

# Bootstrap 방법을 이용한 결합 Shewhart-CUSUM 관리도의 설계\*

송서일 · 조영찬 · 박현규

동아대학교 산업시스템공학과

## Design of Combined Shewhart-CUSUM Control Chart using Bootstrap Method

Suh-Il Song · Young-Chan Jo · Hyun-Gu Park

Dept. of Industrial Systems Engineering, Dong-A University

Statistical process control is used widely as an effective tool to solve the quality problems in practice fields. All the control charts used in statistical process control are parametric methods, suppose that the process distributes normal and observations are independent. But these assumptions, practically, are often violated if the test of normality of the observations is rejected and/or the serial correlation is existed within observed data.

Thus, in this study, to screening process, the Combined Shewhart - CUSUM quality control chart is described and evaluated that used bootstrap method. In this scheme the CUSUM chart will quickly detect small shifts form the goal while the addition of Shewhart limits increases the speed of detecting large shifts. Therefor, the CSC control chart is detected both small and large shifts in process, and the simulation results for its performance are exhibited.

The bootstrap CSC control chart proposed in this paper is superior to the standard method for both normal and skewed distribution, and brings in terms of ARL to the same result.

**Keywords** : Shewhart, CUSUM, CSC chart, Bootstrap, ARL

### 1. 서론

통계적공정관리(SPC, statistical process control)에서 가장 널리 사용하는 기법은 모수적인 방법이며, 이 기법들에는 기본적인 공정의 통계적인 특성에 관한 가정들을 요구한다. 예를 들면 통계적 공정관리의 전통적

인 방법, 즉, Shewhart 관리도, CUSUM 관리도, EWMA 관리도 등은 관측치들이 독립이고, 관심 통계량은 정규분포를 따른다고 가정한다. 그러나 현실적으로 이러한 가정들은 맞지 않을 때가 종종 있다. 관심통계량이 정규분포를 따른다는 것에 대한 문제점은 품질변수의 분포가 강하게 치우쳐 있어서 그 분포의 꼬리의 밀

\* 이 논문은 2000학년도 동아대학교 학술연구조성비(공모과제)에 의하여 연구되었음

도가 정규분포의 그것과 다르거나, 또는 그 분포의 범위가 유한할 수 있기 때문에 위배될 수 있다. 또한 관측치가 독립이라는 가정도 종종 현실적으로 위배된다. 왜냐하면 관측치들은 시간에 따라 상관되는 경향이 있기 때문이다 Padgett, et. al<sup>7)</sup>은 이 두 가지 가정이 위배될 때 이전에 정해진 위험수준(제 1종과 제 2종 오차)이 극적으로 변화함을 발견하고, 종래의 관리도를 사용하기에 앞서 그 가정들을 철저히 조사하여야 한다고 제안하였다.

이러한 통계적 공정관리도들은 전술한 것과 같이 관측치들이 독립이고, 관심 통계량은 정규분포를 따른다고 가정을 하기 때문에 측정된 변수들의 정규성에 대한 검정이 기각되거나, 데이터내에 상당한 계열 상관관계가 있는 경우에는 공정을 해석하는데 있어서 심각한 오류를 범할 수 있다. 따라서 Efron<sup>2)</sup>에 의해서 처음 제안된 사전분포 가정을 필요로 하지 않는 컴퓨터 집약적인 재샘플링절차인 Bootstrap이 이러한 상황에서 사용될 수 있으며, 잠재적으로 유용한 실용적인 품질개선 도구가 될 수 있다.

관리도에 적용된 Bootstrap에 관한 연구로 Bajgier<sup>1)</sup>는 하위 그룹화된 데이터에 대한 Bootstrap 관리도를 제안했다. 표준 Shewhart 관리도와 그의 제안된 Bootstrap 관리도의 평균 런 길이 ARLs(average run lengths)의 모의실험된 분포들을 그래프화해서 비교함으로써 그의 관리도를 평가했다. 이 기법은 Bootstrap 관리도의 수행도에 대한 의미있는 평가를 제시했다. Seppala, et. al<sup>8)</sup>은 데이터의 하위집단의 평균 또는 표준편차를 감시하는데 사용될 수 있는 하위집단 Bootstrap이라 불리는 방법을 제안했다. 그들은 하위집단 Bootstrap의 수행도를 평가하는데 모의실험된 포함확률(simulated coverage)이라 불리는 척도를 사용했다. Liu 와 Tang<sup>3)</sup>은 하위집단화된 데이터에 대한 관리도를 설계하는데 유사한 기법을 제시했다. 그들은 실제 관리도와 Bootstrap 관리도에서의 차이점을 살펴봄으로써, 그들 관리도의 수행도를 평가했다. 그러나 위에서 언급된 두 방법(즉, 모의실험된 포함확률도 실제 한계와 Bootstrap 한계와의 차이)도 Bootstrap 관리도의 수행도에 대한 적절한 그림을 제시할 수는 없었다.

따라서 본 연구에서는 사전분포의 가정없이 적용할 수 있는 Bootstrap 방법으로 관리도를 설계하고자, 일반적으로 잘 알려진 공정변동이 클 경우 잘 감지하는 Shewhart( $\bar{x}$ ) 관리도와 공정의 작은 변화를 잘 감지하는 CUSUM 관리도를 결합한 CSC (Combined Shewhart - CUSIM) 관리도를 설계하여 그 민감도를 분석하고자 한다.

이를 위해 우선 공정관리한계를 평가하는 데 전형적

으로 사용되고 있는 일련의 하위그룹들을 포함하도록 Bootstrap 백분위수법(bootstrap percentile method)을 확장시켜  $\bar{x}$  관리도의 관리한계를 설정하여, 작은 변화에 민감한 CUSUM 관리도와  $3\sigma$  이상의 변화에 민감한  $\bar{x}$  관리도를 결합한 Bootstrap CSC 관리도를 설계하여 평가한다.

그리고 본 연구에서는 이 CSC 관리도에서 샘플된 평균상에 변화가 발생할 때 Bootstrap 백분위수(bootstrap percentile) 방법을 적용하여 전통적인 공정관리한계와 Bootstrap 백분위수를 통한 공정관리한계를 비교하고, CSC 관리도의 수행도 측면에서는 ARL로 비교·평가한다.

## 2. Bootstrap $\bar{x}$ 관리도의 관리한계

Efron에 의해서 처음 제안된 Bootstrap은 통계량의 샘플링 분포를 효과적으로 예측하는 계산적 기법이다. 특히 원샘플이 추출된 근원적인 모집단에 관한 사전 분포의 가정에 의존하지 않는 비모수적 방법으로 단순히 컴퓨터를 통한 재샘플링 절차를 취함으로써 손쉽게 사용할 수 있다.

한편, 최근 들어 이러한 Bootstrap 방법을 통계적 공정관리에 적용한 연구가 활발히 이루어지고 있는데, Bajgier<sup>1)</sup>, Seppala 등<sup>8)</sup>과 Liu와 Tang<sup>3)</sup>이 대표적인 사례들이다.

본 연구에서는 하위집단 Bootstrap의 측정치들은 식 (1)에 의해 설명된다고 가정한다.

$$x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

이 때  $i = 1, 2, \dots, k$  그리고,  $j = 1, 2, \dots, n$  이다. 여기서  $\mu_i$  는  $i$  번째 하위집단의 실제 평균이고,  $\varepsilon_{ij}$  는 랜덤오차의 조건이다.

그리고 공정은 관리상태이고, 공정평균과 분산이 각각 하위그룹에 대해 동일하게 유지된다고 가정하면, 즉,

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \mu, \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma^2$$

이고, 이때  $\bar{x} = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_k)/k$  와  $s^2 = (s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_k^2)/k$  는 이에 상응하는 표본 추정량이다

다음은 모든 원래의 값들을 취합하는 간단한 Bootstrap 방법에 의한 평균과 분산을 유도하면 다음과 같다. 이때 각각의 관측된 값  $x_{ij}$ 에 대해  $1/N$ 의 가중치를 부여한 하위그룹 샘플에 의하여 조건부 확률공간에서의 기대치

와 분산을  $E^*$ 와  $Var^*$ 로 나타낸다고 하자. Bootstrap 표본 크기는  $n$ 이고, Bootstrap방법으로 처리된 평균의 기대치와 분산은 식 (2)와 식 (3)과 같다.

$$E^*(\bar{x}^*) = \frac{1}{n} \sum E^*(x_i^*) = \frac{1}{n} n \bar{x} = \bar{x} \quad (2)$$

그리고

$$\begin{aligned} Var^*(\bar{x}^*) &= \frac{1}{n} Var^*(x_i^*) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n} \frac{N-1}{N} S^2 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $S^2$ 은 급내 샘플 분산이 아니라 원 샘플의 전체 샘플 분산이다.

샘플의 분산은 모집단 분산의 불편 추정치이고 Bootstrap 공간에서 풀링된 샘플이 모집단처럼 활동하기 때문에 Bootstrap방법으로 처리된 분산의 기대값은 식 (4)와 같아진다.

$$E^*(S^{*2}) = \frac{\sum \sum x_{ij}^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{N-1}{N} S^2 \quad (4)$$

그러므로 Bootstrap에 의해 처리된 평균의 분산은 그 공정의 전체 분산에 의존하며, 따라서 공정 분산이 동일하다는 것을 알지 못한다면 관리한계를 설정하는데 사용될 수 없다. 한편 Bootstrap방법으로 처리된 분산의 기대값은 하위그룹 평균의 참값에 의존하므로 공정 평균이 같다는 것을 알지 못한다면 관리한계를 설정하는데 사용되어질 수 없다. 따라서 논리적인 악순환이 존재하므로  $\bar{x}$ 관리도 또는  $s^2$ 관리도 어느 것으로부터도 시작할 수 없다.

따라서 위에서 나타난 결점들은 원 관측치 대신에 그 모형의 잔차를 재샘플링함으로써 제거될 수 있다.

하위그룹  $i$ 에서  $j$ 번째 잔차는 식 (5)와 같이 정의되며, 하위그룹  $i$ 에서 잔차의 평균은  $\bar{e}_i$ 로 표기한다.

$$e_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i \quad (5)$$

잔차의 분산은 식 (6)과 같다.

$$Var(e_{ij}) = \frac{(n-1)^2}{n^2} Var(x_{ij}) + \frac{n-1}{n^2} Var(x_{ij})$$

$$= \frac{n-1}{n} \sigma_i^2 \quad (6)$$

식 (6)에서 나타나듯이 잔차분산  $Var(e_{ij})$ 는  $Var(x_{ij})$ 와 비교하여  $(n-1) : n$ 의 비율로 감소된다.

$Var(\bar{e}_{i.})$ 와  $Var(\bar{x}_{i.})$ 에 대해서도 동일하게 적용된다. 만약 하위그룹 크기  $n$ 이 작다면, 통계적 공정관리에서 자주 그렇듯이, 분산의 감소는 관리한계를 상당히 좁게 만들 것이다. 즉,  $n=5$ 일때 분산의 감소는 20%이고, 정규모집단에서 관리한계는 10.6%만큼 좁아진다.

$E^*(V^{*2})$ 의 기대값은 식 (7)과 같다.

$$E(E^*(V^{*2})) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \quad (7)$$

이것은 Bootstrap방법으로 처리된  $\bar{x}$  관리도는 너무 좁은 관리한계를 가지고 있고 Bootstrap방법으로 처리된  $s^2$  관리도는 낮은 치우침을 보여준다. 따라서 잔차에 의한 하위그룹 Bootstrap을 효율적으로 사용하려면 분산 감소에 대한 수정을 가해야만 한다. 위의 결과를 이용하여 각각의 원 잔차  $e_{ij}$ 에  $\sqrt{n/(n-1)}$  을 곱함으로써 이것을 쉽게 수정할 수 있다.

### 3. Bootstrap CSC 관리도

Bootstrap CSC 관리도는 Bootstrap  $\bar{x}$  관리도의 관리한계를 CUSUM 관리도에 추가하여 공정변화를 감지하는 관리도로써 이때 CUSUM 통계량은 식 (8)과 같다.

$$Z_i = \frac{\bar{Y}_i - m}{\sigma} \quad (8)$$

여기서  $m$ 은 목표 평균치이고,  $\sigma$ 는 Bootstrap 관측치의  $\bar{Y}^*$ (이미 알고 있음을 가정한다)는 표준편차이고,  $\bar{Y}_i$ 는 CUSUM안의 Bootstrap  $i$ 번째 관측치 평균이다. CUSUM안은 두 개의 누적합을 필요로 한다. 하나는 양의 변동이고 다른 하나는 음의 변동으로서 식 (9)과 같이 표현된다.

$$S_{Hi} = \max[0, (Z_i - k) + S_{H(i-1)}] \quad (9)$$

$$S_{Li} = \max[0, (-Z_i - k) + S_{L(i-1)}]$$

여기서  $\max[A, B]$ 는 A와 B의 최대치이다.  $S_H$  본다.  
 또는  $S_L$ 이 결정구간 h보다 크게 된다면 이것은 공정이 통계적인 관리밖에 있다는 신호이다. 초기 CUSUM 값  $S_0$ 는 표준 CUSUM안에서 zero와 똑같이 놓는다.  $S_0$ 가 zero가 아닐 때 우리는  $S_0$ 의 “초기치(headstart)”을 가지는 FIR CUSUM안을 가진다. 이때  $h$ 와  $k$ 의 모수 값은 이전에 Lucas<sup>4),5)</sup> 그리고 Lucas와 Crosier<sup>6)</sup>에 의해서 유용하게 사용한 같은 범위값을 사용한다.

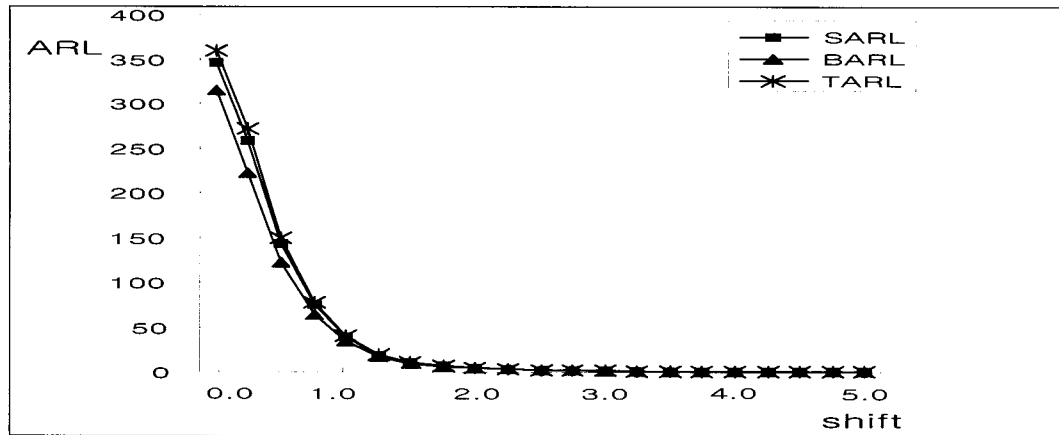
따라서 Bootstrap  $\bar{x}$  관리도의 관리한계를 Lucas<sup>4),5)</sup>이 제안하고 있는 CUSUM 관리도의 관리한계에 추가함으로써 Bootstrap CSC 관리도의 민감도를 분석하여

4. Simulation 분석

Lucas<sup>4)</sup>는 CSC 관리도의 분석에서 샘플 크기가 1이고 CUSUM 관리도의 모수와 Shewhart 관리한계를 변화시켰을 때 결합 관리도의 ARL을 분석하였다. 그러나 본 연구에서는 산업계에서 추천하고 있는 샘플 크기  $n=5$ 와 하위 그룹 크기  $k=20$ 인 경우와 샘플 크기  $n=10$ 과 하위 그룹 크기  $k=20$ 인 경우에 대해 분석하여 본다.

<Table 1> Comparison of ARL for Simulation and Bootstrap control charts( $n=5, k=20$ )

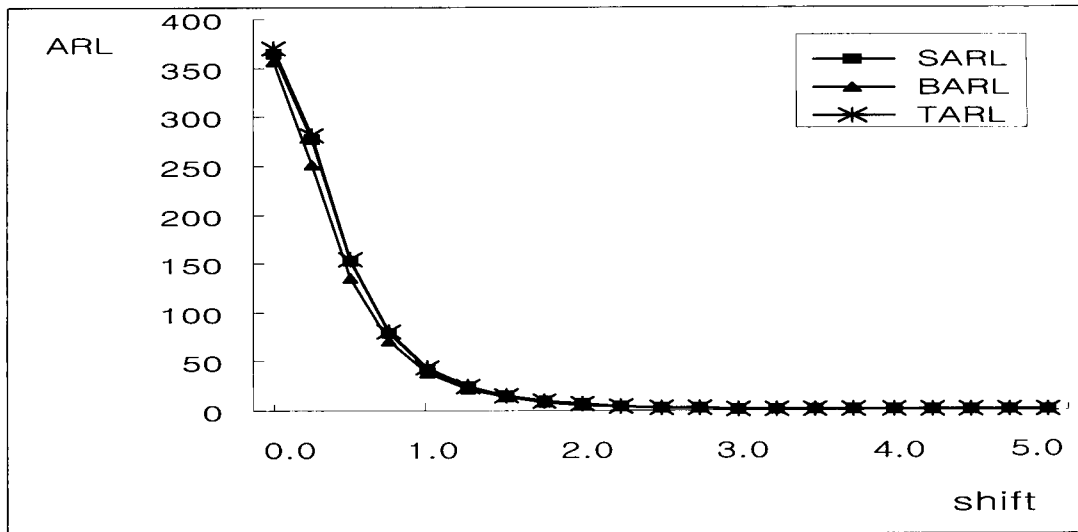
Shift	3.0 $\sigma$		
	Simulation ARL	Bootstrap ARL	Trul ARL
0.00	345.22507	315.10620	359.60877
0.25	257.82140	222.74783	271.20240
0.50	142.61057	121.86283	149.97207
0.75	74.88103	64.76847	78.54143
1.00	40.52440	35.53187	42.34000
1.25	22.01937	19.90203	22.75180
1.50	12.98730	11.95180	13.33177
1.75	8.45297	7.85140	8.67267
2.00	5.82797	5.41853	5.94250
2.25	4.19400	3.93110	4.28040
2.50	3.12477	2.93757	3.18427
2.75	2.42470	2.29287	2.46750
3.00	1.94837	1.86610	1.97650
3.25	1.63243	1.57317	1.65273
3.50	1.41943	1.38073	1.43247
3.75	1.27687	1.24810	1.28573
4.00	1.17433	1.15623	1.17980
4.20	1.10803	1.09533	1.11223
4.50	1.06400	1.05633	1.06603
4.75	1.03787	1.03233	1.03897
5.00	1.02100	1.01803	1.02180
	Simulation $\bar{x} = -0.00284$	Simulation $\sigma = 0.99812$	
	Simulation UCL=1.33337	Simulation LCL=-1.33905	
	Bootstrap UCL=1.30704	Bootstrap LCL=-1.34262	
	True UCL=1.34164	True LCL=-1.34164	



<Figure 1> ARL for process mean shift : Simulation and Bootstrap CSC control charts  
( $n=5, S_0=2.5$ )

<Table 2> Comparison of ARL for Simulation and Bootstrap control charts ( $n=10, k=20$ )

Shift	3.0 $\sigma$		
	Simulation ARL	Bootstrap ARL	Trul ARL
0.00	364.89553	355.88587	369.76800
0.25	276.90123	250.78027	281.21310
0.50	152.57047	135.69060	154.92677
0.75	79.65990	71.16570	80.75420
1.00	42.92560	38.65720	43.54523
1.25	24.60303	22.24437	24.88627
1.50	14.76640	13.58337	14.93343
1.75	9.40570	8.73147	9.49473
2.00	6.31187	5.90493	6.35360
2.25	4.43423	4.17993	4.46347
2.50	3.23447	3.07040	3.25340
2.75	2.48520	2.38210	2.49700
3.00	2.00313	1.93053	2.01113
3.25	1.66910	1.61853	1.67460
3.50	1.44410	1.41377	1.44767
3.75	1.29260	1.27077	1.29517
4.00	1.18777	1.17067	1.19013
4.20	1.11430	1.10493	1.11563
4.50	1.06963	1.06377	1.07043
4.75	1.04053	1.03673	1.04113
5.00	1.02293	1.02033	1.02300
$\bar{x} = -0.00038 \quad \sigma = 1.00004$ Simulation UCL=0.94700    Simulation LCL=-0.94776 Bootstrap UCL=0.93288    Bootstrap LCL=-0.95827 Trul UCL=0.94868    Trul LCL=-0.94868			



<Figure 2> ARL for process mean shift : Simulation and Bootstrap CSC control charts(  $n=10$ ,  $S_0=2.5$ )

이때 CUSUM 관리도의 모수는  $k=0.5$ ,  $h=5.0$ 와 FIR(fast initial response)이  $S_0=0$ 와  $S_0=h/2$ 인 경우와  $\bar{x}$  관리도의 모수가  $3.0\sigma$ 인 경우에 대해 사전 분포의 가정없이 사용이 가능한 Bootstrap 방법을 적용하여 CSC 관리도에 대한 시뮬레이션으로 비교·분석하였다.

<Table 1>은 샘플 크기  $n=5$ 인 경우, CUSUM 관리도의 모수  $k=0.5$ 와  $h=5.0$ 이고, CUSUM 관리도의 초기치가  $S_0=0.0$ 인 경우이며,  $\bar{x}$  관리도의 모수  $3.0\sigma$ 인 경우의 Bootstrap CSC 관리도를 나타낸 표이다.

<Table 1>에서 나타나듯이 시뮬레이션을 통해 구한 결합 관리도의 ARL과 Bootstrap 방법을 통한 결합 관리도의 ARL은 평균이 0이고, 표준편차가 1인 True ARL 값에 근사하고, Lucas가 제시하듯이 큰 변화가 있는 경우에는 결합 관리도가 공정평균의 변화에 민감함을 알 수 있다.

<Figure 1>은 샘플 크기  $n=5$ 인 경우 CUSUM 관리도의 모수  $k=0.5$ 와  $h=5.0$ 이고 CUSUM 관리도의 초기치를  $S_0=h/2=2.5$ (FIR)로 설정한 경우이며,  $\bar{x}$  관리도의 모수  $3.0\sigma$ 인 경우의 Bootstrap CSC 관리도를 도시한 것이다.

<Figure 1>에서 나타나듯이 CUSUM 관리도에서 FIR을  $h/2$ 로 설정하여 공정평균에 변화가 없는 경우는 FIR 즉, 초기치  $S_0=0.0$ 으로 설정한 경우와 유사하나 공정평균상에 변화가  $0.5\sigma$  이상 나타날 경우에는 평균 변화에 따라 더욱 빠른 검출을 보여준다.

<Table 2>는 샘플 크기  $n=10$ 이고 하위그룹의 크기가  $k=20$ 인 경우, CUSUM 관리도의 모수  $k=0.5$ 와  $h=5.0$ 이고, CUSUM 관리도의 초기치가  $S_0=0.0$ 인 경우이며,  $\bar{x}$  관리도의 모수  $3.0\sigma$ 인 경우의 Bootstrap CSC 관리도를 나타낸 표이다.

<Table 2>에서도 <Table 1>과 같이 작은 변화와 큰 변화에 민감하게 변화한다. 이것은  $0.5\sigma$  이후부터 공정평균의 변화에 민감하게 나타나고 있으므로  $\bar{x}$  관리도 단독으로 관리하였을 때보다 결합 관리도를 사용함으로써 작은 변화에 민감함을 알 수 있다. 그리고 샘플 크기가 10으로 증가함에 따라 Bootstrap 방법을 적용한 CSC 관리도는 샘플 크기가 5인 경우보다 참값에 근접하고 있으므로 Bootstrap 방법은 샘플 크기의 증가에 의해 모집단을 더욱더 잘 반영하게 된다.

<Figure 2>는 샘플 크기가  $n=10$ 고, CUSUM 관리도의 초기치를  $S_0=h/2=2.5$ (FIR)로 설정한 경우로써  $\bar{x}$  관리도의 모수  $3.0\sigma$ 인 경우의 Bootstrap CSC 관리도를 도시한 것이다.

<Figure 2>에서도 <Figure 1>과 같이 CUSUM 관리도에 FIR을  $h/2$ 로 설정함으로써 공정평균상에 변화가  $0.5\sigma$  이상 나타날 경우에는 평균 변화에 따라 더욱 빠른 검출을 보여준다.

따라서 CSC 관리도는 Lucas<sup>5)</sup>가 샘플 크기가 1인 경우에 대해서 제시하고 있으나 본 연구에서는 산업계에서 널리 쓰고 있는 샘플 크기가 5와 샘플 크기가 10인 경우를 비교하였다. 이 경우에서 Bootstrap 방법을 적용한 CSC 관리도 또한 작은 변동과 큰 변동을 잘 검출할 수 있음을 알 수 있다.

그러므로 Bootstrap 방법의 장점인 사전분포를 모르고 샘플을 통해 관리도를 작성할 경우 본 연구에서 제시하는 Bootstrap CSC 관리도를 적용함으로써 작은 샘플을 취하여도 공정상의 작은 변동과 큰 변동을 함께 검출할 수 있겠다.

## 5. 결론

Lucas<sup>5)</sup>는 샘플 크기가 1인 경우 CUSUM안에 Shewhart 한계를 추가함으로써 작은 변화와 큰 변화를 모두 탐지하기 위한 CSC 관리도를 개발하였다. 본 연구에서는 작은 샘플을 취하여도 모집단의 분포를 반영할 수 있는 Bootstrap 방법을 적용하여 CSC 관리도를 제안하고 있다.

본 연구에서의 시뮬레이션 한 결과, Bootstrap CSC 관리도는 Lucas가 제시하는 표준 방법과 유사하게 작은 샘플로써도 모집단의 분포를 잘 반영하고, ARL 또한 작은 변화와 큰 변화를 잘 모니터링하고 있음을 알 수 있었다.

또한 샘플 크기를  $n=5$ 에서  $n=10$ 으로 증가시키므로써 Bootstrap CSC 관리도의 백분위수 추정치는 향상되며, 하위그룹 수의 증가는 단지 Bootstrap 방법에 의하여 제시된 백분위수 추정치만을 향상시키며, 샘플 크기와 하위그룹의 수를 동시에 증가시키면 결과적으로 Bootstrap 방법의 장점을 상대적으로 강화시킴을 알 수 있었다.

그러므로 Bootstrap 방법은 표준 방법의 일반적인 가정이 맞지 않을 경우 관리한계를 추정하고, 공정변화를 모니터링하는데 유용한 방법임을 알 수 있으며, 이상의 결과로부터 품질특성에 대한 사전 정보가 없는 경우에는 본 연구에서 제시된 Bootstrap 방법을 이용하는 것이 보다 정확한 추정치를 제공할 수 있음을 알 수 있었다.

결론적으로 공정분포에 관한 사전 지식이 없거나 기존 관리도들에 대한 정규성 가정이 기각될 경우에 비모수적 Bootstrap 관리도의 사용을 추천한다.

## 참 고 문 헌

[1] Bajgier, S. M.; "The Use of Bootstrapping to Construct Limits on Control Charts," Proceeding of the Decision Science Institute, San Diego, CA., pp. 1611-1613, 1992.  
 [2] Efron, B.; "Bootstrap Methods : Another Look at Jackknife," Ann. Stat. Vol. 7, No. 1, pp. 1-26, 1979.

[3] Liu, R. Y. and Tang, J.; "Control Charts for Dependent and Independent Measurements Based on Bootstrap," Journal of the American Statistical Association, Vol. 91, No. 436, pp. 1694-1700, 1996.  
 [4] Lucas, J. M.; "A Modified V-Mask Control Schemes," Journal of Quality Technology, Vol. 8, No. 1, pp. 1-12, 1973.  
 [5] Lucas, J. M.; "Combined Shewhart-CUSUM Quality Control Schemes," Journal of Quality Technology, Vol. 14, No. 2, pp. 51-59, 1982.  
 [6] Lucas, J. M., and Crosier, R. B.; "Fast Initial Response for CUSUM Quality Control Schemes : Give Your CUSUM a Head Start," Technometrics, Vol. 24, No. 3, pp. 199-205, 1982.  
 [7] Padgett, C. S., Thomas, L.A., and Padgett, W.J.; "On the  $\alpha$ -risks for Shewhart Control Charts," Communications in Statistics and Simulation, Vol. 21, No. 4, pp. 1125-1147, 1992.  
 [8] Seppala, T., Moskowitz, H., Plante, R. 와 Tang, J.; "Statistical Process Control via the Subgroup," Journal of Quality Technology, Vol. 27, No. 2, pp. 139-153, 1995.