 링

인 경우라 하더라도 RWAP는 NP-complete이다 [14]. 한편 어떤 링에 대한 광경로들이 주어졌을 때, 특정 링크를 지나가는 광경로들의 수를 링크 용량이라 하고, 모든 링크의 용량 중 최대값을 링 용량이라 하기로 한다.

만약 RWAP에서 광경로 상에 놓인 노드에서 파장 변환을 허용하면 이 문제는 단순히 링 용량을 최소화하는 문제(Ring Loading Problem, RLP)가 되고, 이에 대한 최적 해법에는 Vachani 등의 해법 [12], Schrijver 등의 해법 [10], 명과 김의 해법 [3], Amico 등의 해법 [5]이 발표되어 있다. 한편 링 네트워크에서 파장 변환을 허용하지 않는 경우에, 광경로가 이미 주어지고 이들 광경로에 대한 최소 파장 할당 문제는 순환 아크 채색 문제(circular arc coloring problem)가 되고, 이는 NP-complete 임이 Tucker [12]에 의해 증명되어 있다. 이와 관련된 연구는 그래프 이론 분야에서 오래전부터 많은 연구가 이루어지고 있다. 본 연구에서는 RLP 및 관련된 연구 결과들을 이용하여 RWAP 최적해의 특성을 규명하고, 새로운 하한을 제안하기로 한다. 본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2장에서는 용어를 정의하고 3장에서는 RWAP 최적해의 특성 규명 및 하한을 제시하기로 한다.

2. 용어의 정의

링은 n 개의 노드들이 시계 방향으로 1부터 n 까지 번호가 붙어있는 방향성이 없는 네트워크로 정의한다. 이때 노드의 집합 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 와 링크의 집합 $L = \{1, 2, \dots, n\}$ 로 이루어진 방향성이 없는 링이 주어졌다고 가정하자. 여기에서 링크 i 는 노드 i 와 노드 $i+1$ 을 연결하는 것이고, 링크 n 은 노드 n 과 노드 1을 연결하는 링크를 나타낸다. r_k 는 서로 다른 두 노드의 쌍 $o(k)$ 와 $d(k)$ 간의 트래픽 수요량을 나타내고, K 는 트래픽 수요가 존재하는 노드 쌍들의 인덱스 집합이다. 이때 $o(k) < d(k)$ 라 가정하고, $o(k)$ 를 노

드 쌍 k 의 공급노드라 하고 $d(k)$ 를 노드 쌍 k 의 수요노드라 정의한다. 수요 노드쌍을 $[o(k), d(k)]$ 로 표시하기로 한다. $o(k)$ 와 $d(k)$ 는 링상에 존재하는 서로 다른 두 개의 노드이므로 이들간에는 링상에서 두가지의 경로가 존재한다. 경로가 $\{o(k), o(k) + 1, \dots, d(k) - 1\}$ 의 링크로 구성되어 있으면 시계 방향이라고 부르고 L_k^+ 로 표시하고, 경로가 $\{d(k), d(k) + 1, \dots, n, 1, 2, \dots, o(k) - 1\}$ 의 링크로 구성되어 있으면 반시계 방향이라고 부르고 L_k^- 로 표시한다. 이때 링크 n 은 항상 모든 $k \in K$ 에 대하여 L_k^- 에 포함된다.

편의상 노드 쌍 k 를 $o(k)$ 와 $d(k)$ 를 연결하는 링상의 코드(chord)로 정의하면 노드 쌍과 코드는 일대일로 대응된다. 두 개의 코드가 동일한 노드를 공유하지 않으면서 서로 만나면 이들은 교차(cross)한다고 하고, 그 이외의 경우는 평행(parallel)하다고 한다. 이처럼 링상에서 코드들로 이루어진 그래프를 $G(r)$ 로 표시하면 이는 서클 그래프(a weighted circle graph)가 된다. $G(r)$ 에서 상호 교차하는 코드들의 부분 집합을 코드 클릭(chord clique)이라 한다.

코드 k 의 수요 r_k 를 시계 방향이나 반시계 방향으로 정수 단위로 분할시켜 보낼 때, r_k 중 시계 방향으로 보낸 수요를 x_k 라하고, 반시계 방향으로 보낸 수요를 $r_k - x_k$ 라 하자. 여기서 $X = \{x \in Z^{|K|} \mid 0 \leq x_k \leq r_k, \forall k \in K\}$ 로 정의하면, 임의의 $x \in X$ 는 주어진 수요를 만족하는 광경로의 설정 즉 루팅에 대응하는 벡터가 된다. 만약 $x_k > 0$ ($r_k - x_k > 0$)이면 L_k^+ (L_k^-)들에 속한 링크들이 연속하여 연결된 하나의 광경로가 되는데, 이를 그래프 이론에서는 링상의 순환아크(circular arc on the ring)라 한다. 본 연구에서는 코드 k 의 수요 r_k 의 루팅에 의하여 만들어지는 두개의 순환아크를 L_k^+ 와 L_k^- 로 표시하고, 이들은 파장수요(wavelength

requirement or weight) x_k 와 $r_k - x_k$ 를 가진다고 부르기로 한다. 그리고 링상에서 루팅 x 에 대응하는 순환아크들로 만들어지는 그래프를 순환아크 그래프(a weighted circular arc graph)라 하고, $F(x)$ 로 표시하기로 한다. 이때 서로 동일한 링크를 공유하는 순환아크는 동일한 파장을 사용할 수 없다. 주어진 $F(x)$ 에 대해 필요한 최소 파장의 수를 $w(F(x))$ 로 나타내기로 한다. 링상에서 임의의 순환아크가 주어졌을 때 최소 파장의 수를 결정하는 문제는 순환아크 채색 문제(a weighted circular arc coloring problem)에 해당되고, 이는 NP-complete 이다[14].

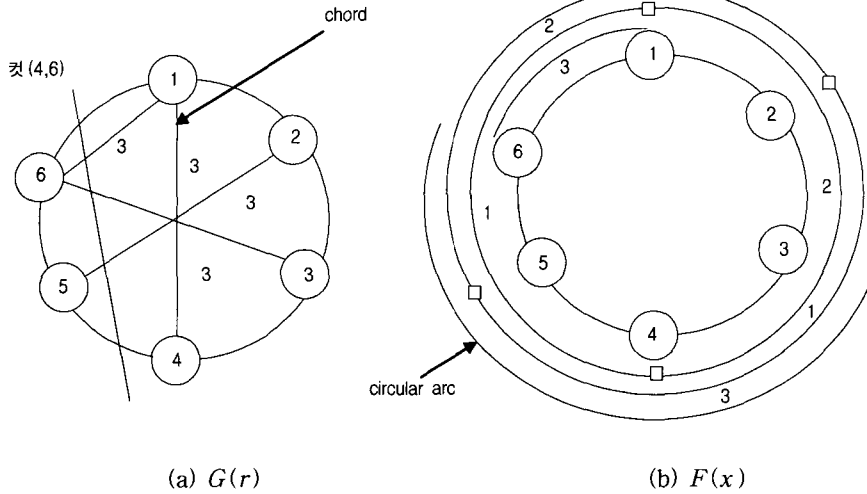
$x \in X$ 에 대해 $F(x, l)$ 은 링크 $l \in L$ 을 지나 는 순환아크들의 파장수요의 합을 나타내고, $z(x) = \max_{l \in L} F(x, l)$ 을 나타낸다. 즉 $z(x)$ 는 루팅 $x \in X$ 에서 링크의 용량 중에서 최대인 것이다. RLP는 $\min_{l \in L} z(x)$ 로 정식화 되고, 이의 최적해를 z^* 라 하자. 또한 RWAP는 $\min_{x \in X} w(F(x))$ 로 정식화 되고, 이의 최적해를 w^* 라 하자.

서로 다른 두 링크 $i, j \in L$ 는 컷(cut)을 나타내고, (i, j) 로 표시하자. $G(r)$ 에서 컷 (i, j) 와 교차하는 코드들의 집합을 $K_{(i, j)}$ 로 나타내기로 한다.

다음 [그림 1]은 $G(r)$ 과 $F(x)$ 의 예이다.

[그림 1]의 (a)는 네 개의 코드[1, 4], [1, 6], [2, 5], [3, 6]의 수요가 모두 3인 서클 그래프를 보여 주고 있다. [그림 1]의 (a)에서 코드 [1, 6]은 [1, 4], [2, 5], [3, 6]과 각각 평행하고, [1, 4], [2, 5], [3, 6]은 상호 교차하는 코드들로 하나의 코드 클릭이 된다. 컷(4, 6)에 대하여 $K_{(4, 6)} = \{[1, 6], [2, 5], [3, 6]\}$ 이 된다.

[그림 1]의 (b)는 (a)에서 $x_{[1, 4]} = 2$, $x_{[1, 6]} = 0$, $x_{[2, 5]} = 2$, $x_{[3, 6]} = 3$ 으로 루팅 시킨 경우의 순환아크 그래프를 보여 주고 있다. 이 루팅에 의해 $L_{[1, 4]}^+$, $L_{[1, 4]}^-$, $L_{[1, 6]}^-$, $L_{[2, 5]}^+$, $L_{[2, 5]}^-$, $L_{[3, 6]}^+$



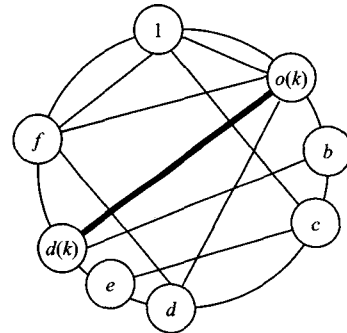
[그림 1] $G(r)$ 과 $F(x)$ 의 예

의 6개의 순환아크가 만들어지고, 이들의 과장수요는 각각 $x_{[1,4]} = 2, r_{[1,4]} - x_{[1,4]} = 1, r_{[1,6]} - x_{[1,6]} = 3, x_{[2,5]} = 2, r_{[2,5]} - x_{[2,5]} = 1, x_{[3,6]} = 3$ 이 된다.

3. RWAP 최적해의 특성 및 하한

어떤 $k \in K$ 의 시계 방향에 있으면서 평행한 코드들의 집합을 $K(k^+)$ 라 하고, k 의 반시계 방향에 있으면서 평행한 코드들의 집합을 $K(k^-)$ 라 하자. 즉 $K(k^+) = \{s \in K : L_s^+ \subset L_k^+\}, K(k^-) = \{t \in K : L_t^- \subset L_k^- \text{ or } L_t^+ \subset L_k^-\}$ 이다. 이때 $t \in K(k^-)$ 에 대해 $L_t^- \subset L_k^-$ 이거나 $L_t^+ \subset L_k^-$ 중 하나만을 만족함에 주의하자.

[그림 2]에서 k 에 대해 $K(k^+) = \{[o(k), d], [b, d(k)], [c, d]\}$ 이고, 모든 $s \in K(k^+)$ 에 대해 $L_s^+ \subset L_k^+$ 가 성립한다. 그리고 $K(k^-) = \{[1, o(k)], [1, f], [o(k), f]\}$ 이고, $L_{[1, f]}^- \subset L_k^-, L_{[o(k), f]}^- \subset L_k^-, L_{[1, o(k)]}^+ \subset L_k^-$ 가 성립한다.



[그림 2]

부분 최적 루팅(local optimal routing)은 $x \in X$ 에서 $x_k > 0$ 이면 $s \in K(k^+)$ 에 포함된 코드들의 수요는 $L_s^+ \subset L_k^+$ 를 만족하는 경로로 모두 루팅시키고, $r_k - x_k > 0$ 이면 $t \in K(k^-)$ 에 포함된 코드들의 수요는 $L_t^- \subset L_k^-$ 이거나 $L_t^+ \subset L_k^-$ 를 만족시키는 경로로 모두 루팅시키는 것으로 정의하기로 한다.

정리 1: 부분 최적 루팅을 만족하지 못하는 루팅 $x \in X$ 가 주어졌을 때, 이때의 링 용량을 $z(x)$ 라 하자. 그러면 $z(x') \leq z(x)$ 를 만족하는 부분 최적 루팅 x' 이 항상 존재한다.

증명 : 어떤 루팅 $x \in X$ 가 주어졌을 때, 임의의 코드 k 에 대해 부분 최적 루팅을 만족하지 못하는 코드 s 가 있다고 가정하자. 다음의 두가지 경우가 존재한다.

Case 1 : $s \in K(k^+)$ 인 경우

$x_k > 0$ 인데, $s \in K(k^+)$ 의 수요 중 일부가 반시계 방향으로 루팅을 하여 부분 최적 루팅을 만족하지 못한다고 하자. 즉 $x_k > 0$ 이고 $L_s^+ \subset L_k^+$ 인데, $r_s - x_s > 0$ 인 것이다. 이때 $L_k^- \subset L_s^-$ 임에 주의하자.

[그림 3]의 (a)에서 보듯이 $L_k^+ \cap L_s^-$ 에 속한 링크는 $x_k + (r_s - x_s)$ 만큼의 용량이 k 와 s 의 루팅에 의해 초과된다. 이때 다음의 두가지 경우가 존재한다.

Case 1.1 : $x_k \geq r_s - x_s$

이 경우 주어진 루팅 x 에서 $x_k' = x_k - (r_s - x_s)$, $x_s' = r_s$ 로 변경한 루팅을 x' 이라 하면, $x' \in X$ 이고 부분 최적 루팅이 된다. 그러면 [그림 3]의 (b)에서 보듯이 x' 에 의해 다른 링크의 용량은 변하지 않고, $L_k^+ \cap L_s^-$ 에 속한 링크의 용량은 $2(r_s - x_s)$ 만큼 감소하게 되므로 $z(x') \leq z(x)$ 가 된다.

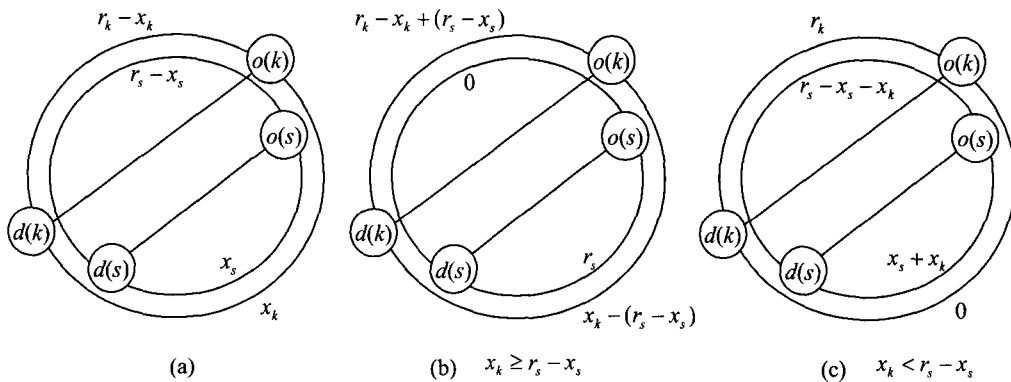
Case 1.2 : $x_k < r_s - x_s$

이 경우 주어진 루팅 x 에서 $x_k' = 0$, $x_s' = x_s + x_k$ 로 변경한 루팅을 x' 이라 하면, $x' \in X$ 이고 부분 최적 루팅이 된다. 그러면 [그림 3]의 (c)에서 보듯이 x' 에 의해 다른 링크의 용량은 변하지 않고, $L_k^+ \cap L_s^-$ 에 속한 링크의 용량은 $2x_k$ 만큼 감소하게 되므로 $z(x') \leq z(x)$ 가 된다. 이 경우는 곧 s 가 주어졌을 때, k 는 $K(s^+)$ 에 포함되는 부분 최적 루팅이 된다.

Case 2 : $s \in K(k^-)$ 인 경우

Case 1과 유사한 방법으로 쉽게 보일 수 있으므로 생략하기로 한다. ■

부분 최적 루팅은 평행한 코드들은 서로 교차하는 루팅을 하지 않음을 의미하는 것이다. 즉 어떤 k 가 시계 방향으로 수요를 루팅시키게 되면 $s \in K(k^+)$ 에 속한 코드들은 $L_s^+ \subset L_k^+$ 를 만족하는 시계 방향으로 모든 수요를 루팅시키게 되고, 어떤 k 가 반시계 방향으로 수요를 루팅시키게 되면 $s \in K(k^-)$ 에 속한 코드들은 $L_s^- \subset L_k^-$ 이거나 $L_s^+ \subset L_k^-$ 를 만족하는 방향으로 모든 수요를 루팅시키는 것이 최적임을 의미하는 것이다. 이러한 부분 최적 루팅의 개념은 Wilfong 등의 연구[14]에서는 두 개의 평행한 코드만을 대상으로



[그림 3]

로 유사한 개념을 제안하고 있다.

$F(x)$ 에서 수요가 분할되는 코드 k 에 대해 $w_k = \min\{x_k, r_k - x_k\}$ 라 하자.

정리 2: 수요가 분할되는 코드 k 에 의해 생성되는 두개의 순환아크 L_k^+ 와 L_k^- 는 w_k 만큼의 과장수요에 대해서 동일한 과장을 할당하는 최적 할당이 항상 존재한다.

증명: 순환아크 그래프 $F(x)$ 에서 어떤 과장이 모든 $l \in L$ 에서 사용될 수 있다면 이는 당연히 최적일 것이다. 순환아크 L_k^+ 와 L_k^- 는 $L_k^+ \cup L_k^- = L$ 이고 $L_k^+ \cap L_k^- = \emptyset$ 이므로, 이들 순환아크의 과장수요에서 w_k 만큼은 동일한 과장으로 할당하는 것이 최적일 것이다. ■

정리 3: 부분 최적 루팅을 만족하지 못하는 루팅 $x \in X$ 에 대해 $w(F(x')) \leq w(F(x))$ 를 만족하는 부분 최적 루팅 $x' \in X$ 가 항상 존재한다.

증명: 정리 1과 유사한 과정을 통하여 쉽게 보일 수 있다. 어떤 루팅 $x \in X$ 가 주어졌을 때, 코드 k 에 대해 부분 최적 루팅을 만족하지 못하는 코드 s 가 있다고 가정하자. 이때 다음의 두가지 경우로 나누어진다.

Case 1: $s \in K(k^+)$ 인 경우

$x_k > 0$ 인데, $s \in K(k^+)$ 의 수요 중 일부가 반시계 방향으로 루팅을 하여 부분 최적 루팅을 만족하지 못한다고 하자. 즉 $x_k > 0$ 이고 $L_s^+ \subset L_k^+$ 인데, $r_s - x_s > 0$ 인 것이다. 이때 $L_k^- \subset L_s^-$ 임을 주의하자.

[그림 3]의 (a)에서 보듯이 $L_k^+ \cap L_s^-$ 에 속한 링크에는 순환아크 L_k^+ 와 L_s^- 에 의한 과장수요 x_k 와 $r_s - x_s$ 가 있다. 이때 다음의 두가지 경우가 존재한다.

Case 1.1: $x_k \geq r_s - x_s$

[그림 3]의 (a)에서 순환아크 L_s^- 의 과장수요에

서 $r_s - x_s$ 만큼을 빼고 이를 순환아크 L_k^- 의 과장수요에 더하고, 순환아크 L_k^+ 의 과장수요에서 $r_s - x_s$ 만큼을 빼고 이를 순환아크 L_s^+ 의 과장수요에 더하는 새로운 루팅 x' 을 정의하자. 이는 [그림 3]의 (b)와 동일하므로 $x' \in X$ 이고 부분 최적 루팅이 된다. 그런데 $L_k^- \subset L_s^-$ 이고 $L_s^+ \subset L_k^+$ 이므로 $w(F(x')) \leq w(F(x))$ 임을 쉽게 알 수 있다.

Case 1.2: $x_k < r_s - x_s$

[그림 3]의 (a)에서 순환아크 L_s^- 의 과장수요에서 x_k 만큼을 빼고 이를 순환아크 L_k^- 의 과장수요에 더하고, 순환아크 L_k^+ 의 과장수요에서 x_k 만큼을 빼고 이를 순환아크 L_s^+ 의 과장수요에 더하는 새로운 루팅 x' 을 정의하자. 그런데 $L_k^- \subset L_s^-$ 이고 $L_s^+ \subset L_k^+$ 이므로 $w(F(x')) \leq w(F(x))$ 임을 쉽게 알 수 있다. 또한 이는 [그림 3]의 (c)와 동일하므로 $x' \in X$ 이고, $k \in K(s^+)$ 에 포함되는 부분 최적 루팅이 된다.

Case 2: $s \in K(k^-)$ 인 경우

Case 1과 유사한 방법으로 쉽게 보일 수 있으므로 생략하기로 한다. ■

위의 정리 1과 정리 3으로부터 RLP 뿐만 아니라 RWAP에서도 부분 최적 루팅을 만족하는 최적해가 항상 존재한다는 것을 알 수 있다.

정리 4: RLP의 최적 해법인 INTEGER[1]는 부분 최적 루팅을 만족한다.

증명: [1, 9] 참조. ■

Myung 등[8]에 의해 INTEGER의 수행 시간은 $O(n|K|)$ 였는데, 최근 명과 김[3]의 결과를 적용하면 $O(\min\{n|K|, n^2\})$ 수행 시간내에 가능하다. 이는 현재까지 알려진 RLP를 위한 최적 해법 중에서 가장 빠른 수행 시간의 해법이다[2]. 즉

RLP의 최적해이면서 부분 최적 루팅을 만족하는 해는 INTEGER를 이용하면 쉽게 구할 수 있는 것이다. 또한 부분 최적 루팅을 만족하는 RWAP의 최적해가 항상 존재하므로, 부분 최적 루팅의 개념을 이용하면 RWAP에 대한 효율적인 근사 해법의 개발이 가능할 것으로 보인다.

그러나 RWAP는 NP-complete이므로 만약 새로운 해법의 효율성을 알아보려면 좋은 하한을 가지고 비교하는 것이 필요한데, 본 연구에서는 RWAP에 대한 새로운 하한을 제시하고 이 하한이 최악의 경우에 매우 효율적임을 보이도록 하겠다.

RWAP에서 순환아크들이 링크를 공유하면 동일한 파장을 사용할 수 없다는 제약을 완화하게 되면 RLP가 되므로 $z^* \leq w^*$ 가 된다. 즉 RLP의 최적해는 RWAP에 대한 하한이 되는 것이다. w^* 에 대하여 z^* 가 얼마나 좋은 하한인지를 알아보자.

$G(r)$ 의 컷 (i, j) 에 대해 $\sum_{k \in K(i, j)} r_k$ 가 최대가 되는 컷을 (i^*, j^*) 라 하고, 이때 $D_{max} = \sum_{k \in K(i^*, j^*)} r_k$ 라 하자.

정리 5 : $\left\lfloor \frac{D_{max}}{2} \right\rfloor \leq z^* \leq \left\lceil \frac{D_{max} + 1}{2} \right\rceil$

증명 : Vachani 등[13] 참조. ■

정리 6 : $z^* \leq w^* \leq D_{max}$

증명 : $z^* \leq w^*$ 는 당연하다. $w^* \leq D_{max}$ 임을 보이자.

모든 코드 $k \in K(i^*, j^*)$ 의 수요 r_k 를 링크 i^* 를 포함하는 방향으로 보내고, 나머지 $k \notin K(i^*, j^*)$ 의 수요 r_k 는 링크 i^* 및 j^* 를 지나지 않는 방향으로 보내는 루팅을 x 라 하자. 그러면 x 에 의해 $F(x, i^*) = D_{max}$ 이고, $l \in L - \{i^*\}$ 에 대해 $F(x, l) \leq D_{max}$ 이다. 당연히 $x \in X$ 이고, $F(x)$ 에서 어떤 순환아크도 링크 j^* 를 지나지 않게 된다. $F(x)$ 에서 순환아크들은 $j+1, j+2, \dots, n, 1,$

$2, \dots, i-1, i, i+1, \dots, j-1$ 의 링크로 구성된 라인 그래프(line graph)상의 아크가 되고, 이 라인 그래프에서 링크의 최대 용량은 D_{max} 이므로 필요로 하는 파장의 수는 D_{max} 가 된다. 따라서 $w^* \leq D_{max}$ 가 성립한다. ■

정리 6으로부터 w^* 는 z^* 에서 D_{max} 까지 가능하고, 정리 5로부터 $z^* = D_{max}/2$ 가 가능하므로 RWAP의 최적해는 RLP의 최적해로부터 최대 2배까지 차이가 날 수 있음을 알 수 있다. 즉 z^* 는 항상 w^* 의 효율적인 하한이 될 수 없다는 것이다. 다음의 예는 $z^* = D_{max}/2$ 이고 $w^* = D_{max}$ 인 최악의 경우의 예이다.

(예제 1)

K 는 상호 교차하는 코드들로 구성되어 있고, 각 코드의 수요는 모두 1이라 하자. 즉 $D_{max} = |K|$ 이다. 이때 코드의 공급노드의 순서별로 시계 방향과 반시계 방향으로 수요 1을 번갈아가면서 루팅시키는 것이 RLP의 최적해임을 쉽게 알 수 있다. 이 최적 루팅에 의해 $|K|$ 가 짝수이면 $z^* = |K|/2 + 1$ 이고, $|K|$ 가 홀수이면 $z^* = \lceil |K|/2 \rceil$ 가 된다. 그리고 $k \in K$ 들은 모두 하나의 코드 클릭에 속하므로 동일한 파장을 사용할 수 없고, 따라서 $w^* = |K|$ 가 된다.

(예제 1)처럼 RLP의 최적해 z^* 와 RWAP의 최적해 w^* 는 최대 2배까지 차이가 날 수 있으므로, z^* 는 w^* 에 대하여 항상 좋은 하한이 될 수 없다. 본 연구에서는 이러한 최악의 경우에도 효과적인 하한을 제시하도록 하겠다.

$G(r)$ 에서 C 를 코드 클릭 중에서 클릭에 속한 코드들의 $\lceil r_k/2 \rceil$ 의 합이 최대가 되는 것이라 하자.

정리 7 : (코드 클릭 하한) $\sum_{k \in C} \left\lceil \frac{r_k}{2} \right\rceil \leq w^*$

증명 : $G(r)$ 에서 C 는 코드 클릭이고 이에 속한 코드들은 상호 교차하므로 임의의 $k \in C$ 에서 사용된 파장은 $t \in C - \{k\}$ 에서는 재사용 할 수 없다. 따라서 코드 $k \in C$ 들은 자신에 의해 만들어지는 순환아크 L_k^+ 와 L_k^- 에서 파장 재사용을 최대화하는 것이 최소 파장 할당임을 알 수 있다. 이를 위해서는 r_k 가 짝수이면 순환아크 L_k^+ 는 $r_k/2$ 의 파장수요를 가지고 순환아크 L_k^- 는 $r_k/2$ 의 파장수요를 가지도록 하면 파장 재사용을 최대화하는 것이 되고, 이때 정리 2에 의해 L_k^+ 와 L_k^- 의 파장수요 $r_k/2$ 는 동일한 파장을 할당하는 것이 최소 파장 할당이 된다. 또한 r_k 가 홀수이면 순환아크 L_k^+ 는 $\lfloor r_k/2 \rfloor$ 의 파장수요를 가지고 순환아크 L_k^- 는 $\lceil r_k/2 \rceil$ 의 파장수요를 가지도록 하거나 또는 순환아크 L_k^+ 는 $\lceil r_k/2 \rceil$ 의 파장수요를 가지고 순환아크 L_k^- 는 $\lfloor r_k/2 \rfloor$ 의 파장수요를 가지도록 하면 파장 재사용을 최대화하는 것이 되고, 이때 정리 2에 의해 L_k^+ 와 L_k^- 의 파장수요 중에서 $\lfloor r_k/2 \rfloor$ 에 대해서는 동일한 파장을 할당하는 것이 최소 파장 할당이 된다. 이러한 파장 할당 후에 r_k 가 홀수인 경우 1개의 파장수요가 남게 되는데, 이들은 모두 C 에 포함되어 있어서 상호 교차하므로 동일한 파장을 할당할 수 없다. 따라서 $k \in C$ 에 속한 코드들에 필요한 최소의 파장의 수는 $\sum_{k \in C} \left\lceil \frac{r_k}{2} \right\rceil$ 가 되어 정리 7이 성립함을 알 수 있다. ■

위의 하한에 대한 개념은 Cheng[10]에 의해 모든 $k \in K$ 에 대해 $r_k = 1$ 인 경우에 대해 제안이 되었다. 본 연구는 이 개념을 보다 확장하여 일반적인 r_k 에 대해 정의한 것이 된다. 위의 정리 6과 정리 7로부터 다음이 성립한다.

정리 8 : $\max \left\{ \sum_{k \in C} \left\lceil \frac{r_k}{2} \right\rceil, z^* \right\} \leq w^*$

즉 RWAP의 하한은 이의 완화된 문제인 RLP의 최적해인 z^* 뿐만 아니라, 코드 클릭에 의해서도 하한이 결정될 수 있음을 알 수 있다. 특히 코드 클릭 하한의 경우 (예제 1)에서 제시한 최악의 경우에 적합한 하한을 제공함을 알 수 있다.

정리 7에서 제안한 두 가지 하한 중 코드 클릭 하한이 발생할 조건에 대해 알아보자.

$z_{(i,j)}$ 는 컷 (i,j) 에 걸쳐 있는 코드만으로 이루어진 $G(r)$ 의 하위 그래프에서의 최적 링 용량이라 하고, $D_{(i,j)} = \sum_{k \in K(i,j)} \frac{r_k}{2}$ 이라고 하자. 그러면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

정리 9 : $D_{(i,j)}$ 가 홀수이면 $z_{(i,j)} = \left\lceil \frac{D_{(i,j)}}{2} \right\rceil = \frac{D_{(i,j)}}{2} + \frac{1}{2}$ 이고, $D_{(i,j)}$ 가 짝수이면 $z_{(i,j)} = \frac{D_{(i,j)}}{2}$ 이거나 $z_{(i,j)} = \frac{D_{(i,j)}}{2} + 1$ 이다.

증명 : $D_{(i,j)}$ 는 컷 (i,j) 에 걸쳐 있는 코드만으로 이루어진 $G(r)$ 의 하위 그래프에서의 최대 컷 용량이 되므로 정리 5로부터 정리 9가 성립한다. ■

$G(r)$ 에서 컷 (i,j) 는 C 를 포함하는 컷 중에서 $D_{(i,j)}$ 가 가장 큰 컷이라 하고, $O = \{k \in C : r_k \text{는 홀수}\}$ 라 하자.

정리 10 : $\sum_{k \in C} \left\lceil \frac{r_k}{2} \right\rceil > z_{(i,j)}$ 이려면, $D_{(i,j)}$ 가 홀수이면 $|O| > \sum_{k \in K(i,j) - C} r_k + 1$ 이고, $D_{(i,j)}$ 가 짝수이고 $z_{(i,j)} = \frac{D_{(i,j)}}{2}$ 이면 $|O| > \sum_{k \in K(i,j) - C} r_k$ 이고, $D_{(i,j)}$ 가 짝수이고 $z_{(i,j)} = \frac{D_{(i,j)}}{2} + 1$ 이면 $|O| > \sum_{k \in K(i,j) - C} r_k + 2$ 이다.

증명 : C 는 짝수 코드들의 집합 $C - O$ 와 홀수

코드들의 집합 O 로 구성되어 있으므로

$$\begin{aligned} \sum_{k \in C} \left\lfloor \frac{r_k}{2} \right\rfloor &= \sum_{k \in C-O} \frac{r_k}{2} + \sum_{k \in O} \frac{r_k}{2} \\ &+ \frac{1}{2} |O| = \sum_{k \in C} \frac{r_k}{2} + \frac{1}{2} |O| \end{aligned} \quad (1)$$

이다. 이때 $C \subseteq K_{(i,j)}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{D_{(i,j)}}{2} &= \sum_{k \in K_{(i,j)}} \frac{r_k}{2} \\ &= \sum_{k \in K_{(i,j)}-C} \frac{r_k}{2} + \sum_{k \in C} \frac{r_k}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

이다.

정리 9로부터 $D_{(i,j)}$ 가 홀수이면 $z_{(i,j)} =$

$$\left\lceil \frac{D_{(i,j)}}{2} \right\rceil = \frac{D_{(i,j)}}{2} + \frac{1}{2} \text{이므로, 이 경}$$

우에 $\sum_{k \in C} \left\lfloor \frac{r_k}{2} \right\rfloor > z_{(i,j)}$ 이려면, 식 (1), 식 (2)

로부터 $\sum_{k \in C} \frac{r_k}{2} + \frac{1}{2} |O| > \sum_{k \in K_{(i,j)}-C} \frac{r_k}{2}$

$+ \sum_{k \in C} \frac{r_k}{2} + \frac{1}{2}$ 이므로 $|O| > \sum_{k \in K_{(i,j)}-C} r_k + 1$ 이어야 함을 알 수 있다. $D_{(i,j)}$ 가 짝수인 경우도 동일한 과정을 통해 쉽게 보일 수 있다. ■

정리 10으로부터 만약 C 를 포함하는 컷 (i,j) 가 $D_{(i,j)} = D_{\max}$ 인 경우라 하더라도, 일반적으로 코드 클릭 하한이 z^* 보다 큰 경우는 매우 드물게 발생함을 알 수 있다.

이러한 점은 본 연구에서 Lee 등[7]이 사용한 실험 데이터를 가지고 하한을 구해 본 결과에서 명확하게 나타나고 있다. Lee 등의 연구에서는 $n = 10, 15, 30$ 인 세가지 네트워크에서 각 코드 수 요를 1, 2, 3으로 임의 배정하고, 각 네트워크에 대해 20문제씩 총 60문제를 대상으로 실험을 하였다. 이 실험에 사용된 데이터를 대상으로 하한을 구해 본 결과, 59문제가 $z^* = w^*$ 이고, 1문제만이

$w^* = z^* + 1$ 의 결과를 보이고 있다. 여기에서 z^* 는 명의 연구[1]를 이용하여 구하였고, w^* 는 Lee 등의 연구의 실험 결과치이다. 만약 Lee 등의 연구에서 실험된 데이터가 실제적인 상황과 유사하다고 본다면 대부분의 경우에 RWAP의 최적해와 RLP의 최적해가 일치함을 알 수 있다.

이러한 점은 예상하지 못한 매우 특이한 결과라 할 수 있다. 즉 WDM 링의 경우 파장의 변환을 허용하는 것이나 허용하지 않는 것이 대부분의 경우에 동일한 수의 파장을 요구한다는 것이다. 이는 본 연구에서 제안한 부분 최적 루팅이 RLP 및 RWAP에서 동일하게 적용된다는 점을 고려하면, 특수한 경우를 제외하고는 동일한 최적해가 나온다는 것임을 알 수 있다. 여기서 특수한 경우란 코드 클릭 하한이 z^* 보다 크거나 코드들이 오드 홀(odd hole)을 포함하는 경우 등이라 할 수 있다. 순환아크 그래프에서 오드 홀에 관한 자세한 논의는 [14]를 참조하면 된다.

이러한 결과는 현실에 있어서 매우 중요한 시사점을 제공한다. 즉 노드에서 파장의 변환을 허용하는 경우(RLP)와 파장의 변환을 허용하지 않는 경우(RWAP)에 필요로 하는 파장의 수에 있어서 별다른 차이점을 보이지 않는다는 것이다. 파장의 변환을 허용하는 노드장비가 파장의 변환을 허용하지 않는 장비에 비해 그 가격이 비싸고 개발이 어렵다는 점을 고려하면, 현실적으로 파장 변환을 허용하지 않는 노드 장비를 사용하더라도 파장 변환을 허용하는 장비를 이용하는 것과 동일한 수의 파장으로 서비스가 가능하다는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

WDM 방식의 링 네트워크는 기간 통신망을 중심으로 활발하게 구축이 진행되고 있다. 본 연구에서는 WDM 망의 루팅 및 파장할당 문제인 RWAP를 정의하고, RWAP의 최적해의 특성 및 하한에 대한 이론적 결과를 제시하고 있다. 이를 위해 먼저 최적 해법이 알려져 있는 RLP를 이용하여 부

분 최적 루팅이라는 새로운 개념을 제안하고, 부분 최적 루팅을 만족하는 RLP 및 RWAP의 최적해가 항상 존재함을 보였다. 또한 RWAP가 NP-complete임을 감안하여 RWAP에 대한 새로운 클릭 하한을 제시하고 이 하한이 최악의 경우에 효율적인 하한임을 보였다. 그리고 기존의 데이터를 이용하여 실제 상황에서 파장의 변환을 허용하는 RLP의 최적해와 파장의 변환을 허용하지 않는 RWAP의 최적해가 대부분의 경우에 동일함을 보였다.

향후의 연구방향으로는 새롭게 제안한 부분 최적 루팅을 이용하여 RWAP의 근사 해법을 개발하고, 이 해법의 이론적 및 실제적 효율성을 알아보아야 할 것이다. 또한 실험 데이터를 보다 확대하여, 클릭 하한의 발생 가능성과 RLP 및 RWAP의 최적해(필요한 최소 파장의 수)의 차이가 거의 나지 않는지에 대한 심도 있는 검증이 필요할 것으로 보인다.

참 고 문 헌

- [1] 명영수, "정수단위로만 루팅이 허용되는 SONET 링의 용량결정문제", 「한국경영과학회지」, 제 25권, 제1호(1998), pp.49-62.
- [2] 명영수, 김후곤, "분할이 허용된 SONET 링의 루팅 해법들에 대한 비교 분석", 「경영과학지」, 제18권, 제2호(2001).
- [3] 명영수, 김후곤, "분할 루팅이 허용되는 링의 용량결정문제에 대한 개선된 해법", 「한국경영과학회지」, 제26권, 제4호(2001).
- [4] Cheng, C.T., "A new approximation algorithm for the demand routing and slotting problem on rings with unit demands," *Lectures in Computer Science 1671 : Randomization, Approximation and Combinatorial Optimization*, 1999, pp.210-220.
- [5] Dell'Amico, M., M. Labbe, and F. Maffioli, "Exact Solution of the SONET Ring Loading Problem," *Operations Research Letters*, 26(1999), pp.119-129.
- [6] Hsu, W.L., "Maximum weight clique algorithms for circular-arc graphs and circle graphs," *SIAM J. on Computing*, Vol.14, No.1(1985).
- [7] Lee, T.H., K.S. Lee. and S.S. Park, "Optimal Routing and Wavelength Assignment in WDM Ring Networks," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Vol. 18, No.10(2000), pp.2146-2154.
- [8] Myung, Y.S., H.G. Kim. and D.W. Tcha, "Optimal load balancing on SONET bidirectional rings," *Operations Research*, 45 (1997), pp.148-152.
- [9] Myung, Y.S., "An Efficient Algorithm for the Ring Loading Problem with Integer Demand Splitting," to appear in *SIAM J. Discrete Math.*
- [10] Schrijver, A., P. Seymour. and P. Winkler, "The ring loading problem," *SIAM J. Discrete Math.*, 11(1998), pp.1-14.
- [11] Stern, T. E. and K. Bala, *Multimavelength Optical Networks : A Layered Approach*, Addison Wesley, 1999.
- [12] Tucker, A., "Coloring a family of circular arcs," *SIAM J. Appl. Math.*, Vol.29, No.3 Nov. 1975.
- [13] Vachani, R., A. Shulman. and P. Kubat, "Multicommodity flows in ring networks," *INFORMS Journal on Computing*, 8(1996), pp.235-242.
- [14] Wilfong, G. and P. Winkler, "Ring Routing and Wavelength Translation," *ACM-SIAM Sym. on Discrete Math.*, 1998.