韓國海岸·海洋工學會誌
第 14 券 第 4 號, pp. 282~285, 2002年 12月

선형파 이론에 의한 파랑변형 예측 시 소멸파 성분의 중요성 검토: 1. 에너지 식 유도

Investigation of Importance of Evanescent Modes in Predicting the Transformation of Water Waves by the Linear Wave Theory: 1. Derivation of Equations of Wave Energy

이창훈* · 조용식**
Changhoon Lee* and Yong-Sik Cho**

要 旨 : 본 연구에서 선형파 이론을 사용하여 파랑변형을 예측할 경우 소멸파 성분의 역학적인 크기를 정량화하는 작업을 하였다. 즉, 진행파 성분 뿐만 아니라 소멸파의 영향을 받는 성분의 운동에너지와 위치에너지를 유도하였다. 소멸파 성분에는 진행파와 소멸파의 합성 성분, 서로 같은 소멸파의 합성 성분, 서로 다른 소멸파의 합성 성분으로 구성되어 있다. 수평길이 당 소멸파의 에너지 성분은 수평길이가 커짐에 따라 기하급수적으로 감소한다.

핵심용어 : 선형파, 파랑변형, 진행파, 소멸파, 운동에너지, 위치에너지

Abstract □ The magnitude of evanescent modes in terms of dynamics is investigated in case that the transformation of water waves is predicted using the linear wave theory. In other words, derivation is made of both the kinetic and potential wave energies of evanescent modes as well as propagating modes. The evanescent modes consist of compound components of propagating and evanescent modes, those of identically equal evanescent modes, and those of identically different evanescent modes. The wave energy per a horizontal distance decreases exponentially with the distance.

Keywords : linear wave, transformation of water waves, propagating mode, evanescent mode, kinetic energy, potential energy

1. 서 론

항만 건설 시 시설물의 안전을 위협하는 정도를 정확히 파악할 필요가 있다. 이 위험 요소의 첫째는 파랑이다. 파랑은 주로 먼바다에서 바람에 의해 생성되어 육지로 전파해 오면서 천수, 굴절, 회절, 반사, 부서짐 등의 여러 가지 변형의 과정을 거쳐서 육지에 이르게 된다. 이러한 파랑의 변형을 예측하는 한 방법으로 비압축성 유체와 비회전류의 연속방정식인 Laplace 방정식을 지배방정식으로 하고 해수면에서의 운동학적 경계조건과 동역학적 경계 조건, 그리고 바닥에서의 운동학적 경계조건을 적용하여 해를 구한다. 파랑의 비선형성을 무시할 경우, 즉 선형파 이론을 사용할 경우 그 해에는 진행파 성분과 소멸파 성분이 있다. 진행파 성분은 수평 방향으로 정현형(sinusoidal)으로 규칙적으로 변하고, 수직의 아래 방향으로 기하급수적으로 감소한다. 반면 소멸파 성분은 수평 방향으로 기하급수적으로 감소하고, 수직 방향으로 정현형으로 규칙적으로 변한다. 선형파 이론을 쓰면 수심의 변화가 없을 때 진행파 성분만으로 Laplace 방정식을 100% 만족시킬 수 있다. 그런데, 수심의 변화가 있는 경우는 진행파 성

*세종대학교 토목환경공학과(Department of Civil and Environmental Engineering, Sejong University, Seoul 143-747, Korea. clee@sejong.ac.kr)
**한양대학교 토목공학과 (Department of Civil Engineering, Hanyang University)

분만으로는 Laplace 방정식을 100% 만족시킬 수 없다. 수심의 변화가 있는 지형을 여러 개의 계단으로 이어진 지형으로 단순화 할 수 있다. 각 계단 내에서는 진행파 성분만으로 입자의 운동궤적이 모두 표현된다. 그런데, 수심의 차이가 나는 계단 사이에서는 입자의 운동 궤적이 진행파 성분만으로는 충분히 표현될 수 없다. 계단 사이에 입자의 운동 궤적의 불연속성을 표현하기 위해 여러 성분의 소멸파 성분이 필요하게 된다. 이는 마치 Fourier 급수 전개기법을 써서 임의 형태의 해를 근사화 하는 것과 비슷하다. 즉, 선형파 이론을 씀으로 인해서 수심의 변화가 있는 지형의 파랑의 운동을 표현하는 해로 소멸파 성분이 발생하는 것이다.

과거에 여러 연구자들(Krisel, 1949; Keller, 1958; Smith and Sprinks, 1975)이 소멸파에 대해 언급하였다. 대개의 경우 소멸파 성분의 크기는 진행파의 크기에 비해서 충분히 작아서 통상 진행파 성분만 고려하여 파랑의 변형을 예측한다. 본 연구에서 선형파 이론을 사용하여 파랑변형을 예측할 때 소멸파 성분의 중요성을 진행파 성분과 비교하여 논하고자 한다. 비교의 수단으로 파랑의 동역학적인 특징인 운동에너지와 위치에너지를 사용하여 그 크기를 정량화 하였다. 그 에너지를 진행파와 소멸파 성분으로 구분하여 비교하였다.

2. 운동에너지와 위치에너지 유도

파랑이 $+x$축 방향으로 전파할 때 선형파 이론에서 수면변위를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\eta = a\cos(kx-\omega t)+\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-k_i x}\sin\omega t \tag{1}$$

여기서, 우변의 첫 번째 항은 진행파 성분을 의미하고, 두 번째 성분은 소멸파 성분을 의미한다. 이 수면변위에 대응하는 속도포텐셜을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\phi = \frac{ag}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i g}{\omega}\frac{\cos k_i(h+z)}{\cos k_i h}e^{-k_i x}\cos\omega t \tag{2}$$

위 식에서 진행파의 파수 k와 소멸파의 파수 k_i는 각각 다음과 같은 선형의 분산관계를 만족한다.

$$\omega^2 = gk\tanh kh,\quad \omega^2 = -gk_i\tan k_i h\quad (i=1,\ldots,\infty) \tag{3}$$

그리고, x, z축 방향의 유체 입자의 속도 u, w는 다음과 같다.

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = ka\frac{g}{\omega}\frac{\cosh(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t) - \sum_{i=1}^{\infty}k_i a_i\frac{g}{\omega}\frac{\cos k_i(h+z)}{\cos k_i h}e^{-k_i x}\cos\omega t \tag{4}$$

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial z} = ka\frac{g}{\omega}\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t) - \sum_{i=1}^{\infty}k_i a_i\frac{g}{\omega}\frac{\sin k_i(h+z)}{\cos k_i h}e^{-k_i x}\cos\omega t \tag{5}$$

파랑의 단위 폭 당 x=[0,l] 구간의 운동에너지의 합을 시간에 따라 평균한 양 KE는 다음과 같다.

$$KE = \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^l\int_{-h}^0\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]dzdxdt = (KE)_p+(KE)_e \tag{6}$$

여기서, $(KE)_p$는 운동에너지에서 진행파 성분을 의미하는 것으로 다음과 같다.

$$(KE)_p = \frac{1}{4}\rho g a^2 l \tag{7}$$

그리고, $(KE)_e$는 운동에너지에서 소멸파의 영향을 받는 성분으로 다음과 같이 세 가지 성분으로 구성되어 있다.

$$(KE)_e = (KE)_{pe}+(KE)_{e_ie_i}+(KE)_{e_ie_j} \tag{8}$$

즉, $(KE)_{pe}$, $(KE)_{e_ie_i}$, $(KE)_{e_ie_j}$는 각각 운동에너지에서 진행파와 소멸파의 합성 성분, 서로 같은 소멸파의 합성 성분, 서로 다른 소멸파의 합성 성분으로 구성되어 있다. 이 성분을 구체적으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(KE)_{pe} = {}& -\frac{1}{2}\rho ga\frac{1}{\sinh kh}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k_i a_i}{(k^2+k_i^2)^2\cos k_i h}\\ &\{[k\sinh kh\cos k_i h+k_i\cosh kh\sin k_i h]\\ &[k_i(1-e^{k_i l}\cos kl)+ke^{-k_i l}\sin kl]\\ &+[k\cosh kh\sin k_i h-k_i\sinh kh\cos k_i h]\\ &[k(1-e^{k_i l}\cos kl)-k_i e^{-k_i l}\sin kl]\}\end{aligned} \tag{9}$$

$$(KE)_{e_ie_i} = -\frac{1}{4}\rho gh\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\frac{1-e^{-2k_i l}}{\sin 2k_i h} \tag{10}$$

$$(KE)_{e_ie_j} = \frac{1}{4}\rho\frac{g^2}{\omega^2}\sum_{i\neq j}^{\infty}\sum_{i\neq i}^{\infty}\frac{a_i a_j k_i k_j}{(k_i+k_j)(k_i-k_j)}\frac{\sin[(k_i-k_j)h]}{\cos k_i h\,\cos k_j h}[1-e^{-(k_i+k_j)l}] \tag{11}$$

파랑의 단위 폭 당 $x=[0, l]$ 구간의 위치에너지의 합을 시간에 따라 평균한 양 PE는 다음과 같다.

$$PE=\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^l\frac{1}{2}\rho g(h+\eta)^2dxdt-\frac{1}{2}\rho gh^2l$$
$$=(PE)_p+(PE)_e \tag{12}$$

여기서,

$$(PE)_p=\frac{1}{4}\rho ga^2l \tag{13}$$

$$(PE)_e=(PE)_{pe}+(PE)_{e_ie_i}+(PE)_{e_ie_j} \tag{14}$$

$$(PE)_{pe}=\frac{1}{2}\rho ga\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{k^2+k_i^2}[k(1-e^{-k_il}\cos kl)-k_ie^{-k_il}\sin kl] \tag{15}$$

$$(PE)_{e_ie_i}=\frac{1}{8}\rho g\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i^2}{k_i}(1-e^{-2k_il}) \tag{16}$$

$$(PE)_{e_ie_j}=\frac{1}{4}\rho g\sum_{i\neq j}^{\infty}\sum_{j\neq i}^{\infty}\frac{a_ia_j}{k_i+k_j}[1-e^{-(k_i+k_j)l}] \tag{17}$$

진행파 성분의 운동에너지와 위치에너지는 기존의 연구에서 잘 알려져 있다(Dean and Dalrymple, 1984). 소멸파 성분의 영향을 받는 에너지는 수평 길이 l이 커짐에 그 길이에 비례해서 증가하지 않고 증가의 정도가 기하급수적으로 줄어드는 것을 볼 수 있다. 다시 말해서 소멸파 성분의 수평길이 당 에너지는 기하급수적으로 감소한다.

수평 길이가 $l=nL$(L은 진행파의 파장이고, $n=1,2...$이면 식 (9)와 (15)는 각각 다음과 같이 된다.

$$(KE)_{pe}=-\frac{1}{2}\rho ga\coth kh\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k_ia_i\tan k_ih}{k^2+k_i^2}(1-e^{-k_il}) \tag{18}$$

$$(PE)_{pe}=\frac{1}{2}\rho gka\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{k^2+k_i^2}(1-e^{-k_il}) \tag{19}$$

따라서, 수평 길이가 $l=nL$이면, 파랑의 단위 폭 당 $x=[0, l]$ 구간의 운동에너지의 합 KE와 위치에너지의 합 PE는 다음과 같다.

$$KE=\frac{1}{4}\rho ga^2l$$
$$\left\{1-2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{a}\frac{k_i}{l(k^2+k_i^2)}\frac{\tan k_ih}{\tanh kh}(1-e^{-k_il})-\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{a_i}{a}\right)^2\frac{h}{l}\frac{1-e^{-2k_il}}{\sin 2k_ih}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\tanh kh}\sum_{i\neq j}^{\infty}\sum_{j\neq i}^{\infty}\frac{a_ia_j}{a^2}\frac{k_ik_j}{lk(k_i^2-k_j^2)}\frac{\sin[(k_i-k_j)h]}{\cos k_ih\cos k_jh}[1-e^{-(k_i+k_j)l}]\right\} \tag{20}$$

$$PE=\frac{1}{4}\rho ga^2l$$
$$\left\{1+2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{a}\frac{k}{l(k^2+k_i^2)}(1-e^{-k_il})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{a_i}{a}\right)^2\frac{1}{lk_i}(1-e^{-2k_il})\right.$$
$$\left.+\sum_{i\neq j}^{\infty}\sum_{j\neq i}^{\infty}\frac{a_ia_j}{a^2}\frac{1}{l(k_i+k_j)}[1-e^{-(k_i+k_j)l}]\right\} \tag{21}$$

수평 길이가 무한히 길면(즉, $l\to\infty$) 단위 폭 당 $x=[0, l]$ 구간의 운동에너지와 위치에너지의 총합 TE는 다음과 같다.

$$TE=KE+PE$$
$$=\frac{1}{2}\rho ga^2$$
$$\left\{l+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{a}\frac{1}{k^2+k_i^2}\left(-k_i\frac{\tan k_ih}{\tanh kh}+k\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{a_i}{a}\right)^2\left(-\frac{h}{2\sin 2k_ih}+\frac{1}{4k_i}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{\infty}\sum_{j\neq i}^{\infty}\frac{a_ia_j}{a^2}\frac{1}{(k_i+k_j)}\left[\frac{k_ik_j}{k(k_i-k_j)}\frac{1}{\tanh kh}\frac{\sin[(k_i-k_j)h]}{\cos k_ih\cos k_jh}+1\right]\right\} \tag{22}$$

파랑이 $-x$축 방향으로 전파하는 경우에도 파랑의 운동에너지와 위치에너지가 식 (7)-(22)와 같이 유도된다.

3. 결 론

선형파 이론을 사용하여 파랑변형을 예측할 때 파랑 성분에는 운동학적(kinematic)으로나 역학적(dynamic)으로 진행파뿐만 아니라 소멸파 성분이 있다. 통상적으로 파랑 성분에서 소멸파 성분을 무시하여 해석을 하는데 과연 무시할 수 있을 정도로 작은 지 역학적으로 규명하는 작업이 선행되어야 할 것이다. 본 연구에서 소멸파 성분의 역학적인 크기를 정량화 하는 작업을 하였다. 다시 말해서, 기존의 연구(Dean and Dalrymple, 1984)에서 진행파 성분만의 운동에너지와 위치에너지를 유도하였는데 본 연구에서는 소멸파의 영향을 받는 성분의 에너지를 유도하였다. 이 성분에는 진행파와 소멸파의 합성 성분, 서로 같은 소멸파의 합성 성분, 서로 다른 소멸파의 합성 성분으로 구성되어 있다.

수평길이 당 소멸파의 에너지 성분은 수평길이가 커짐에 따라 기하급수적으로 감소한다. 장차 연구에서 실제 수심이 변하는 지형 예를 들어, 계단형 지형 위로 파랑이 전파하는 경우 진행파뿐만 아니라 소멸파의 에너지 성분을 비교하여 과연 소멸파의 크기를 무시할 수 있는지 아니면 고려해야 하는지 알아볼 계획이다.

감사의 글

본 논문의 첫 번째 저자는 한국과학재단 특정기초연구과제(과제번호: R01-2000-000-00365-0)의 지원을 받아 연구를 수행하였고, 두 번째 저자는 과학기술부 국가지정 연구실사업(한양대학교 해안공학연구실)의 지원을 받아 수행하였기에 이에 감사 드린다.

참고문헌

Dean, R.G. and Dalrymple, R.A., 1984. *Water wave mechanics for engineers and scientists*, Prentice Hall.

Keller, J.B., 1958. Surface waves on water with non-uniform depth, *J. Fluid Mech.*, **4**, pp. 607-614.

Krisel, G., 1949. Surface wave, *Q. Appl. Math.*, **7**, pp. 21-24.

Smith, R. and Sprinks, T., 1975. Scattering of surface waves by a conical island, *J. Fluid Mech.*, **72**, pp. 373-383.

Received September 2, 2002
Accepted November 11, 2002