비선형 시스템에 대한 T-S 퍼지 모델 구성

Construction of T-S Fuzzy Model for Nonlinear Systems

정 은 태, 권 성 하, 이 갑 래
(Eun Tae Jeung, Sung-Ha Kwon and Kap Rai Lee)

Abstract : Two methods of constructing T-S fuzzy model which is equivalent to a given nonlinear system are presented. The first method is to obtain an equivalent T-S fuzzy model by using the sum of linearly independent scalar functions with constant real matrix coefficients. The sum of products of linearly independent scalar functions is used in the second method. The former method is to formulate the procedures of T-S fuzzy modeling dealt in many examples of previous publications; the latter is a new method. By comparing the number of linearly independent functions used in the two methods, we can easily find out which method makes fewer rules than the other. The nonlinear dynamics of an inverted pendulum on a cart is used as an equivalent T-S fuzzy modeling example.

Keywords : nonlinear system, T-S fuzzy model, linear independence

I. 서론

후반부에 선형 시스템을 가지는 Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지 시스템[1]에 대한 안정성 해석과 체계적인 제어기 설계에 관한 연구가 많은 관심을 받고 있다. 특히, Wang 등[2]이 제안한 병렬분산보상(PDC: parallel distributed compensation)의 개념과 Gahinet 등[3]이 개발한 선형행렬부등식(LMI: linear matrix inequality) 셈틀(toolbox)의 덕분으로 T-S 퍼지 시스템에 대한 연구가 더욱 활성화되었고, 많은 연구 결과도 발표되었다.[2],[4]-[16] T-S 퍼지 시스템에 대한 안정성 해석과 제어기 설계를 위해서는 여러 개의 선형행렬부등식을 만족하는 공통의 양정의 행렬을 찾아야 한다. 이러한 해를 찾는 셈틀로는 선형행렬부등식 셈틀이 강력하다고 잘 알려져 있다.

T-S 퍼지 시스템은 후반부에 선형 시스템을 가지고 있지만, 소속 함수(membership functions)의 영향으로 T-S 퍼지 시스템은 비선형 시스템으로 동작한다. 따라서 안정성 해석에 못지 않게 중요한 주제가 '어떻게 T-S 퍼지 모델을 얻느냐?'이다. 여기에는 크게 두 가지 방법이 있다. 하나는 시스템의 입력-출력 데이터로부터 T-S 퍼지 모델을 얻는 것[4]-[7]이고, 다른 하나는 주어진 비선형 시스템의 모델로부터 T-S 퍼지 모델을 얻는 것이다. 후자의 경우에 대한 T-S 퍼지 모델링은 여러 논문[8]-[16]의 예제에서 찾아 볼 수 있다. [2], [8]-[10] 논문의 예제에서 사용한 T-S 퍼지 모델은 비선형 시스템을 근사화한 모델을 사용한 반면, [11]-[15] 논문의 예제에서 사용한 것은 비선형 시스템과 등가인 T-S 퍼지 모델을 사용하였다. Taniguchi 등[16]은 비선형 시스템으로부터 등가인 T-S 퍼지 모델을 찾는 체계적인 한 방법을 제시하였다. 그들의 방법은 비선형 시스템의 $(i,\ j)$번째 비선형 요소로부터 퍼지 규칙을 만들어 낸다. 이는 [11] -[15]의 예제에서 사용한 방법들을 모두 설명하지는 못한다.

논문접수 : 2001. 12. 29., 채택확정 : 2002. 9. 3.
정은태 : 창원대학교 제어계측공학과(jet26@sarim.changwon.ac.kr)
권성하 : 창원대학교 제어계측공학과(shkwon@sarim.changwon.ac.kr)
이갑래 : 평택대학교 정보과학부(krlee@ptuniv.ac.kr)

따라서 Taniguchi 등의 방법은 필요 이상으로 많은 수의 퍼지 규칙을 만들어 낼 수도 있다. 예를 들면, $(i,\ j)$번째 요소와 $(k,\ l)$번째 요소가 같은 비선형 함수를 가진다고 하면, 2개의 퍼지 규칙으로 이 비선형 함수를 표현할 수 있음에도 불구하고, 그들의 방법은 4개의 퍼지 규칙을 만든다.

본 논문은 주어진 비선형 시스템과 등가인 T-S 퍼지 시스템을 만드는 두 가지 방법을 제시한다. 첫 번째 방법은 [11]-[15]의 예제에서 사용한 방법들을 정리한 것으로, 비선형 시스템이 가지고 있는 스칼라(scalar) 비선형 함수로부터 선형독립인 함수를 선택하여, 이 함수들로부터 T-S 퍼지 모델을 만든다. 이는 Taniguchi 등이 제시한 방법과 거의 유사한 방법이지만, Taniguchi 등의 방법을 일반화한 것이라 볼 수 있다. 두 번째 방법은 주어진 비선형 시스템을 선형독립인 함수들의 곱의 합으로 표현하여, 또 다른 T-S 퍼지 모델링 방법을 제시한다.

II. T-S 퍼지 모델과 Taniguchi 등의 모델링 방법

이 장에서는, T-S 퍼지 모델과 Taniguchi 등에 의해서 제안된 T-S 퍼지 모델링 방법을 알아본다.

1. T-S 퍼지 모델

일반적으로, T-S 퍼지 모델은

$$\begin{aligned} &\text{Rule } i : \text{ IF } z_1 \text{ is } M_{i1} \ \& \ \cdots \ \& \ z_p \text{ is } M_{ip} \\ &\quad \text{THEN } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ &\quad\quad i = 1, 2, \cdots, r \end{aligned} \tag{1}$$

와 같이 표현하고, 여기서 M_{ij}는 퍼지 집합이고 r은 퍼지 규칙의 수이다. $x(t) \in \mathbf{R}^n$는 상태 벡터, $u(t) \in \mathbf{R}^m$는 입력 벡터이고, A_i와 B_i는 적절한 차원을 가지는 상수 행렬이다. 그리고 $z = [z_1\ z_2 \cdots z_p]$는 측정 가능한 전반부의 변수이고, 이 변수들은 상태, 외란, 혹은 시간의 함수일 수 있다.

주어진 $[x, u, z]$로부터, 무게 중심법(the center of gravity)을 이용하여 추론된 T-S 퍼지 시스템의 최종적인 상태는

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[A_i x(t) + B_i u(t)] \tag{2}$$

이고, 여기서

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))}$$
$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij}(z_j(t))$$

이고, $M_{ij}(z_j(t))$는 $z_j(t)$가 M_{ij}에 속하는 소속 등급을 의미한다. 그리고 모든 t에 대하여

$$w_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$
$$\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) > 0$$

을 만족한다고 가정하면, 모든 t에 대하여

$$h_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r$$
$$\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1$$

이다.

2. Taniguchi 등의 T-S 퍼지 모델링 방법[16]

Taniguchi 등은 비선형 시스템

$$\dot{x}(t) = F(z(t))\eta(t) \tag{3}$$

을 고려하였다. 여기서 $\eta^T(t) = [x^T(t) \ u^T(t)]^T$ 이고, 행렬 함수 $F(z(t))$는

$$F(z(t)) = \begin{bmatrix} f_{11}(z(t)) & f_{12}(z(t)) & \cdots & f_{1(n+m)}(z(t)) \\ f_{21}(z(t)) & f_{22}(z(t)) & \cdots & f_{2(n+m)}(z(t)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(z(t)) & f_{n2}(z(t)) & \cdots & f_{n(n+m)}(z(t)) \end{bmatrix}$$

이고, $f_{ij}(z(t))$는 $F(z(t))$의 (i, j)번째 요소이다. 비선형 시스템 (3)을 T-S 퍼지 모델로 정확히 표현하기 위해서 Taniguchi 등이 제안한 모델은

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+m}\sum_{k=0}^{1} h_{ijk}(z(t))\, a_{ijk} U_{ij}^F \eta(t) \tag{4}$$

이고, 여기서

$$h_{ij0}(z(t)) = \begin{cases} \dfrac{a_{ij1} - f_{ij}(z(t))}{a_{ij1} - a_{ij0}}, & a_{ij0} \neq a_{ij1} \\ 1/2, & a_{ij0} = a_{ij1} \end{cases}$$
$$h_{ij1}(z(t)) = \begin{cases} \dfrac{f_{ij}(z(t)) - a_{ij0}}{a_{ij1} - a_{ij0}}, & a_{ij0} \neq a_{ij1} \\ 1/2, & a_{ij0} = a_{ij1} \end{cases} \tag{5}$$
$$a_{ij0} = \min_{z(t)}\{f_{ij}(z(t))\}$$
$$a_{ij1} = \max_{z(t)}\{f_{ij}(z(t))\}$$

이고, U_{ij}^F는 (i, j)번째 요소가 '1'이고 나머지 요소들은 모두 '0'이고 $F(z(t))$와 같은 차원을 가지는 상수 행렬이다. 즉,

$$U_{ij}^F = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & i^{th} \\ \quad\quad\quad\quad j^{th} & \end{array}$$

이다. $F(z(t))$의 어떤 요소들이 상수항을 가진다할 지라도, (4)의 표현은 마치 $2^{n\cdot(n+m)}$개의 퍼지 규칙을 만들어 내는 것처럼 보인다. 그래서 집합 S를

$$S = \{(i, j) \mid f_{ij}(z(t)) \neq \text{상수함수}\}$$

와 같이 정의하고, n_S를 집합 S의 원소들의 개수라 두고 s_l을 집합 S의 l번째 원소라 두면, (4)는

$$\dot{x}(t) = F_0\eta(t) + \sum_{l=1}^{n_S}\sum_{k=0}^{1} h_{s_l k}(z(t))\, a_{s_l k} U_{s_l}^F \eta(t) \tag{6}$$

와 같이 표현되어 진다. 여기서 모든 $l = 1, 2, \cdots, n_S$에 대하여

$$h_{s_l 0}(z(t)) = \frac{a_{s_l 1} - f_{s_l}(z(t))}{a_{s_l 1} - a_{s_l 0}}$$
$$h_{s_l 1}(z(t)) = \frac{f_{s_l}(z(t)) - a_{s_l 0}}{a_{s_l 1} - a_{s_l 0}} \tag{7}$$

이고

$$F_0 = \sum_{(i, j)\in \bar{S}} f_{ij} U_{ij}^F$$

$$\bar{S} = \{(i, j) \mid f_{ij}(z(t)) = \text{상수함수}\}.$$

이다. 따라서 (6)으로부터 주어진 비선형 시스템을 정확히 표현하는 T-S 퍼지 모델의 퍼지 규칙이 몇 개가 필요한지 쉽게 알 수 있다. 즉, 퍼지 규칙의 수는 2^{n_S}이다. (6)의 표현은 (4)와 등가이므로, (2)와 같은 T-S 퍼지 모델을 얻기 위하여 본 논문에서는 (6)의 형태를 사용할 것이다. 비선형 시스템 (6)과 T-S 퍼지 모델

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) F_i \eta(t) \\ &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[A_i x(t) + B_i u(t)]\end{aligned} \tag{8}$$

은 등가이다. 여기서 모든 $i = 1, 2, \cdots, r$에 대해

$$r = 2^{n_S},$$
$$h_i(z(t)) = \prod_{l=1}^{n_S} h_{s_l i_l}(z(t))$$
$$F_i = F_0 + \sum_{l=1}^{n_S} a_{s_l i_l} U_{s_l i_l}^F \tag{9}$$
$$[A_i \ B_i] = F_i$$

이고, i_l은 $(i-1)$을 n_S개의 자리 수를 가지는 2진수로 표현한 2진수의 l번째 자리의 2진수이다. T-S 퍼지 모델

(8)은 비선형 시스템 (3)을 정확히 표현한다. 그러나 비선형 함수 $f_{s_l}(l = 1, 2, \cdots, n_S)$이 선형종속인 경우에는 Taniguchi 등이 제시한 방법은 필요 이상으로 많은 퍼지 규칙을 만들어 낸다. 이러한 경우를 다음의 예에서 살펴본다.

예제 1 : 비선형 시스템

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= [10 - \cos x_1(t)]\sin x_1(t) \\
&\quad + [\cos x_1(t)]x_2(t) - 2[\cos x_1(t)]u(t)
\end{aligned} \tag{10}
$$

을 고려한다. 여기서 x_1의 동작 범위를 [-π/3, π/3]으로 제한한다. Taniguchi 등이 제시한 방법에 따라

$$
\begin{aligned}
f_{21}(z(t)) &= [10 - \cos x_1(t)]\frac{\sin x_1(t)}{x_1(t)} \\
f_{22}(z(t)) &= \cos x_1(t) \\
f_{23}(z(t)) &= -2\cos x_1(t)
\end{aligned}
$$

와 같이 비선형 요소를 선택하면, (8)과 (9)로부터 8 개의 퍼지 규칙이 만들어진다. 그러나 $f_{23}(z(t))$가 $f_{22}(z(t))$에 선형종속이므로, 비선형 시스템 (10)을

$$
\dot{x}(t) = [F_0 + f_1(z(t))F_1 + f_2(z(t))F_2]\eta(t) \tag{11}
$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서

$$
f_1 = (10 - \cos x_1)\frac{\sin x_1}{x_1}, \quad f_2 = \cos x_1,
$$

$$
\eta(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \qquad F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}
$$

이다. (11)의 표현이 (2)와 같은 T-S 퍼지 모델로 바꿀 수 있다면, 4 개의 퍼지 규칙이 만들어 질 것이다. 이에 관한 것은 III장에서 다룬다. ■

III. T-S 퍼지 모델링을 위한 새로운 방법

이 장에서는 비선형 시스템과 등가인 T-S 퍼지 모델을 얻는 두 가지 방법을 제시한다. 먼저 선형독립인 함수들로부터 T-S 퍼지 모델을 얻는 방법을 설명한다. 이것은 Taniguchi 등이 제시한 방법과 유사하다. 차이점은 비선형 시스템의 (i, j) 번째 비선형 함수로부터 T-S 퍼지 모델을 찾는 것이 아니라, 비선형 시스템의 모든 비선형 함수들 중에 선형독립인 것만을 선택하여 T-S 퍼지 모델을 구한다. 즉, 이 방법은 Taniguchi 등이 제시한 방법을 개선한 것으로 볼 수 있다. 두 번째 방법은 비선형 시스템을 선형독립인 함수들의 곱의 합으로 표현하여 T-S 퍼지 모델을 구한다. 첫 번째 방법과 차이점은 첫 번째 방법은 비선형 시스템을 선형독립인 함수들의 합으로 표현한다는 것이다. 이 장의 끝에서는 어느 방법이 더 적은 퍼지 규칙을 만들어 내는지에 대하여 알아본다.

1. Taniguchi 등의 T-S 퍼지 모델링의 개선된 방법

비선형 시스템 (3)을

$$
\dot{x}(t) = \left[F_0 + \sum_{i=1}^{q} f_i(z(t))F_i\right]\eta(t) \tag{12}
$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서 F_0는 $F(z(t))$와 같은 차원을 가지고 $F(z(t))$의 상수항들만 모아 놓은 행렬이고, $f_i(z(t))(i = 1, 2, \cdots, q)$는 상수항을 제외한 $F(z(t))$가 가지고 있는 선형독립인 비선형 함수들이고, F_i는 $f_i(z(t))$의 계수(coefficient) 행렬이다. 비선형 시스템 (12)는

$$
\dot{x}(t) = \left[F_0 + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=0}^{1} h_{ij}(z(t))\, f_{ij}F_i\right]\eta(t) \tag{13}
$$

와 등가이며, 모든 $i(i = 1, 2, \cdots, q)$에 대해

$$
\begin{aligned}
h_{i0}(z(t)) &= \frac{f_{i1} - f_i(z(t))}{f_{i1} - f_{i0}} \\
h_{i1}(z(t)) &= \frac{f_i(z(t)) - f_{i0}}{f_{i1} - f_{i0}} \\
f_{i0} &= \min_{z(t)}\{f_i(z(t))\} \\
f_{i1} &= \max_{z(t)}\{f_i(z(t))\}
\end{aligned} \tag{14}
$$

이다. 또한 비선형 시스템 (13)과 등가인 T-S 퍼지 모델은

$$
\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[A_ix(t) + B_iu(t)] \tag{15}
$$

이며, 모든 $i(i = 1, 2, \cdots, r)$에 대해

$$
\begin{aligned}
r &= 2^q, \\
h_i(z(t)) &= \prod_{j=1}^{q} h_{ji_j}(z(t)), \\
[A_i\ B_i] &= F_0 + \sum_{j=1}^{q} f_{ji_j}F_j
\end{aligned} \tag{16}
$$

이고, i_j는 $(i-1)$을 q개의 자리 수를 가지는 2진수로 표현한 2진수의 j번째 자리의 2진수이다. (14)와 (16)로부터, 모든 t에 대하여

$$
h_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r
$$
$$
\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1
$$

임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 (15)의 T-S 퍼지 모델은 (2)의 T-S 퍼지 모델과 같은 성질을 가진다.

예제 2 : 예제 1에서 고려한 비선형 시스템 (10)에 대하여 이 절의 방법을 적용하면, (11), (15), (16)으로부터 4개의 퍼지 규칙을 가지는 T-S 퍼지 모델이 만들어진다.

참고 1 : 예제 1과 2에서 알아보았듯이, 개선된 방법은 Taniguchi 등의 방법보다 적거나 같은 개수의 퍼지 규칙을 만들어 낸다. ■

2. 선형독립인 함수 곱의 합으로부터 T-S 퍼지 모델링

이 절에서는 T-S 퍼지 모델링의 두 번째 방법을 제시한다. 이 방법은 비선형 시스템을 선형독립인 함수의 곱의 합으로 표현하여 T-S 퍼지 모델을 얻는다.

비선형 시스템 (3)을

$$\dot{x}(t) = \left[F_0 + \sum_{i=1}^{w} f_i(z(t)) F_i\right]\eta(t) \tag{17}$$

와 같이 표현한다. 여기서

$$f_i(z(t)) = \prod_{j=1}^{v} g_j^{l_{ij}}(z(t)), \quad \forall\ i = 1, 2, \cdots, w \tag{18}$$

이고, v는 모든 $f_i(z(t))$를 (18)과 같이 표현할 때 필요한 최소의 선형독립인 함수 $g_j(z(t))$의 개수이다. 그리고 l_{ij}는 $f_i(z(t))$가 $g_j(z(t))$의 항을 가지고 있으면 '1'이고, 그렇지 않으면 '0'이다. (12)와 (17)은 같은 표기법을 사용하고 있지만, 같은 것은 아니다. 이에 대한 차이점은 4장의 예제에서 볼 수 있다. 그리고 비선형 시스템 (3)을 (17)의 표현으로 변환하는 것은 항상 가능하다. (18)을 (17)에 대입하면

$$\dot{x}(t) = \left[F_0 + \sum_{i=1}^{w}\prod_{j=1}^{v} g_j^{l_{ij}}(z(t)) F_i\right]\eta(t) \tag{19}$$

이고, (19)는

$$\dot{x}(t) = \left[F_0 + \sum_{i=1}^{q}\prod_{j=1}^{v}\sum_{k=0}^{1} h_{jk}(z(t))\, g_{jk}^{l_{ij}} F_i\right]\eta(t) \tag{20}$$

와 등가이다. 여기서 모든 $j = 1, 2, \cdots, v$에 대해

$$\begin{aligned} h_{j0}(z(t)) &= \frac{g_{j1} - g_j(z(t))}{g_{j1} - g_{j0}} \\ h_{j1}(z(t)) &= \frac{g_j(z(t)) - g_{j0}}{g_{j1} - g_{j0}} \\ g_{j0} &= \min_{z(t)}\{g_j(z(t))\}, \\ g_{j1} &= \max_{z(t)}\{g_j(z(t))\} \end{aligned} \tag{21}$$

이다. (19)와 (20)이 등가임을 증명하는 것은 모든 $j = 1, 2, \cdots, v$에 대하여

$$g_j^{l_{ij}}(z(t)) = \sum_{k=0}^{1} h_{jk}(z(t))\, g_{jk}^{l_{ij}} \tag{22}$$

$$\sum_{k=0}^{1} h_{jk}(z(t)) = 1 \tag{23}$$

임을 보이면 된다. (23)은 (21)로부터 쉽게 알 수 있고, (22)는

$$\begin{aligned} g_j^{l_{ij}}(z(t)) &= [h_{j0}(z(t))g_{j0} + h_{j1}(z(t))g_{j1}]^{l_{ij}} \\ &= \begin{cases} h_{j0}(z(t))g_{j0} + h_{j1}(z(t))g_{j1}, & l_{ij} = 1 \\ 1\ (= h_{j0}(z(t)) + h_{j1}(z(t))), & l_{ij} = 0 \end{cases} \\ &= h_{j0}(z(t))g_{j0}^{l_{ij}} + h_{j1}(z(t))g_{j1}^{l_{ij}} \end{aligned}$$

으로부터 증명된다. (20)을 T-S 퍼지 모델로 표현하면

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\,[A_i x(t) + B_i u(t)] \tag{24}$$

이다. 여기서 모든 $i = 1, 2, \cdots, r$에 대하여

$$\begin{aligned} r &= 2^{v}, \\ h_i(z(t)) &= \prod_{k=1}^{v} h_{k i_k}(z(t)), \\ [A_i\ B_i] &= F_0 + \sum_{j=1}^{q}\prod_{k=1}^{v} g_{k i_k}^{l_{jk}} F_j \end{aligned} \tag{25}$$

이고, i_k는 $(i-1)$을 v개의 자리 수를 가지는 2진수로 표현한 2진수의 k번째 자리의 2진수이다. (21)과 (25)로부터, 모든 t에 대하여

$$h_i(z(t)) \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r$$
$$\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1$$

임을 쉽게 알 수 있다.

참고 2 : III.1절과 III.2절의 방법은 각각 2^q과 2^v개의 퍼지 규칙을 가지는 T-S 퍼지 모델을 만든다. 따라서 q와 v를 비교함으로써 어느 방법이 적은 퍼지 규칙을 만드는지 알 수 있다. ■

예제 3 : III.2절의 방법에 대한 예로 비선형 시스템

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1^2(t) + x_2^2(t) + [10 + x_1(t)x_2(t)]\,u(t) \end{aligned} \tag{26}$$

을 고려한다. 여기서 시스템의 동작 영역을 $-3 \le x_i(t) \le 3$ $(i = 1, 2)$으로 한다. 비선형 시스템 (26)의 비선형 항들을

$$\begin{aligned} f_1(z(t)) &= x_1(t) \\ f_2(z(t)) &= x_2(t) \\ f_3(z(t)) &= x_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

으로 선택하고, $f_1(z(t))$, $f_2(z(t))$, $f_3(z(t))$가 $x_1(t)$와 $x_2(t)$의 항으로 표현되어 있으므로 $g_1(z(t))$와 $g_2(z(t))$를

$$\begin{aligned} g_1(z(t)) &= x_1(t) \\ g_2(z(t)) &= x_2(t) \end{aligned}$$

으로 선택하면

$$\begin{aligned} f_1(z(t)) &= g_1(z(t)), \\ f_2(z(t)) &= g_2(z(t)), \\ f_3(z(t)) &= g_1(z(t))\, g_2(z(t)), \end{aligned}$$

이므로

$$l_{11} = l_{22} = l_{31} = l_{32} = 1,\ l_{12} = l_{21} = 0$$

이다. 그러므로 (24)와 (25)로부터 4개의 퍼지 규칙을 가지는 T-S 퍼지 모델이 만들어진다. 그러나 III.1의 방법을 사용하면, 선형독립인 함수가 3개($f_1(z(t))$, $f_2(z(t))$, $f_3(z(t))$)이므로 8개의 퍼지 규칙을 만든다. 그러므로, (26)에 대한 T-S 퍼지 모델은 III.2절의 방법을 사용하는 것이 적은 퍼지 규칙을 만드는 관점에서 더 좋은 방법이라 할 수 있다. ■

IV. 예제

이 장에서는 역진자(inverted pendulum) 시스템에 대한 T-S 퍼지 모델을 Taniguchi 등의 방법과 본 논문에서 제시한 두 가지 방법으로 구하고, 각 방법에서 발생한 퍼지 규칙의 개수를 비교한다.

역진자 시스템에 대한 운동 방정식은

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= d(x_1)[(M+m)mgl\sin x_1 \\ &\quad - m^2l^2x_2^2\sin x_1\cos x_1 - f_p(M+m)x_2 \\ &\quad f_c mlx_4\cos x_1 - ml(\cos x_1)u] \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= d(x_1)[(J+ml^2)mlx_2^2\sin x_1 \\ &\quad - m^2gl^2\sin x_1\cos x_1 + f_p mlx_2\cos x_1 \\ &\quad - f_c(J+ml^2)x_4 + (J+ml^2)u] \end{aligned} \tag{27}$$

이고, 여기서

$$d(x_1) = 1/[(M+m)(J+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_1]$$

이고, x_1은 진자가 수직으로 서 있을 때를 기준으로 한 각도(rad), x_2는 진자의 각속도(rad/s), x_3는 운송차의 변위(m), x_4는 운송차의 속도(m/s)이다. 그리고 계수값들은 $g = 9.81$[m/s^2], $M = 2.4$[kg], $m = 0.23$[kg], $l = 0.36$ [m], $J = 0.099$[kgm^2], $f_c = 0.05$[N/m/s], $f_p = 0.007$ [N/rad/s]이다.

역진자 시스템은 $x_1 = \pm\pi/2$에서 제어불가능(uncontrollable)이고, $x_1(t)$가 $\pm\pi/2$로 접근함에 따라 굉장히 큰 제어 힘을 필요로 하는 시스템이다. 따라서 진자 각도의 범위를 $-\pi/3 \le x_1 \le \pi/3$으로 제한하고, 진자의 각속도의 범위를 $-7 \le x_2 \le 7$으로 하여, T-S 퍼지 모델을 구한다.

1. Taniguchi 등의 방법

(27)을 (3)의 형태로 표현하면

$$F(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_{21}(z) & f_{22}(z) & 0 & f_{24}(z) & f_{25}(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_{41}(z) & f_{42}(z) & 0 & f_{44}(z) & f_{45}(z) \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} f_{21}(z) &= g_1(z)[(M+m)mgl\,g_2(z) \\ &\quad - m^2l^2g_2(z)\,g_3(z)\,g_4(z)] \\ f_{22}(z) &= -f_p(M+m)\,g_1(z) \\ f_{24}(z) &= f_c ml\,g_1(z)\,g_3(z) \\ f_{25}(z) &= -ml\,g_1(z)\,g_3(z) \\ f_{41}(z) &= g_1(z)[(J+ml^2)ml\,g_2(z)\,g_4(z) \\ &\quad - m^2gl^2g_2(z)\,g_3(z)] \\ f_{42}(z) &= f_p ml\,g_1(z)\,g_3(z) \\ f_{44}(z) &= -f_c(J+ml^2)\,g_1(z) \\ f_{45}(z) &= (J+ml^2)\,g_1(z) \end{aligned}$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} g_1(z) &= d(x_1) \\ g_2(z) &= \mathrm{sinc}(x_1) = \begin{cases} \sin x_1/x_1, & x_1 \ne 0 \\ 1, & x_1 = 0 \end{cases} \\ g_3(z) &= \cos x_1 \\ g_4(z) &= x_2^2 \end{aligned}$$

이다. (28)은 8개의 비선형 함수를 가지고 있으므로, $2^8 = 256$개의 퍼지 규칙을 만들어 낸다.

2. III.1절의 방법

$f_{22}(z)$, $f_{44}(z)$, $f_{45}(z)$는 선형종속이고, $f_{24}(z)$, $f_{25}(z)$, $f_{42}(z)$ 또한 선형종속이다. 그러므로 (28)을 (12)의 형태로 표현하면

$$F(z) = F_0 + \sum_{i=1}^{4} f_i(z)\,F_i$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned} f_1(z) &= g_1(z)[(M+m)mgl\,g_2(z) \\ &\quad - m^2l^2g_2(z)\,g_3(z)\,g_4(z)] \\ f_2(z) &= g_1(z) \\ f_3(z) &= g_1(z)\,g_3(z) \\ f_4(z) &= g_1(z)[(J+ml^2)ml\,g_2(z)\,g_4(z) \\ &\quad - m^2gl^2g_2(z)\,g_3(z)] \end{aligned}$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&-f_p(M+m)&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-f_c(J+ml^2)&J+ml^2 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&f_c ml&-ml \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&f_p ml&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad F_4 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

이다. 그러므로 (15)와 (16)으로부터 $2^4 = 16$개의 퍼지 규칙이 만들어진다.

3. III.2절의 방법

(28)을 (17)의 형태로 표현하면

$$F(z) = F_0 + \sum_{i=1}^{6} f_i(z)\,F_i$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned} f_1(z) &= g_1(z) \\ f_2(z) &= g_1(z)\,g_2(z) \\ f_3(z) &= g_1(z)\,g_3(z) \\ f_4(z) &= g_1(z)\,g_2(z)\,g_3(z) \\ f_5(z) &= g_1(z)\,g_2(z)\,g_4(z) \\ f_6(z) &= g_1(z)\,g_2(z)\,g_3(z)\,g_4(z) \end{aligned}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&-f_p(M+m)&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-f_c(J+ml^2)&J+ml^2 \end{bmatrix},$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ mgl(M+m) & 0_{4\times4} \\ 0 & \\ 0 & \end{array}\right],$$

$$F_3 = ml\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&f_c&-1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&f_p&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad F_4 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & 0_{4\times4} \\ 0 & \\ -m^2gl^2 & \end{array}\right],$$

$$F_5 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & \\ 0 & 0_{4\cdot 4} \\ ml(J+ml^2) & \end{array}\right], \quad F_6 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ -m^2 l^2 & 0_{4\cdot 4} \\ 0 & \\ 0 & \end{array}\right]$$

이고, $0_{4\cdot 4}$는 4×4 영행렬을 의미한다. $f_i(z)(i = 1, 2, \cdots, 6)$를 (18)과 같이 표현할 수 있는 선형독립인 함수는 4개이므로, (24)와 (25)로부터 $2^4 = 16$개의 퍼지 규칙이 만들어진다.

V. 결론

본 논문은 주어진 비선형 시스템과 등가인 T-S 퍼지 모델을 만드는 두 가지 방법을 제시하였다. 첫 번째 방법은 비선형 시스템이 가지고 있는 스칼라(scalar) 비선형 함수로부터 선형독립인 함수를 선택하여, 이 함수들로부터 T-S 퍼지 모델을 만든 것이다. 이는 Taniguchi 등의 방법을 개선한 형태라 볼 수 있고, 또한 Tanaka 등의 논문의 예제에서 제시한 방법을 일반화하여 정리한 것이라 볼 수 있다. 그리고 두 번째 방법은 주어진 비선형 시스템을 선형독립인 함수들의 곱의 합으로 표현하여, 또 다른 T-S 퍼지 모델링 방법을 제시한 것이다. 비선형 시스템에 따라서, 첫 번째 방법이 적은 퍼지 규칙을 만들 수도 있고, 두 번째 방법이 그럴 수도 있기 때문에, 각각의 방법에서 사용된 선형독립인 함수의 개수를 먼저 비교하여 퍼지 규칙이 적게 발생하는 방법을 사용하는 것이 적은 퍼지 규칙을 가지는 T-S 퍼지 모델을 만든다.

참고문헌

[1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, Vol. 15, No. 1, pp. 116-132, 1985.

[2] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of Nonlinear systems: Stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol. 4, No. 1, pp. 14-23, Feb. 1996.

[3] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math Works Inc., 1995.

[4] S. Abe, "Fuzzy function approximators with ellipsoidal regions," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.-Part B: Cybernetics*, Vol. 29, No. 4, pp. 654-661, Aug. 1999.

[5] Q. Gan and C. J. Harris, "Fuzzy local linearization and local basis function expansion in nonlinear system modeling," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.-Part B: Cybernetics*, Vol. 29, No. 4, pp. 559-565, Aug. 1999.

[6] J. Abonyi, R. Babuska, and F. Szeifert, "Fuzzy modeling with multivariate membership functions: Gray-box identification and control design," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.-Part B: Cybernetics*, Vol. 31, No. 5, pp. 755-767, Oct. 2001.

[7] J. Yen, L. Wang, and C. W. Gillespie, "Improving the interpretability of TSK fuzzy models by combining global learning and local learning," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol. 6, No. 4, pp. 530-537, Nov. 1998.

[8] J. Joh, E. T. Jeung, W. J. Chung, and S.-H. Kwon, "A new design method for T-S fuzzy controller with pole placement constraints," *J. Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, Vol. 7, No. 3, pp. 72-80, Aug. 1997.

[9] X. - J. Ma and Z. - Q. Sun, "Output tracking and regula -tion of nonlinear system based on Takagi-Sugeno fuzzy model," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.-Part B: Cybernetics*, Vol. 30, No. 1, pp. 47-59, Feb. 2000.

[10] C.-S. Tseng, B.-S. Chen, H.-J. Uang, "Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol. 9, No. 3, pp. 381-392, June, 2001.

[11] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, H^∞ control theory, and linear matrix inequalities," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol. 4, No. 1, pp. 1-13, Feb. 1996.

[12] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based design," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol. 6, No. 2, pp. 250-265, May 1998.

[13] H. J. Lee, J. B. Park, and G. Chen, "Robust fuzzy control of Nonlinear systems with parametric uncertain -ties," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol. 9, No. 2, pp. 369-379, Apr. 2001.

[14] Kap Rai Lee, Jong Hae Kim, Eun Tae Jeung, and Hong Bae Park, "Output feedback robust H^∞ control of uncer -tain fuzzy dynamic systems with time-varying delay," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol. 8, No. 6, pp. 657-664, Dec. 2000.

[15] K. R. Lee, E. T. Jeung, and H. B. Park, "Robust fuzzy H^∞ control for uncertain nonlinear systems via state feedback: An LMI approach," *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. 120, pp. 123-134, May 2001.

[16] T. Taniguchi, K. Tanaka, H. Ohtake, and H. O. Wang, "Model construction, rule reduction, and robust compen-sation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol. 9, No. 4, pp. 525-538, Aug. 2001.

정 은 태

제어·자동화·시스템공학 논문지 제 3 권 제 2 호 참조.

권 성 하

제어·자동화·시스템공학 논문지 제 4 권 제 2 호 참조.

이 갑 래

1964년 11월 22일생. 경북대학교 전자공학과 공학사(1987). 동대학원 공학석사(1990). 공학박사(1999). 1990년~1995년 국방과학연구소 연구원. 1997년~2001년 두원공과대학 조교수. 2001년~현재 평택대학교 정보과학부 전임강사. 주관심분야는 지능제어 및 H_2/H_∞ 제어, 산업네트워크제어 및 필드버스 프로토콜 구현. 임베디드(embedded) 시스템 등임.