

## 언덕형 굴절을 분포를 갖는 굽은 평판도파로에서의 누설모드 해석

김경암<sup>†</sup> · 곽재곤 · 박권동 · 김창민

서울시립대학교 전자전기컴퓨터공학부

Ⓣ 130-743 서울 동대문구 전농동 90번지

(2002년 9월 10일 받음, 2002년 12월 2일 수정본 받음)

원형으로 굽은 평판 도파로를 직선 도파로로 등각사상화 시켰다. 단조 증가하는 굴절을 분포를 갖는 바깥쪽 클래드 영역의 누설모드를 표현하기 위해 진행파형 수정된 Airy함수가 처음으로 소개되었다. 모의 전산을 통해 유도된 방법에 의한 굽음손실 및 field해 분포를 계산하고, WKB에 의한 결과와 비교하였다. 모의 전산결과 기존의 WKB 방법에 비해 회귀점에서 수렴하는 해를 구할수 있었으며, 더 정확한 굽음 손실을 계산할수 있었다.

주제어 : circular slab waveguides, bending loss, conformal mapping, WKB theory, airy functions.

### I. 서 론

굽은 도파로는 광섬유나 집적광학의 설계에 있어서 자주 나타나는 문제이다. 집적도를 높이기 위해 여러가지 기능소자들이 굽은 도파로에 연결되어지며, 현장이나 실험실에서도 광섬유가 두루말이 형태로 보관되어지는 경우가 많다. 이러한 이유로 굽은 도파로의 곡률반경과 그에 따른 손실의 관계에 대한 정확한 해석이 요구되어진다. 특히 원형으로 굽은 도파로는 가장 기본적인 형태이므로 많은 연구자들이 그 손실을 해석하고자 노력하였다.<sup>[1-11]</sup>

최근, 굽은 도파로의 해석을 위해 많은 해석적 또는 수치 해석적 방법들이 도입되었다. 원통좌표계에서의 해석을 위해 Bessel 함수와 Hankel 함수가 도입되었고, 이후 local field 해석<sup>[1,2]</sup> 회절이론,<sup>[3]</sup> 스펙트럼 적분법<sup>[4]</sup> 및 섭동이론<sup>[5]</sup>이 굽음 손실에 의한 감쇠상수를 유도하고자 시도되었다. 또한 등각적인 굴절을 분포에 Airy 함수를 사용하여 행렬식으로 유도하는 방법도 제시되었다.<sup>[6,7]</sup> 한편으로, 이러한 방법들과 달리 원형으로 굽은 도파로를 등각사상법으로 직선화하여 풀고자 하는 시도들도 있었다. 변환된 직각좌표계에 등각 굴절률분포를 적용한 후 푸리에 변환<sup>[8]</sup>과 변분법<sup>[9]</sup> 및 WKB이론<sup>[10,11]</sup>등이 이러한 굽음손실을 해석하기 위해 도입되었다.

본 논문에서는 등각사상법으로 굽은 도파로의 굴절률분포를 등각적인 직선 도파로의 굴절률분포로 변환한 후,<sup>[8-11]</sup> 누설모드에 의한 굽음 손실을 얻기 위해 각 영역에 따라 수정된 Airy함수(Modified Airy function)와 WKB해를 적절히 도입하였다. 굽은 도파로의 안쪽 클래드 영역에는 지수적으로 감소하는 field해를 표현하고자 WKB해를 사용하였고, 코어 영역에는 진동하는 특성을 나타내하고자 수정된 Airy함수를 도입하였다.<sup>[12]</sup> 또한, 바깥쪽 클래드 영역에는 누설파를 나타내는 진행파형 수정된 Airy함수가 처음으로 사용되었다.<sup>[13,14]</sup> 이와 같은 방법을 통해 얻어진 field해는 회귀점에서 수렴특성을 보

이며, 이로부터 매우 정확한 굽음손실을 계산할 수 있었다.

### II. 등각사상법에 의한 변환

그림 1은 원형으로 굽은 도파로와 그 굴절을 분포를 도시화한 것이다.

그림 1의 도파로에서의  $\phi$  에 대한 Field 의 분포는 일정하므로 스칼라 파동방정식은 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$[\nabla_z^2 + k^2(r)]E(r, \phi) = 0 \tag{1}$$

원래의 평면을  $z(r, \phi)$ 면으로, 등각사상화된 평면은  $(,)$ 평면으로 각각 나타내었다.

$$z = re^{j\phi} = x + jy \tag{2a}$$

$$w = u + jv \tag{2b}$$

Cauchy-Riemann 관계식에 의해 평면과 평면의 Laplacian은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$[\nabla_z^2 + k^2(r)]E(r, \phi) = 0 \tag{3}$$

평판의 원형경계를 직선으로 변환하는 사상함수는 다음과 같다.<sup>[9,10]</sup>

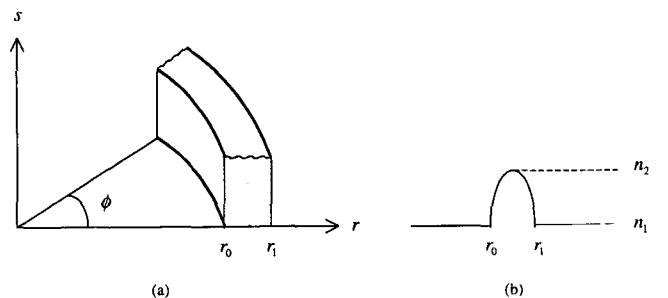


그림 1. 원형으로 굽은 도파로와 그 굴절률 분포.

<sup>†</sup>E-mail: beam3@hanmail.net

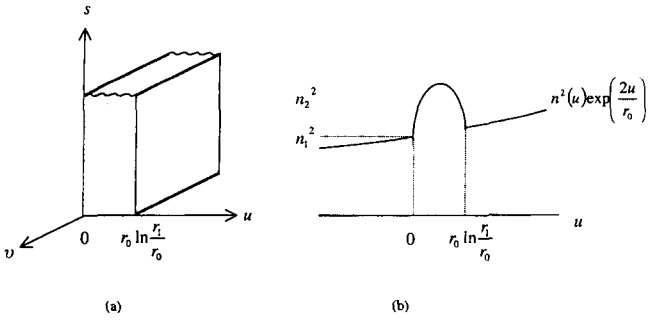


그림 2. 등각사상된 광도파로와 그 굴절률 분포.

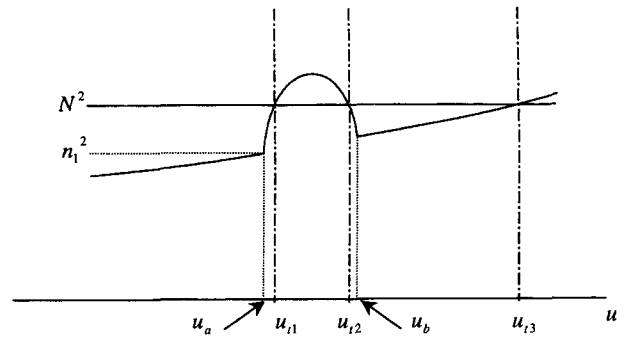


그림 3. 세개의 회귀점을 갖는 등각적인 광도파로의 굴절률 분포.

$$w=f(z)=r_0 \ln \frac{z}{r_0} \quad (4)$$

그리고 이에 상응하는 역Jacobian은 다음과 같다.

$$\frac{1}{J} = \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 = \exp\left(\frac{2u}{r_0}\right) \quad (5)$$

식 (4)의 사상함수를 이용하여 그림 1의 굵은 광도파로를 변환시키면 그림 2와 같다.

등각사상된 평면에서의 스칼라 파동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left[ \frac{d^2}{du^2} + k_0^2 n^2(u) \exp\left(\frac{2u}{r_0}\right) - k_0^2 N^2 \right] E(u) = 0 \quad (6)$$

고유치  $N$ 를 복소수로 표현하면, 감쇠상수  $\alpha$ 는 고유치의 허수부인  $N''$ 으로부터 얻을 수 있다.

$$N = N' - jN'' \quad (7a)$$

$$\alpha = k_0 N'' \quad (7b)$$

위로부터 굵은 광도파로에서의 방사손실은  $N''$ 에 기인함을 알 수 있다.

### III. 수정된 Airy 함수에 의한 field 해석

그림 3과 같은 굴절률 분포를 갖는 광도파로에서의 식 (6)의 field해는 다음과 같이 정의한다.

그림 3에서  $u_0$ 는 임의의 점을,  $u_i (i=1, 2, 3)$ 는 세개의 회귀점을 나타낸다.

$$E_I(u) = \begin{cases} \frac{c_1}{2\sqrt{\pi P(u)}} \exp\left(-\int_u^{u_a} P(u) du\right) & u \leq u_a \quad (8a) \end{cases}$$

$$E_I(u) = \begin{cases} \frac{c_2}{\sqrt{-\eta_1'(u)}} Ai(\eta_1(u)) + \frac{c_3}{\sqrt{-\eta_1'(u)}} Bi(\eta_1(u)) & u_a \leq u \leq u_{r1} \quad (8b) \end{cases}$$

$$E_I(u) = \begin{cases} \frac{c_2}{\sqrt{\xi_1'(u)}} Ai(-\xi_1(u)) + \frac{c_3}{\sqrt{\xi_1'(u)}} Bi(-\xi_1(u)) & u_{r1} \leq u \leq u_0 \quad (8c) \end{cases}$$

$$E_{II}(u) = \begin{cases} \frac{c_4}{\sqrt{-\xi_2'(u)}} Ai(-\xi_2(u)) + \frac{c_5}{\sqrt{-\xi_2'(u)}} Bi(-\xi_2(u)) & u_0 \leq u \leq u_{r2} \quad (9a) \\ \frac{c_4}{\sqrt{\eta_2'(u)}} Ai(\eta_2(u)) + \frac{c_5}{\sqrt{-\eta_2'(u)}} Bi(\eta_2(u)) & u_a \leq u \leq u_{r1} \quad (9b) \\ \frac{c_6}{\sqrt{-\eta_3'(u)}} Ai(\eta_3(u) \exp(-j\frac{2}{3}\pi)) & u_b \leq u \leq u_{r3} \quad (9c) \\ \frac{c_6}{\sqrt{\xi_3'(u)}} Ai(-\xi_3(u) \exp(-j\frac{2}{3}\pi)) & u_{r3} \leq u \quad (9b) \end{cases}$$

여기서,

$$\eta_i(u) = \left(\frac{3}{2}(-1)^i \int_{u_{ii}}^u P(u) du\right)^{2/3} \quad (10a)$$

$$P(u) = k_0 \sqrt{N^2 - n^2(u) \exp\left(\frac{2u}{r_0}\right)} \quad i = 1, 2, 3 \quad (10b)$$

$$\xi_i(u) = \frac{3}{2}(-1)^{i-1} \left(\int_{u_{ii}}^u Q(u) du\right)^{2/3} \quad (11a)$$

$$Q(u) = k_0 \sqrt{n^2(u) \exp\left(\frac{2u}{r_0}\right) - N^2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (11b)$$

Field해  $E_I(u)$ 과  $E_{II}(u)$ 는  $u \leq u_a, u \geq u_b$  영역에서 지수적으로 감소한다.  $u_a \leq u \leq u_{r1}$ 와  $u_{r2} \leq u \leq u_b$  영역에서는 단조 감소 또는 단조 증가의 조합 특성을 나타내기 위해 우평면에서 정의되는 수정된 Airy함수들로 표현하였다. 반면  $u_{r1} \leq u \leq u_{r2}$ 인 영역에서는 field해의 진동하는 특성을 구현하고자 좌평면에서 정의되는 수정된 Airy함수의 조합으로 표현하였다. 수정된 Airy함수는 회귀점에서 수렴할 뿐만 아니라 그 점근해가 WKB이론에서의 field해와 같은 형태를 취하므로, 광도파로 영역에서 그 특성들을 나타내기 위해 아주 적합한 함수이다. 수정된 Airy함수의 점근해는 다음과 같다.

$$\frac{1}{\sqrt{(-1)^{i-1} \xi_i'(u)}} Ai(-\xi_i(u)) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi Q(u)}} \sin\left((-1)^{i-1} \int_{u_{ii}}^u Q(u) du + \frac{\pi}{4}\right) \quad (12a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(-1)^{i-1} \xi_i'(u)}} Bi(-\xi_i(u)) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi Q(u)}} \cos\left((-1)^{i-1} \int_{u_{ii}}^u Q(u) du + \frac{\pi}{4}\right) \quad (12b)$$

회귀점에서 멀어지면 field해 (8c)와 (9a)는 (12)과 같은 정현 및 여현함수의 조합으로 대치 될 수 있다.  $u_b \leq u$  영역에서 field해는 누설모드를 표현하기 위해 진행파형 수정된 Airy함수로 표현하였다. 9(c)와 9(d)의 연결은 회귀점  $u_{\beta}$ 에서 연결공식을 통해 이루어지고, (9d)는 식 (13)과 같은 진행파형 함수로 표현할 수 있다.

$$\frac{c_6}{\sqrt{\xi_3'(u)}} Ai(-\xi_3(u) \exp(-j\frac{2}{3}\pi)) = \frac{c_6}{\sqrt{\xi_3'(u)}} \{ Ai(-\xi_3(u)) + j Bi(-\xi_3(u)) \} \quad (13)$$

A.  $u_{t1} \leq u \leq u_{t2}$ 에서의 경계조건  
 $u = u_0$ 에서 경계조건을 부여하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$i) E_I(u)|_{u=u_0^-} = E_{II}(u)|_{u=u_0^+} \Rightarrow c_2 \sin\left(\int_{u_{t1}}^{u_0} Q(u)du + \frac{\pi}{4}\right) + c_3 \cos\left(\int_{u_{t1}}^{u_0} Q(u)du + \frac{\pi}{4}\right) = -c_4 \sin\left(\int_{u_0^+}^{u_{t2}} Q(u)du + \frac{\pi}{4}\right) + c_5 \cos\left(\int_{u_0^+}^{u_{t2}} Q(u)du + \frac{\pi}{4}\right) \quad (14)$$

$$ii) \frac{d}{du} E_I(u)|_{u=u_0^-} = \frac{d}{du} E_{II}(u)|_{u=u_0^+} \Rightarrow c_2 \cos\left(\int_{u_{t1}}^{u_0} Q(u)du + \frac{\pi}{4}\right) - c_3 \sin\left(\int_{u_{t1}}^{u_0} Q(u)du + \frac{\pi}{4}\right) = -c_4 \cos\left(\int_{u_0^+}^{u_{t2}} Q(u)du + \frac{\pi}{4}\right) + c_5 \sin\left(\int_{u_0^+}^{u_{t2}} Q(u)du + \frac{\pi}{4}\right) \quad (15)$$

식 (14)를 식 (15)으로 나누어 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\tan\left(\int_{u_{t1}}^{u_0} Q(u)du - \tan^{-1}\left(\frac{c_3}{c_2}\right)\right) = \tan\left(\int_{u_{t1}}^{u_0} Q(u)du - \left(\int_{u_{t1}}^{u_{t2}} Q(u)du - \tan^{-1}\left(\frac{c_5}{c_4}\right) - \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (16)$$

이로부터 다음과 같은 고유방정식을 도출할 수 있다.

$$\int_{u_{t1}}^{u_{t2}} Q(u)du = m\pi + \left(\frac{\pi}{4} + \delta_1\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \delta_2\right) \quad (17)$$

각 회귀점에서 위상천이  $\delta_1$ 과  $\delta_2$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{c_3}{c_2}\right) \quad (18a)$$

$$\delta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{c_5}{c_4}\right) \quad (18b)$$

$u = u_a$ 에서  $E_I(u)$ 과 그 미분함수  $E_I'(u)$ 의 연속조건을 적용하면  $\delta_1$ 을 구할 수 있으며,  $\delta_2$  또한  $u = u_b$ 에서  $E_{II}(u)$ 과 그 미분함수  $E_{II}'(u)$ 의 연속조건으로부터 얻을 수 있다.

B.  $u = u_a$ 에서의 경계조건

$$i) E_I(u)|_{u=u_a^-} = E_I(u)|_{u=u_a^+} \Rightarrow \frac{c_1}{2\sqrt{\pi P(u)}} \exp\left(-\int_u^{u_a} P(u)du\right) \Big|_{u=u_a^-} = \frac{c_2}{\sqrt{-\eta_1'(u)}} Ai(\eta_1(u)) + \frac{c_3}{\sqrt{-\eta_1'(u)}} Bi(\eta_1(u)) \Big|_{u=u_a^+} \quad (19)$$

$$ii) \frac{d}{du} E_I(u)|_{u=u_a^-} = \frac{d}{du} E_I(u)|_{u=u_a^+} \Rightarrow \frac{1}{2} \exp\left(-\int_u^{u_a} P(u)du\right) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \frac{c_1 P'(u)}{P(u)\sqrt{\pi P(u)}} + \frac{c_1 P'(u)}{\sqrt{\pi P(u)}} \right\} \Big|_{u=u_a^-} = \frac{c_2}{\sqrt{-\eta_1'(u)}} \left\{ -\frac{\eta_1''(u)}{2\eta_1'(u)} Ai(\eta_1(u)) + \eta_1'(u) Ai'(\eta_1(u)) \right\} \quad (20)$$

식 (19)과 (20)로부터  $c_3/c_2$ 를 구하면,  $\tan\delta_1$ 는 다음과 같이 Airy함수와 그 미분함수의 조합으로 표현할 수 있다.

$$\tan\delta_1 = \frac{-\eta_1'(u_a^+) Ai(\eta_1(u_a^+)) + P_a Ai(u_a^+)}{-\eta_1'(u_a^+) Bi(\eta_1(u_a^+)) + P_a Bi(u_a^+)} \quad (21)$$

여기서,

$$P_a = P(u_a^-) \frac{1}{2} \left\{ \frac{P'(u_a^-)}{P(u_a^-)} - \frac{\eta_1''(u_a^+)}{\eta_1'(u_a^+)} \right\} \quad (22)$$

C.  $u = u_b$ 에서의 경계조건

$u = u_b$ 에서 field해의 경계조건을 적용하면 다음과 같은 두 식을 얻을 수 있다.

$$i) E_{II}(u)|_{u=u_b^-} = E_{II}(u)|_{u=u_b^+} \Rightarrow \frac{c_4}{\sqrt{\eta_2'(u)}} Ai(\eta_2(u)) + \frac{c_5}{\sqrt{\eta_2'(u)}} Bi(\eta_2(u)) \Big|_{u=u_b^-} = \frac{c_6}{\sqrt{-\eta_3'(u)}} Ai\left(\eta_3(u) \exp\left(-j\frac{2}{3}\pi\right)\right) \Big|_{u=u_b^+} \quad (23)$$

$$ii) \frac{d}{du} E_{II}(u)|_{u=u_b^-} = \frac{d}{du} E_{II}(u)|_{u=u_b^+} \Rightarrow \frac{c_4}{\sqrt{\eta_2'(u)}} \left\{ -\frac{\eta_2''(u)}{2\eta_2'(u)} Ai(\eta_2(u)) + \eta_2'(u) Ai'(\eta_2(u)) \right\} + \frac{c_5}{\sqrt{\eta_2'(u)}} \left\{ -\frac{\eta_2''(u)}{2\eta_2'(u)} Bi(\eta_2(u)) + \eta_2'(u) Bi'(\eta_2(u)) \right\} \Big|_{u=u_b^-} = \frac{c_6}{\sqrt{-\eta_3'(u)}} \left\{ -\frac{\eta_3''(u)}{2\eta_3'(u)} Ai\left(\eta_3(u) \exp\left(-j\frac{2}{3}\pi\right)\right) + \eta_3'(u) \exp\left(-j\frac{2}{3}\pi\right) Ai'\left(\eta_3(u) \exp\left(-j\frac{2}{3}\pi\right)\right) \right\} \Big|_{u=u_b^+} \quad (24)$$

식 (23)과 (24)로부터  $\zeta_0$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\tan \delta_2 = \frac{\zeta_0 Ai(\eta_{2o}) Ai(\eta_{3e}) + \eta_{2o}' Ai(\eta_{2o}) Ai(\eta_{3e}) - \eta_{3e}' Ai(\eta_{2o}) Ai'(\eta_{3e})}{\zeta_0 Bi(\eta_{2o}) Ai(\eta_{3e}) + \eta_{2o}' Bi'(\eta_{2o}) Ai(\eta_{3e}) - \eta_{3e}' Bi(\eta_{2o}) Ai'(\eta_{3e})} \quad (25)$$

여기서

$$\eta_{2o} = \eta_2(u_b^-), \quad \eta_{3e} = \eta_3(u_b^+) \exp\left(-j\frac{2}{3}\pi\right) \quad (26)$$

$\eta_2(u)$ 과  $\eta_3(u)$ 를 보다 구체적인 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\eta_2(u) = \left(\frac{3}{2} \int_{u_2}^u P(u) du\right)^{2/3} \quad (27a)$$

$$\eta_3(u) = \left(\frac{3}{2} \int_u^{u_3} P(u) du\right)^{2/3} \quad (27b)$$

식 (27)로부터 식 (26)의  $\zeta_0$ 를 다음과 같이 보다 구현하기 쉬운 형태의 식으로 쓸 수 있다.

$$\zeta_0 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{P'(u_b^+) + \frac{P'(u_b^+)}{2\eta_3^{3/2}(u_b^+)}}{P(u_b^+) + \frac{P(u_b^+)}{2\eta_3^{3/2}(u_b^+)}} \right\} \left\{ \frac{P'(u_b^-) + \frac{P'(u_b^-)}{2\eta_3^{3/2}(u_b^-)}}{P(u_b^-) + \frac{P(u_b^-)}{2\eta_3^{3/2}(u_b^-)}} \right\} \quad (28)$$

#### IV. 모의 전산

유도된 식으로부터 얻어진 고유방정식의 정확성을 알아 보기 위해, 그림 4와 같이 포물선 형태의 굴절률 분포를 갖는 원형의 굵은 광도파로를 가정하여 모의전산해 보았다.

그림 4에서의 굴절률 분포는 그 영역에 따라 다음과 같다.

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 & r < r_0 - d \\ n_1^2 + (n_2^2 - n_1^2) \left[ 1 - \left( \frac{r - r_0}{d} \right)^2 \right] & r_0 - d < r < r_0 + d \\ n_1^2 & r_0 + d < r \end{cases} \quad (29)$$

유도된 고유방정식 식 (17)로부터 복소수의 고유치  $N$ 를 얻을 수 있으며, 식 (7)에서 언급한 바와 같이 고유치의 허수부  $N''$ 을 통해 굵은 광도파로를 따라 전파되는 도파모드의 누설 특성을 알 수 있다. 그림 5에는  $r_0 = 7$  mm의 보다 완만한 굽음을 갖는 광도파로에서의 첫번째 모드의 field 분포를 나타낸 것이고, 그림 6은  $r_0 = 4$  mm의 급격한 굽음을 갖는 광도파로에서의 field 분포를 도시한 것이다. 기대한 바와 같이  $r_0 = 4$  mm에서의 field 분포의 중심이  $r_0 = 7$  mm에 비해 바깥쪽으로 더 치우친 것을 볼 수 있고, 두 경우에서 모두 누설모드의

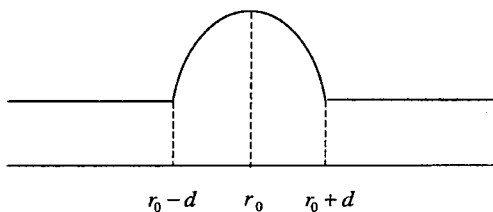


그림 4. 대칭적인 포물선형 굴절률 분포.

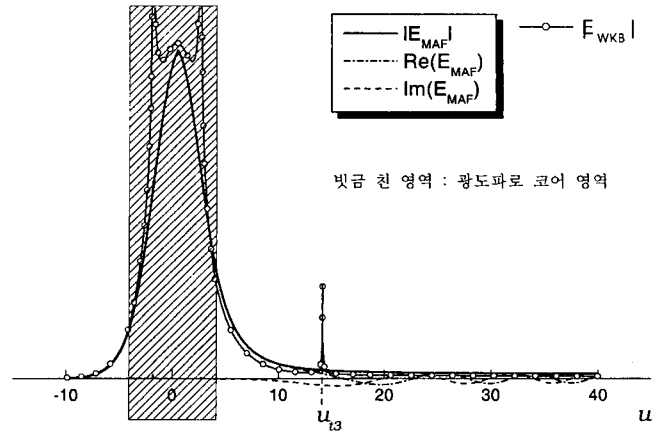


그림 5.  $r_0 = 7$  mm일 때의 field해 분포. —: MAF, —○—: WKB,  $d = 4 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 2.0$ ,  $n_2 = 2.006$ .

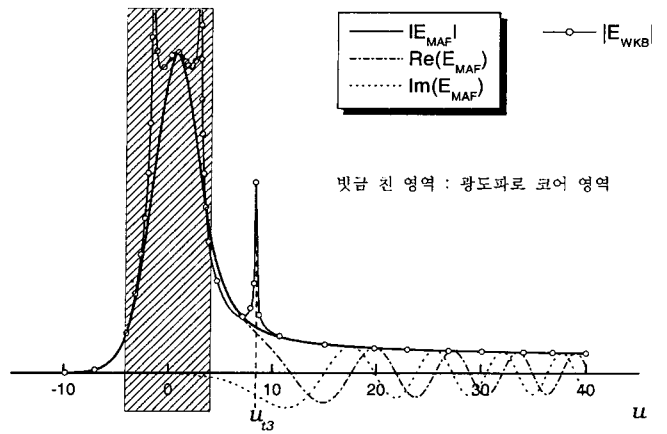


그림 6.  $r_0 = 4$  mm일 때의 field해 분포. —: MAF, —○—: WKB,  $d = 4 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 2.0$ ,  $n_2 = 2.006$ .

특성을 확인할 수 있다. 부록에서 유도된 WKB이론에 의한 결과 또한 비교의 목적으로 도시하였다. WKB이론에 의한 결과는 회귀점에서 발산하는 데 반해, 수정된 Airy함수로 유도된 결과는 회귀점에서도 수렴하는 것을 확인할 수 있다.

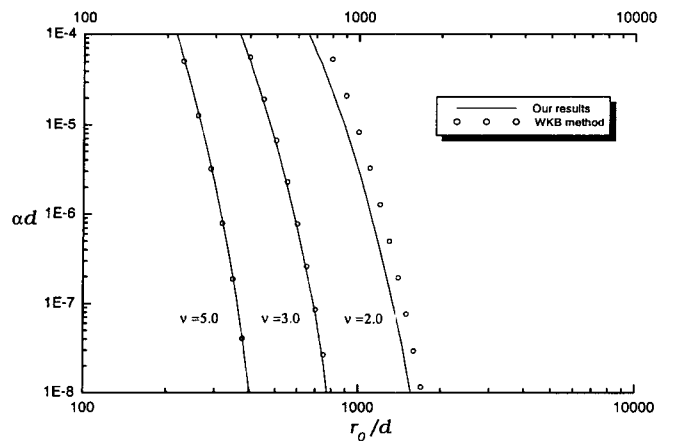


그림 7. 정규화 곡률반경  $r_0/d$ 에 따른 굽음손실.  $n_2/n_1 = 1.01$ ,  $v = k_0 d \sqrt{n_2^2 - n_1^2}$ .

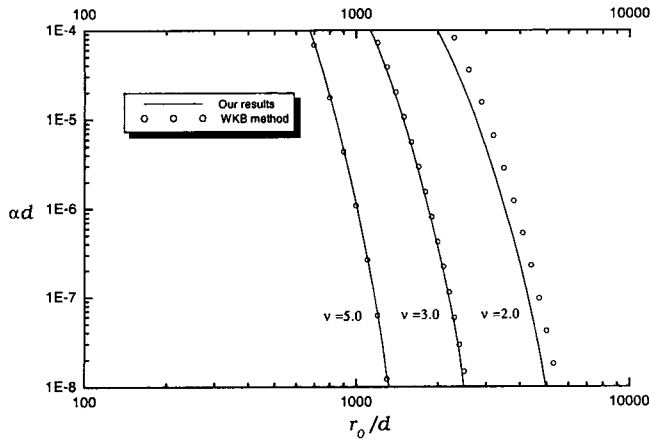


그림 8. 정규화 곡률반경  $r_o/d$ 에 따른 굽음손실.  $n_2/n_1=1.003$ ,  $\nu = k_0 d \sqrt{n_2^2 - n_1^2}$ .

그림 7과 그림 8에는 정규화 주파수  $\nu$ 에 따라 굽음손실을 도시한 것이다. 그림 7은  $n_2/n_1=1.01$ 의 경우를,  $n_2/n_1=1.003$ 의 경우를 나타낸 것이다. 그림 7과 그림 8에서, 정규화 주파수  $\nu$ 가 커질수록(강도와 경우) WKB에 의한 결과가 본 논문에서의 결과와 유사함을 볼 수 있으며, 반대로 정규화 주파수가 작아질수록(약도와 경우) 본 논문의 결과에서 많이 벗어남을 볼 수 있다. 이는 광이 약도파될수록(차단 주파수에 가까울수록) 또는, 저차모드일수록 WKB의 오차는 더욱 커진다는 익히 알고 있는 사실에 기인한다고 볼 수 있다.

### V. 결 론

임의의 굴절률분포를 갖는 굽은 광도파로를 등각사상법으로 변환한 후, 수정된 Airy함수를 사용하여 영역별로 적절한 field 해를 구현하였다. 안쪽 클래드영역에는 WKB해, 코어영역에는 정재파형 수정된 Airy함수를 사용하였다. 또한 바깥쪽 클래드영역에는 누설모드의 특성을 표현하기 위해 진행파형 수정된 Airy함수를 새로이 도입하였다. 모의전산을 통해, 기존의 WKB이론에 비해 이 방법이 회귀점에서도 수렴하는 해를 구할 수 있었으며, 더 정확한 굽음손실을 얻을 수 있었다. 따라서 이 방법은 임의의 굴절률 분포를 갖는 굽은 광도파로에서의 굽음 손실 연구에 유용할 것으로 사료된다.

### 부 록

#### 고유방정식과 고유치 : WKB 이론

그림 9는 세개의 회귀점을 갖는 임의의 굴절률분포를 그린 것이다.

$$E_I(u) = \begin{cases} \frac{c_1}{2\sqrt{\pi P(u)}} \exp\left\{-\int_u^{u_{11}} P(u) du\right\} & u \leq u_{11} & (A1) \\ \frac{c_1}{\sqrt{\pi Q(u)}} \sin\left\{-\int_u^{u_{11}} Q(u) du + \frac{\pi}{4}\right\} & u_{11} \leq u \leq u_{12} & (A2) \\ \frac{c_2}{2\sqrt{\pi P(u)}} \exp\left\{-\int_{u_{12}}^u P(u) du\right\} + \frac{c_3}{\sqrt{\pi P(u)}} \exp\left\{\int_{u_{12}}^u P(u) du\right\} & u_{12} \leq u < u_{13} & (A3) \\ \frac{c_2 \exp(-B)}{2\sqrt{\pi Q(u)}} \cos\left\{\int_{u_{13}}^u Q(u) du + \frac{\pi}{4}\right\} + \frac{2c_3 \exp(B)}{\sqrt{\pi Q(u)}} \sin\left\{\int_{u_{13}}^u Q(u) du + \frac{\pi}{4}\right\} & u_{13} \leq u & (A4) \end{cases}$$

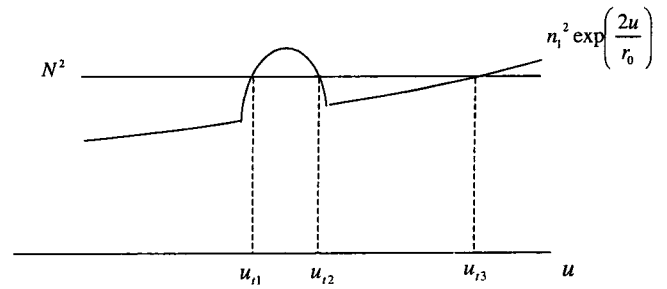


그림 9. 세개의 회귀점을 갖는 임의의 굴절률분포.

$$E_{II}(u) = \begin{cases} \frac{c_2}{\sqrt{\pi Q(u)}} \sin\left\{\int_u^{u_{12}} Q(u) du + \frac{\pi}{4}\right\} + \frac{c_3}{\sqrt{\pi Q(u)}} \cos\left\{\int_u^{u_{12}} Q(u) du + \frac{\pi}{4}\right\} & u_{11} < u \leq u_{12} & (A3) \\ \frac{c_2}{2\sqrt{\pi P(u)}} \exp\left\{-\int_{u_{12}}^u P(u) du\right\} + \frac{c_3}{\sqrt{\pi P(u)}} \exp\left\{\int_{u_{12}}^u P(u) du\right\} & u_{12} \leq u < u_{13} & (A4) \\ \frac{c_2 \exp(-B)}{2\sqrt{\pi Q(u)}} \cos\left\{\int_{u_{13}}^u Q(u) du + \frac{\pi}{4}\right\} + \frac{2c_3 \exp(B)}{\sqrt{\pi Q(u)}} \sin\left\{\int_{u_{13}}^u Q(u) du + \frac{\pi}{4}\right\} & u_{13} \leq u & (A5) \end{cases}$$

여기서,  $B = \int_{u_{12}}^{u_{13}} P(u) du$

식 (A1)과 식 (A2), 식 (A3)과 식 (A4), 그리고 식 (A4)과 식 (A5)의 관계는 잘 알려진 WKB 연결 공식에 의한 것이고,  $u_{11} < u < u_{12}$ 에서 식 (A2)와 식 (A3)는 같으므로, 이로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{c_2}{c_3} = \tan\left[\int_{u_{11}}^{u_{12}} Q(u) du\right] \quad (A6)$$

$u_{13} < u$ 인 영역에서의 해는 누설모드의 특성을 갖고 있어야 하므로 식 (A5)는 다음과 같은 형태의 표현으로 기술되어야 한다.

$$\frac{c}{\sqrt{\pi Q(u)}} \exp\left\{-j \int_{u_{13}}^u Q(u) du + \frac{\pi}{4}\right\} \quad (A7)$$

따라서, 식 (A5)와 식 (A7)의 정합을 통해 다음과 같은 수식을 얻을 수 있다.

$$\frac{c_2}{c_3} = j4 \exp\left[2 \int_{u_{12}}^{u_{13}} P(u) du\right] \quad (A8)$$

식 (A6)과 식 (A8)로부터, 다음과 같은 고유방정식을 유도할 수 있다.

$$\int_{u_{11}}^{u_{12}} Q(u) du = m\pi + \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\left\{\frac{j}{4} \exp\left(-2 \int_{u_{12}}^{u_{13}} P(u) du\right)\right\}\right] \quad (A9)$$

$(m = 0, 1, 2, \dots)$

### 감사의 글

본 연구는 2001년도 전자부품연구원 위탁연구개발과제에 의하여 수행되었음.

### 참고문헌

- [1] E. A. J. Marcatili, "Bends in optical dielectric guides," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 48, pp. 2103-2132, 1969.
- [2] D. Marcuse, *Light transmission optics*. Malabar, FL, Krieger publ. Co., 1989.
- [3] D. Marcuse, "Bend loss of slab and fiber Modes computed with diffraction Theory," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 29, pp. 2957-2961, December, 1993.
- [4] N. Morita, "Electromagnetic fields in circular bends of slab waveguide," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 8, pp. 16-22, January, 1990.
- [5] Y. Cheng, W. Lin, and Y. Fujii, "Local field analysis of bent graded-index planar waveguides," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 8, pp. 1461-1469, October, 1990.
- [6] I. C. Goyal, R. L. Gallawa, and A. K. Ghatak, "Bent planar waveguides and whispering gallery modes: A new method of analysis," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 8, pp. 768-774, May, 1990.
- [7] A. Kumar, R. L. Gallawa, and I. C. Goyal, "Modal characteristics of bent dual mode planar optical waveguides," *IEEE J. Lightwave Technol.* vol. 12, pp. 621-624, April, 1994.
- [8] H. Renner, "Bending losses of coated single-mode fibers: A simple approach," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 10, pp. 544-551, May, 1992.
- [9] F. Wassmann, "Modal field analysis of circularly bent single-mode fibers," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 17, pp. 957-968, May, 1999.
- [10] M. Heiblum and J. H. Harris, "Analysis of curved optical wave-guides by conformal transformation," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. QE-11, pp. 75-85, 1975
- [11] W. Berglund and A. Gopinath, "WKB analysis of bend losses in optical waveguides," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol 18, pp. 1161-1166, August, 2000.
- [12] R. E. Langer, "On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large order." *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 33, no. 99, pp. 23-64, 1931.
- [13] M. Abramowitz and J. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, National Bureau of Standards, pp. 446-447, Nov. 1970.
- [14] D. Ahn and S. L. Chung, "Exact calculation of quasi-bound states of an isolated quantum well with uniform electric field: Quantum-well Stark resonance," *Physical Review B*, vol. 34, No. 12, pp. 9034-9037, 15 December 1986.

### Leaky modes of circular slab waveguides: modified airy functions

Kyung-Am Kim<sup>†</sup>, Jae-Gon Gwak, Kwon-Dong Park, and Chang-Min Kim

University of Seoul, Dept. of Electrical Engineering, Seoul 130-743, KOREA

<sup>†</sup>E-mail: beam3@hanmail.net

(Received September 10, 2002, Revised manuscript December 2, 2002)

Circular slab waveguides are conformally mapped into straight waveguides. In the outer cladding region with monotonically increasing index profile, modified Airy functions (MAF) of traveling-wave form are introduced to express the leaky mode. Field distributions and losses calculated by the proposed method are compared with those obtained by the WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) method. Detailed numerical examples are presented and compared with the conventional WKB methods, demonstrating our method not only allows a converging field at turning points but also guarantees fine accuracy.

Classification code : OE.010.