

비홀로노믹 동적 시스템을 위한 슬라이딩 모드 제어

Sliding Mode Control for Nonholonomic Dynamic Systems

양 정 민
(Jung-Min Yang)

Abstract : As nonholonomic dynamic systems have constraints imposed on motions that are not integrable, i.e., the constraints cannot be written as time derivatives of some functions of generalized coordinates, advanced techniques are needed for their control. In this paper, a sliding mode tracking control for nonholonomic dynamic systems is proposed. By introducing a general scheme of coordinate transformation, the state of nonholonomic systems is mapped into a bounded space and a robust controller for dynamic models of nonholonomic systems with input disturbances is designed using sliding mode control scheme. Simulation results of tracking control for a nonholonomic mobile robot with two actuated wheels are provided to show the effectiveness of the proposed controller.

Keywords : nonholonomic systems, tracking control, sliding mode control.

I. 서론

본 논문에서는 입력 외란(input disturbance)이 존재하는 비홀로노믹 동적 시스템(nonholonomic dynamic systems)을 위한 새로운 견실 추종 제어 기법을 제안한다. 비홀로노믹 동적 시스템은 적분 불가능한 제한 조건이 상태 변수 사이에 존재하는 시스템으로서[1] 수평면을 주행하는 바퀴 구동 이동 로봇이 그 대표적인 예이다. 비홀로노믹 시스템에서 일반적으로 상태 변수의 개수는 제어 입력 변수의 개수보다 많기 때문에 일반적인 제한 제어 기법으로 추종 제어를 설계하기가 불가능하다[1]. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 지금까지 발표된 비홀로노믹 시스템 제어 연구 결과에서는 불연속 시불변 제어(discontinuous time-invariant control), 시변 제어(time-varying control), 하이브리드 안정화(hybrid stabilization), 체인 시스템(chained systems)을 이용한 기구학적 제어(kinematic control using chained systems) 등이 제안되었다[1],[2].

비홀로노믹 동적 시스템에서도 매개변수의 불확실성, 외부 외란, 마찰력 및 부하(payload)의 변화 등으로 모델링 불확실성이 존재한다. 하지만 제어기 설계의 상대적인 난해함 때문에 비홀로노믹 동적 시스템의 모델 불확실성을 극복하는 문제는 별로 연구가 되어 있지 않다. 그 중에서 슬라이딩 모드 제어 기법을 이용한 연구 결과로는 Su 등이 제안한 위치 및 힘 제어[3], Xu 와 Huo 의 체인 시스템을 이용한 제어[4], Yang 과 Kim 이 제안한 이동 로봇을 위한 슬라이딩 모드 제어[5],[6] 등이 있다.

본 논문에서는 저자의 선행 연구[5],[6]을 수정 보완하여 일반적인 비홀로노믹 시스템의 추종 제어를 위한 견실 제어 기법을 제안한다. 본 논문에서는 일반적으로 존재하는 좌표 변환(coordinate transformation)을 통하여 비홀로노믹 시스템의 상태 좌표를 유계 공간(bounded space)으로 매핑(mapping)한 후 시스템의 상태 변수 오차가 모두 0으로 점근적으로 수렴

하도록 하는 슬라이딩 모드 제어기를 설계할 수 있음을 보인다. 리아프노프(Lyapunov) 안정성 분석을 통하여 제안된 제어기의 안정성을 증명하고 입력 외란이 존재해도 제어기가 견실함을 보인다. 평면 위에서 미끄러짐 없이 비홀로노믹 특성을 보이며 운동하는 회전 바퀴(rolling wheel without slipping)의 추종 제어 모의 실험을 통해 제안된 제어기의 성능을 입증한다. 본 논문의 기여도는 다음과 같다.

비홀로노믹 동적 시스템의 추종 제어 문제를 슬라이딩 모드 제어 기법을 사용하여 해결한다. [3] 등에서도 슬라이딩 모드 제어가 비홀로노믹 시스템의 추종 제어 문제에 응용되었지만 상태 변수 오차를 모두 0으로 수렴시키지는 못하였다. 본 논문에서는 일반적인 비홀로노믹 시스템의 추종 제어 문제에 대해서 슬라이딩 모드를 구성할 수 있음을 입증하고 입력 외란이 존재하는 경우에 대해서도 제안된 제어기가 견실함을 증명한다.

본 연구의 결과는 시스템의 차수가 4 차 이상인 비홀로노믹 시스템의 추종 제어 문제에 적용 가능하다. [5],[6]의 선행 연구에서 제안된 제어기는 차수가 3차인 비홀로노믹 이동 로봇의 주행에만 적용 가능했지만 본 논문에서 제안된 슬라이딩 모드 제어기는 시스템의 차수에 상관없이 적용될 수 있다.

II. 시스템 운동 방정식 및 문제 설정

차수가 n 이고 m 개의 비홀로노믹 제한식을 가진 동적 시스템의 운동 방정식을 오일러-라그랑제(Euler-Lagrangian) 방정식으로 기술하면 다음과 같다[3].

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)\tau + J^T(q)\lambda. \quad (1)$$

위에서 $q = [q_1, \dots, q_n]^T$ 는 $n \times 1$ 좌표계 상태 변수 벡터, $M(q)$ 은 $n \times n$ 관성 질량 행렬, $V(q, \dot{q})$ 는 $n \times 1$ 원심력 및 코리올리(Coriolis) 힘 벡터, $G(q)$ 은 $n \times 1$ 중력 벡터, $B(q)$ 는 $n \times r$ 입력 변환 행렬, τ 는 $r \times 1$ 입력 토크 벡터, $J(q)$ 는 $m \times n$ 자코비안(Jacobian) 행렬, λ 는 $m \times 1$ 라그랑제 승

수 (Lagrangian multiplier) 벡터이다. 좌표계 벡터 사이에 존재하는 비홀로노믹 제한 조건은 다음과 같이 기술된다.

$$J(q)\dot{q}=0. \tag{2}$$

일반적으로 비홀로노믹 시스템의 입력 차수는 시스템 차수와 비홀로노믹 제한식의 차수를 뺀 것과 같다 ($r = n - m$). 본 논문에서도 이러한 조건이 만족된다고 가정한다. (2)의 제한조건을 (1)의 방정식에 반영하기 위해서 $J(q)$ 의 영공간(null space)을 생성(span)하는 벡터들로 이루어진 $n \times (n - m)$ 행렬 $S(q)$ 를 도입한다. (2)로부터 q 에 대해서 다음과 같은 식을 만족하는 $(n - m) \times 1$ 벡터 z 를 찾을 수 있다.

$$\dot{q} = S(q)z. \tag{3}$$

z 는 \dot{q} 와 대응되는 내부 상태 변수(internal state variables)로서 비홀로노믹 제한조건을 운동 방정식에 반영하기 위해서 도입된다[3]. (3)과 그 미분식을 (1)에 대입하고 양변에 $S^T(q)$ 를 곱하면 운동방정식은 아래와 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} M_1(q)\dot{z} + V_1(q, \dot{q})z + G_1(q) &= B_1(q)\tau, \\ M_1(q) &= S^T(q)M(q)S(q) \\ V_1(q, \dot{q}) &= S^T(q)M(q)\dot{S}(q) + S^T(q)V(q, \dot{q})S(q) \\ G_1(q) &= S^T(q)G(q) \\ B_1(q) &= S^T(q)B(q) \end{aligned} \tag{4}$$

비홀로노믹 제한조건을 반영한 새로운 운동방정식 (3)과 (4)는 (1)과 완전 동가이다. 본 논문에서는 앞으로 (3)과 (4)를 이용하여 제어기를 설계하기로 한다.

본 논문에서는 고려하고 있는 비홀로노믹 시스템의 내부에 입력 외란이 존재한다고 가정한다. 입력 외란을 $(n - m) \times 1$ 벡터 τ_d 로 표시하면 (4)는 다음과 같이 된다.

$$M_1(q)\dot{z} + V_1(q, \dot{q})z + G_1(q) + \tau_d = B_1(q)\tau. \tag{5}$$

외란 벡터 τ_d 는 불확실성 부합 조건(uncertainty matching condition)[7], 즉 외란이 $M_1(q)$ 의 곱으로 표시될 수 있다는 조건을 만족하고 그 경계값이 알려져 있다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \tau_d &= -M_1(q)f, \\ |f_i| &\leq \bar{f}_i, \quad i = 1, \dots, n - m. \end{aligned} \tag{6}$$

f_i 는 f 의 i 번째 원소이고 \bar{f}_i 는 $|f_i|$ 의 상계값(upper bound)이다. $\tau_d = M_1(q)M_1^{-1}(q)\tau_d$ 이고 $M_1^{-1}(q)$ 은 항상 유계(bounded)이므로 (6)은 동적 시스템 내에 존재하는 일반적인 외란에 대해 모두 성립되는 조건이다.

동적 추종 제어 문제는 (5)의 비홀로노믹 시스템의 좌표계 벡터 $q(t)$ 가 시간에 따라서 변하는 임의의 기준 궤적 벡터 $q_r(t)$ 에 점근적으로 수렴(asymptotically converging)하도록 하

는 견실한 제어기를 설계하는 것이다. 즉, 다음을 만족하는 제어 입력 τ 을 찾는다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (q(t) - q_r(t)) = 0.$$

본 논문에서는 슬라이딩 모드 제어기를 설계하기 위해 비홀로노믹 시스템의 모든 상태 변수를 유계 공간(bounded space)으로 변환시키는 좌표 변환을 도입한다. 상태 변수 벡터 q 를 적절히 재배치하여 (3)의 행렬 $S(q)$ 의 최초 $n - m$ 행이 서로 독립이 되도록 한다. 재배치된 q 의 원소를

$$\begin{aligned} q &= [q_a, q_b]^T \\ q_a &= [q_1, \dots, q_{n-m}]^T \\ q_b &= [q_{n-m+1}, \dots, q_n]^T \end{aligned}$$

라고 정의하면 q_b 의 최초 l ($0 \leq l \leq m$)개의 원소가 유계 공간 내에 머무른다고 일반적으로 가정할 수 있다. (q_b 의 원소를 다시 재배치해서 유계 공간 내에 있는 원소를 앞으로 배치시키면 이 가정은 항상 성립한다. 또한 q_b 의 원소의 위치를 바꾸어도 재배치된 $S(q)$ 의 최초 $n - m$ 행은 바뀌지 않는다.) 재배치된 q 를 정의구역으로 하는 다음과 같은 미분 동형(diffeomorphic) 좌표 변환(coordinate transformation) $x = F(q)$ 를 정의한다.

$$\begin{aligned} x_i &= q_i, & i &= 1, \dots, n - l, \\ x_i &= \arctan(q_i), & i &= n - l, \dots, n. \end{aligned} \tag{7}$$

정의에서 알 수 있듯이 $F(q)$ 는 q_b 의 원소 중 유계가 아닌 것들을 모두 유계 공간으로 매핑하는 변환이다. 변환된 좌표계 x 를 이용하여 (3)을 다시 쓰면 아래와 같다.

$$\dot{x} = \frac{\partial F}{\partial q} S(q)z. \tag{8}$$

$\partial F / \partial q$ 는 $F(q)$ 의 자코비안 행렬로 다음과 같은 대각선 행렬(diagonal matrix)로 유도된다.

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \text{diag} \left[1, \dots, 1, \frac{1}{1 + q_{n-l+1}^2}, \dots, \frac{1}{1 + q_n^2} \right]. \tag{9}$$

(8)을 간단히 하기 위하여 행렬 $R(q)$ 를

$$R(q) = \frac{\partial F}{\partial q} S(q) \tag{10}$$

와 같이 정의하고 $R_n(q)$ 를 $R(q)$ 의 최초 $n - m$ 행으로 이루어진 $(n - m) \times (n - m)$ 서브행렬(sub-matrix)이라고 하자. 상태 변수 q 의 재배치에 의해서 $S(q)$ 의 최초 $n - m$ 행은 서로 독립이고 행렬 $\partial F / \partial q$ 는 (9)에서 알 수 있듯이 가역행렬(invertible matrix)이므로 $R_n(q)$ 는 완전 계수(full rank)를 가진다.

$R_c(q)$ 는 III 장에서 슬라이딩 모드 제어를 제안할 때 유용하게 사용된다.

위에서 정의한 좌표 변환 x 를 기준으로 비홀로노믹 시스템의 동적 추종 제어 문제를 다시 쓰면 아래와 같은 수렴식을 만족시키는 제어 입력 τ 를 찾는 것으로 정의될 수 있다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_r(t)) = 0.$$

이때 $x_r(t)$ 는 변환된 좌표계 내에서 표시된 기준 궤적 벡터이다. $x_r(t)$ 에 대한 내부 상태 변수를 z_r 로 정의하면 아래와 같은 관계식을 만족한다.

$$\dot{x}_r = R(q_r)z_r.$$

III. 슬라이딩 모드 제어기

1. 슬라이딩 평면

슬라이딩 모드 제어기는 제어 입력에 따라서 상태 변수를 나누고 각 상태 변수가 슬라이딩 평면을 따라 평형점(equilibrium point)에 수렴하도록 한다. 따라서 제어할 수 있는 상태 변수의 개수는 제어 입력의 수와 동일해야 한다. 비홀로노믹 시스템은 제어 입력의 수가 상태 변수의 개수보다 적으므로 일반적인 슬라이딩 모드 제어 기법을 직접 적용할 수 없다. 하지만 II 장에서 정의한 좌표 변환 $F(q)$ 를 이용하여 상태 변수의 일부를 유계 공간에 머무르게 하면 비홀로노믹 시스템의 추종 제어를 해결할 수 있는 슬라이딩 평면을 구성할 수 있다.

좌표 변환된 새로운 상태 변수를 이용하여 오차 벡터 e 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} e &= x - x_r \\ e_a &= x_a - (x_r)_a \end{aligned} \tag{11}$$

x_r 은 좌표 변환된 기준 궤적 벡터이고 e_a 와 $(x_r)_a$ 는 각각 e 와 x_r 의 상위 $n-m$ 번째 원소들로 이루어진 $(n-m)$ 차 벡터이다. 슬라이딩 평면 $s = [s_1, \dots, s_{n-m}]^T$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$s = \dot{e}_a + \Lambda e_a + E(e). \tag{12}$$

$\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}]$ 는 양의 정부호(positive-definite)를 가진 $(n-m) \times (n-m)$ 대각선 행렬로서 슬라이딩 평면의 수렴 속도를 결정한다. $E(e)$ 는 다음과 같이 정의된 $(n-m) \times 1$ 행렬이다.

$$E(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{sgn}(e_{n-2m+1}) |e_{n-m+1}| \\ \vdots \\ \text{sgn}(e_{n-m}) |e_n| \end{bmatrix} \tag{13}$$

보조정리 1 : (12)의 슬라이딩 평면 s 가 유한 시간 내에 0 으로 수렴하면 오차 벡터 e 는 0 으로 점근적(asymptotically)으로 수렴한다.

증명 : 상위 $n-2m$ 개의 슬라이딩 평면을 먼저 생각하자. (12)와 (13)으로부터

$$s_i = \dot{e}_i + \lambda_i e_i \quad (i = 1, \dots, n-2m)$$

이므로 $s_i = 0$ 이면 $\dot{e}_i = -\lambda_i e_i$ 가 되어 e_i 는 0 으로 수렴한다. 나머지 m 개의 슬라이딩 평면식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s_j &= \dot{e}_j + \lambda_j e_j + \text{sgn}(e_j) |e_{j+m}| \\ (j &= n-2m+1, \dots, n-m). \end{aligned}$$

s_j 가 유한 시간 내에 0 으로 수렴하면 슬라이딩 평면식은 $\dot{e}_j = -\lambda_j e_j - \text{sgn}(e_j) |e_{j+m}|$ 와 같이 되고, 좌표 변환에 의해서 $|e_{j+m}|$ 는 항상 유계이므로 e_j 와 \dot{e}_j 사이에서 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} e_j > 0 &\Rightarrow \dot{e}_j < 0, \\ e_j < 0 &\Rightarrow \dot{e}_j > 0. \end{aligned}$$

그러므로 e_j 는 0 으로 점근적으로 수렴한다. 또한 $\dot{e} = R(q)z - R(q_r)z_r$ 이고 $R(q)$, $R(q_r)$, z , z_r 가 모두 균등연속(uniformly continuous)이므로 \dot{e}_j 도 균등연속이다. 따라서 Barbalat 의 보조정리([10]의 Lemma 4.4 참조)에 의해서 \dot{e}_j 도 0 으로 수렴한다. s_j 와 e_j , \dot{e}_j 가 각각 0 으로 수렴하면 $|e_{j+m}|$ 도 0 으로 수렴하므로 오차 벡터 e 의 모든 원소가 0 으로 수렴한다. ■

제안된 슬라이딩 평면에서 s_1, \dots, s_{n-m} 은 각각 유계가 아닌 상태 변수 한 개의 오차 방정식으로 구성된 표준적인 슬라이딩 평면이다. s_{n-m+1}, \dots, s_n 에서는 슬라이딩 평면 하나 당 상태 변수 두 개가 하나의 오차 방정식을 구성하고 있다. 이것은 비홀로노믹 시스템의 상태 변수의 차수가 제어 입력 차수보다 많기 때문이다. 하지만 보조정리 1 에서 증명했듯이 제안된 슬라이딩 평면 s 가 유한 시간 내에 0 으로 수렴하면 모든 상태 변수 오차는 0 으로 수렴한다. 다음 절에서는 슬라이딩 평면을 유한 시간 내에 0 으로 수렴시키는 건설 제어를 설계한다.

2. 제어기 설계

입력 외란은 (6)과 같이 불확실성 부합 조건을 만족하므로 본 논문에서는 다음과 같은 폐환 선형화(feedback linearization) 방법으로 제어를 설계한다.

$$B_1(q)\tau = M_1(q)\dot{z}_r + V_1(q, \dot{q})z_r + G_1(q) + M_1(q)u. \tag{14}$$

위에서 z_r 은 기준 궤적 벡터의 내부 상태 변수이고 u 는 페루프 제어 시스템(closed-loop control system)의 특성을 결정하

는 제어 입력이다. (6)과 (14)를 (5)에 대입하고 양변에 M_1^{-1} 를 곱하면 동적 방정식은 다음과 주어진다.

$$\dot{z} - f = \dot{z}_r + u. \quad (15)$$

제어기 설계를 용이하게 하기 위해서 보충항 $H(e, \dot{e})$ 와 $K(q, q_r, z, z_r, \dot{z}_r)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$H(e, \dot{e}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{sgn}(e_{n-2m+1}) \frac{d|e_{n-2m+1}|}{dt} \\ \vdots \\ \text{sgn}(e_{n-m}) \frac{d|e_n|}{dt} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$K(q, q_r, z, z_r, \dot{z}_r) = \dot{R}_a(q)z - \dot{R}_a(q_r)z_r + (R_a(q) - R_a(q_r))\dot{z}_r.$$

$H(e, \dot{e})$ 는 $E(e)$ 의 일차 미분항이다. (8)과 (11)로부터 e_n 의 2차 미분 벡터 \ddot{e}_n 는 아래와 같이 K 를 포함한 식으로 간단하게 유도될 수 있다.

$$\ddot{e}_n = R_a(q)(\dot{z} - \dot{z}_r) + K(q, q_r, z, z_r, \dot{z}_r). \quad (17)$$

본 논문에서 제안한 슬라이딩 모드 제어 입력 u 는 정리 1과 같다.

정리 1 : 입력 외란을 가지는 비홀로노믹 시스템 (5)에 (14)와 같이 케환 선형화 방법으로 제어기가 구성된다고 하자. 아래와 같이 정의된 제어 입력 u 는 추종 제어 목적 $\lim_{t \rightarrow \infty} (q(t) - q_r(t)) = 0$ 을 달성한다.

$$u = \varphi - R_a^{-1}(q)(\Gamma \text{sgn}(s) + \Lambda \dot{e}_n + H(e, \dot{e}) + K(q, q_r, z, z_r, \dot{z}_r)). \quad (18)$$

위 정의에서 $\Gamma = \text{diag}[\gamma_1, \dots, \gamma_{n-m}]$ 는 정부호 대각선 행렬이고 $\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}]^T$ 은 다음과 같이 슬라이딩 모드 제어 법칙[8]에 따라서 정의되는 스위칭 함수(switching function)이다.

$$\varphi_i = -\bar{f}_i \text{sgn} \left(\sum_{j=1}^{n-m} s_j (R_a(q))_{ji} \right) \quad (19)$$

($i = 1, \dots, n-m$).

$(R_a(q))_{ji}$ 는 행렬 $R_a(q)$ 의 (j, i) 번째 원소이다.

증명 : 리아프노프 함수 후보를 $V = \frac{1}{2} s^T s$ 로 선정한다. (15)와

(18)로부터 $\dot{z} - \dot{z}_r$ 는 아래와 같이 유도된다.

$$\dot{z} - \dot{z}_r = \varphi - R_a^{-1}(q)(K \text{sgn}(s) + \Lambda \dot{e}_n + H + K) + f. \quad (20)$$

(16), (17), (20)으로부터 \dot{V} 를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T \dot{s} \\ &= s^T (\ddot{e}_n + \Lambda \dot{e}_n + \dot{E}(e)) \\ &= s^T (R_a(q)(\dot{z} - \dot{z}_r) + K + \Lambda \dot{e}_n + H) \\ &= s^T (R_a(q)\varphi - \Gamma \text{sgn}(s) - \Lambda \dot{e}_n - H - K + R_a(q)f + K + \Lambda \dot{e}_n + H) \\ &= -\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i |s_i| + s^T R_a(q)\varphi + s^T R_a(q)f \\ &= -\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i |s_i| - \sum_{i=1}^{n-m} \left| \sum_{j=1}^{n-m} s_j (R_a(q))_{ji} \right| \bar{f}_i + s^T R_a(q)f \\ &\leq -\sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i |s_i| \leq 0. \end{aligned}$$

위 전개 과정에서 마지막 부등식은 Cauchy-Schwartz 부등식으로부터 유도된 결과이다. 위 결과를 다시 쓰면

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\sum_{i=1}^{n-m} k_i |s_i|$$

와 같이 되어 슬라이딩 평면 수렴 조건[11]을 만족한다. 따라서 슬라이딩 평면 s 는 유한 시간 내에 0으로 수렴하고 보조정리 1에 의해서 상태 변수 오차 벡터도 0으로 점근적으로 수렴한다. ■

$z = R_a^{-1}(q)\dot{x}_a$ 이고 내부 상태 변수 z 는 항상 유계이므로 $R_a^{-1}(q)$ 도 유계이다. 따라서 제안된 제어 입력 u 는 발산하지 않는다. u 에서 φ 는 입력 외란 f 를 상쇄시키기 위해서 첨가된 항이다. 입력 외란이 존재하지 않는 이상적인 경우라면 $\varphi = 0$ 이 되어 제어 입력 신호의 체터링(chattering) 현상은 없어질 것이다. 서론에서 언급했듯이 정리 1의 결과는 시스템의 차수에 상관없이 일반적인 n 차 비홀로노믹 시스템의 추종 제어에 적용될 수 있다. 이것은 3차 이동 로봇의 추종 제어 문제만 해결했던 선행 연구[5][6]와 비교하여 더 우수한 결과이다.

IV. 모의실험

본 논문에서 제안한 제어기의 성능을 검증하기 위해서 평면 위를 운동하는 미끄러짐 없는 회전 바퀴(rolling wheel without slipping)의 추종 제어 문제에 대한 모의 실험을 실시하였다. 회전 수직 바퀴의 추종 제어는 [12]에서 처음 제시된 대표적인 비홀로노믹 문제이다. x 와 y 를 평면에 고정된 전역 좌표계 $X-Y$ 에서 본 바퀴와 평면의 접점 좌표라고 정의하고 ϕ 를 X 축에서 반시계 방향으로 측정한 바퀴의 주행 방향(heading direction)이라고 정의하자. 또 θ 를 바퀴의 회전 각도라고 정의하고 모든 매개 상수를 1로 놓으면 바퀴의 주행은 다음과 같은 동역학 방정식으로 표현된다[12].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 \\ \dot{y} &= \lambda_2 \\ \dot{\theta} &= -\lambda_1 \cos \phi - \lambda_2 \sin \phi + \tau_1 \\ \dot{\phi} &= \tau_2. \end{aligned}$$

따라서 상태 변수 벡터는 $q=[x,y,\theta,\phi]^T$ 이고 $n=4$ 이다. τ_1 는 바퀴의 회전축에 대한 입력 토크(torque)이고 τ_2 는 바퀴 접점의 수직축을 중심으로 가해지는 입력 토크이다. 미끄러짐 없이 운동해야 한다는 비홀로노믹 제한 조건을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{y} &= \dot{\theta} \sin \phi. \end{aligned}$$

비홀로노믹 제한 조건의 차수 m 은 2 이고 자코비안 행렬 $J(q)$ 는 다음과 같다.

$$J(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos \phi & 0 \\ 0 & 1 & -\sin \phi & 0 \end{bmatrix}.$$

영공간 생성행렬 $S(q)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$S(q)$ 의 첫번째, 두번째 행은 서로 독립이므로 q 를 재배치할 필요가 없다. 또한 $q=[x,y,\theta,\phi]^T$ 의 세번째와 네번째 원소 θ 와 ϕ 가 모두 각도를 나타내는 변수이므로 $[-\pi,\pi]$ 의 범위로 값을 제한하면 유계 공간에 머무르게 할 수 있다. 따라서 $x=q$, $R(q)=S(q)$ 가 되고 오차 벡터는 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_r \\ y - y_r \\ \theta - \theta_r \\ \phi - \phi_r \end{bmatrix}.$$

기준 궤적 벡터는 다음과 같이 정의된 내부 상태 변수 z_{r1} 과 z_{r2} 를 적분해서 생성한다.

$$\begin{aligned} 0 \leq t < 5: & \quad z_{r1} = 0.25(1 - \cos(\pi t/5)) \\ 5 \leq t < 10: & \quad z_{r1} = 0.5 \\ 10 \leq t < 15: & \quad z_{r1} = 0.25(1 + \cos(\pi t/5)) \\ 15 \leq t \leq 20: & \quad z_{r1} = 0.5(1 + \cos(\pi t/5)) \\ 0 \leq t < 20: & \quad z_{r2} = 0.5 \sin(\pi t/10). \end{aligned}$$

모의 실험에서 사용된 제어 매개 변수는 $\Gamma = \text{diag}[5 \ 5]$, $\Lambda = \text{diag}[10 \ 10]$ 이다. 입력 외란은 평균 0, 분산 0.2 인 가우스 노이즈(Gaussian noise)라고 가정했으며 상계값은 $\bar{f}_1 = \bar{f}_2 = 1$ 로 정의하였다.

그림 1~5 는 모의 실험 결과를 나타낸 것이다. 그림 1에서 볼 수 있듯이 회전 바퀴는 초기 오차 (1,-1)을 가지면서 출발했으나 기준 궤적에 바로 수렴하였다. 그림 2와 그림 3은 각 상태 변수 오차가 0 으로 점근적으로 수렴한다는 사실을 보여준다. 그림 4와 그림 5는 입력 토크를 나타낸다. 모의실험

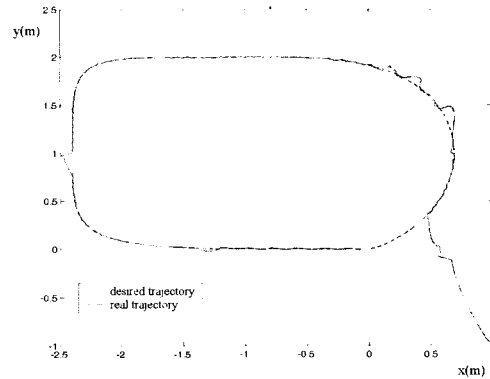


그림 1. x-y 궤적.

Fig. 1. x-y trajectory.

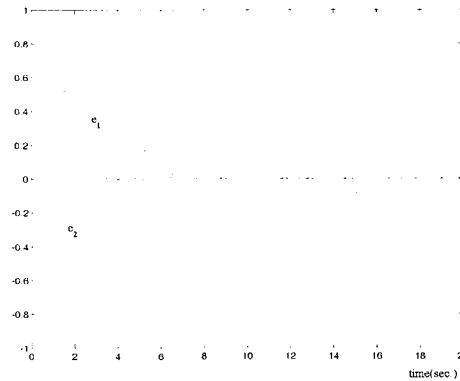


그림 2. x 오차와 y 오차.

Fig. 2. Tracking errors of x and y.

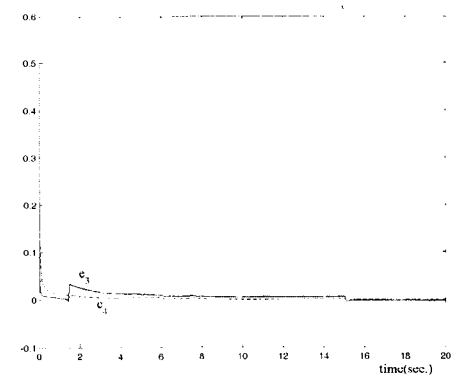


그림 3. θ 오차와 ϕ 오차.

Fig. 3. Tracking errors of θ and ϕ .

에서는 슬라이딩 모드 제어 입력에 존재하는 불연속성(discontinuity)을 제거하기 위해서 signum 함수 대신 구간 $[-\epsilon, \epsilon]$ 에서 연속인 포화 함수(saturation function) $\text{sat}(\cdot/\epsilon)$ 를 사용하였다($\epsilon = 0.01$). 그림 1~5 의 결과는 제안된 제어기가 4차 이상의 차수를 가진 비홀로노믹 시스템의 동적 추종 제어에 성공적으로 적용될 수 있음을 입증한다. 또한 [3]에서 제안된 슬라이딩 모드를 이용한 기존 제어기로는 본 모의 실험의 결과처럼 모든 상태 변수 오차를 안정화시키지 못하고

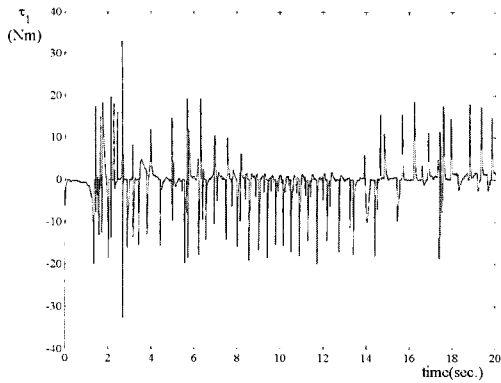


그림 4. 입력 토크 τ_1 .

Fig. 4. Input torque τ_1 .

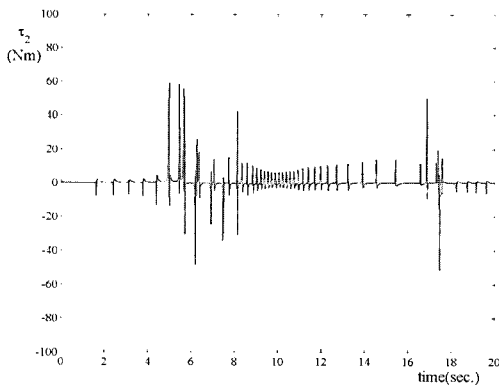


그림 5. 입력 토크 τ_2 .

Fig. 5. Input torque τ_2 .

일부 상태 변수만 기준 궤적을 추종하도록 하므로 본 논문의 제어기가 더 우수한 성능을 보인다고 말할 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 비홀로노믹 동적 시스템의 추종 제어를 위한 슬라이딩 모드 제어를 제안하였다. 비홀로노믹 동적 시스템의 상태 변수의 일부를 유계 공간으로 변환하는 좌표 변환을 통하여 모든 상태 변수 오차를 0으로 수렴하게 하는 슬라이딩 평면을 구성할 수 있음을 보였다. 또한 제안된 제어기는 시스템 내부에 존재하는 입력 외란에 대해서 견실한 특성을

보였다. 모의 실험에서 검증했듯이 제안된 제어기는 4 차 이상의 비홀로노믹 동적 시스템에 대한 제어 문제를 성공적으로 해결하였다.

참고문헌

- [1] Z. Li and J. F. Canny (eds), *Nonholonomic Motion Planning*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [2] I. Kolmanovsky and N. H. McClamroch, "Developments in nonholonomic control problems", *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 15, No. 6, pp. 20-36, Dec. 1995.
- [3] C. Y. Su, Y. Stepanenko and A. A. Goldberg, "Reduced order model and robust control architecture for mechanical systems with nonholonomic pfaffian constraints", *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics-Part B*, Vol. 29, No. 3, pp. 307-313, May 1999.
- [4] W. L. Xu and W. Hue, "Variable structure exponential stabilization of chained systems based on the extended nonholonomic integrator", *System & Control Letters*, Vol. 41, pp. 225-235, 2000.
- [5] J. M. Yang and J. H. Kim, "Sliding mode motion control of nonholonomic mobile robots", *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 19, No. 2, pp. 15-23, Apr. 1999.
- [6] J. M. Yang and J. H. Kim, "Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots", *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 15, No. 3, pp. 578-587, June 1999.
- [7] W. Gao and J. C. Hung, "Variable structure control of nonlinear systems: a new approach", *IEEE Trans. Industrial Electronics*, Vol. 40, No. 1, pp. 44-55, Feb. 1993.
- [8] V. I. Utkin, *Sliding Modes and Their Applications*, Moscow, Russia:Mir, 1978.
- [9] N. Sarkar, X. Yun and V. Kumar, "Control of mechanical systems with rolling constraints: application to dynamic control of mobile robots", *International J. Robotics Researches*, Vol. 13, No. 1, pp. 55-69, Feb. 1994.
- [10] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems (2nd)*, Prentice -Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [11] J. J. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators", *International J. Control*, Vol. 32, No. 2, pp. 465-492, 1983.
- [12] A. M. Bloch, M. Reyhanoglu and N. H. McClamroch, "Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 3, No. 11, pp. 1746-1757, 1992.



양정민

1971년 3월 31일 생. 1993년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학사). 1995년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사). 1999년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사). 2001년 ~ 현재 대구가톨릭대학교 전자공학과 전임강사.

관심분야: 로봇 제어 및 초음파 모터 제어.