스트레스함수가 감마분포인 가속수명시험

- Accelerated Life Tests under Gamma Stress Distribution -

원 영 철*
Won Young Cheol

Abstract

This paper presents accelerated life tests for Type I censoring data under probabilistic stresses. Probabilistic stress, S, is the random variable for stress influenced by test environments, test equipments, sampling devices and use conditions. The hazard rate, Θ, is a random variable of environments and a function of probabilistic stress. In detail, it is assumed that the hazard rate is linear function of the stress, the general stress distribution is a gamma distribution and the life distribution for the given hazard rate, θ, is an exponential distribution. Maximum likelihood estimators of model parameters are obtained, and the mean life in use stress condition is estimated. A hypothetical example is given to show its applicability.

본 연구는 2002년도 선린대학 연구비 지원에 의해 수행되었음
* 선린대학 인터넷방송계열
*선린대학교

1. 서론

제품의 수명을 추정하면서 많은 시간과 비용을 소비한다면 불행한 일이며, 특히 고신뢰도의 제품은 수명시험의 결과를 파악하기도 전에 또다른 제품을 개발해야 할지도 모른다. 이러한 어려움을 극복하기 위한 방안으로 제품의 수명시험을 할 때 사용환경보다 더 가혹한 조건에서 수명시험을 하여 빠른 시간 내에 수명시험을 끝낼 수 있는 가속수명시험이 많이 이용되고 있다.

Singpurwalla[7]는 제품의 수명이 지수분포를 따르고 고장률과 스트레스와의 관계는 선형으로 가정할 경우 가속수명시험에서 정수 관측 중단 데이터를 이용하여 모수를 추정하고 추정량분포에 대한 통계적 추론을 하였고, [8, 9, 10]에서 고장률과 스트레스와의 관계를 보다 확장된 모델에 적용하였다. Nelson[2, 3, 4]은 그래프를 이용한 방법과 수치적인 방법으로 가속수명시험 데이터 분석을 하고 타당성을 검토하였다. 또한 스트레스를 단계적으로 높이면서 부과하는 방법[5], 스트레스를 연속적으로 높이면서 부과하는 방법[12], 제품의 고장률이 제품의 크기와 비례한다는 것을 고려하는 경우에 대하여 일정 스트레스를 부과하는 가속수명시험 최적 설계에 관한 연구[1], 제품의 정기검사를 가정하고 정시 관측 중단을 하는 경우에 대하여 최적 설계에 관한 연구[6, 13], 스트레스 확률분포가 균등분포인 경우의 가속수명시험에 대한 연구[11] 등이 있다.

본 논문에서는 사용환경에 있는 제품이 받는 스트레스가 확률적으로 변한다는 것과 가속수명시험을 할 때에 시험대상 제품이 받는 스트레스도 확률적으로 변하는 것이 같은 맥락이므로 이것을 고려하는 정시 관측 중단 가속수명시험 방법을 제안한다. 여기서 스트레스는 일정한 범위 내에서 확률적으로 변하는 것을 고려하여 이것을 표현하는 확률분포를 2모수 감마분포로 주어지고, 제품의 수명은 지수분포 그리고 스트레스와 고장률의 관계는 선형이라는 가정을 하였다.

2. 기호설명

S_j: 스트레스 수준 j를 나타내는 확률변수. 단, $S_j \sim g(s_j)$

$g(\cdot)$: 일반적인 분포

Θ_j: S_j와 함수관계를 가지며 고장률을 나타내는 확률변수

단, $\theta_j = h(s_j)$, $\Theta_j \sim g\{h^{-1}(\theta_j)\} \dfrac{h^{-1}(\theta_j)}{d\theta_j}$

T_{Θ_j}: Θ_j를 가지는 제품의 수명

$F_j(t)$, $R_j(t)$: S_j하에서의 분포함수, 신뢰도함수

t_{jp}: S_j하에서 고장시간의 제 $100p$ 백분위수

A: 알려지지 않은 모수

η: 관측 중단 시간

D_j: η에서 관측 중단 할 경우 j에서 고장난 제품 수의 확률변수

δ_{ji}: j에서 t_{ji}가 η보다 작거나 같으면 1, 그렇지 않으면 0

C_j: j에서 $\delta_{ji}=1$인 표본들의 집합

3. 수학적 모형

제품에 가해지는 스트레스는 일정하게 유지하려고 하지만 시험환경의 불안정으로 인하여 통제 불가능한 경우가 발생한다. 따라서 제품에 가해지는 스트레스를 확률변수 S로 나타낼 수 있다. 한편 제품에 가해지는 스트레스는 제품의 고장률에 영향을 주기 때문에 스트레스와 고장률 사이에 함수관계가 있을 것이다. 이 관계를 이용하면 스트레스분포를 알고 있는 경우 고장률분포를 결정할 수 있다. 그러므로 스트레스에 대한 고장분포함수를 유도해 낼 수 있다. 물론 스트레스가 확률변수이므로 고장률도 당연히 확률변수가 되며 스트레스의 확률밀도함수가 $g(s_j)$이고, 스트레스와 고장률 사이의 관계는 $\theta_j = h(s_j)$일 때 고장률에 대한 밀도함수는 $\Theta_j \sim g\{h^{-1}(\theta_j)\}\dfrac{h^{-1}(\theta_j)}{d\theta_j}$를 따른다는 것을 알 수 있다. 따라서 확률적 스트레스를 고려하는 제품의 고장시간에 대한 분포함수는 식 (1)처럼 된다.

$$F_j(t) = \int_0^\infty F(t\,|\,\theta_j) g\{h^{-1}(\theta_j)\} \frac{dh^{-1}(\theta_j)}{d\theta_j}\, d\theta_j \tag{1}$$

4. 확률적 스트레스를 고려한 가속수명시험

[가정]

① 고장률 θ_j를 가지는 제품의 수명은 지수분포를 이룬다.

즉, $F(t\,|\,\theta_j) = 1 - \exp(-\theta_j t)$

② $g(s_j)$는 감마분포를 이루며, 형태모수는 일정하다.

즉, $g(s_j) = \dfrac{{s_j}^{\alpha-1} e^{-s/\beta_j}}{{\beta_j}^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$

③ 고장률과 스트레스 사이의 관계는 선형이다. 즉, $\theta_j = A s_j$ ■

위의 가정에서 $j=0,1,2,\cdots,m$이며, 이때 $j=0$인 경우는 사용환경에서의 스트레스 수준을 나타낸다. 따라서 식 (1)에서 제품의 수명은 식 (2), (3), (4)와 같은 분포함수, 밀도함수, 기대값을 갖는다.

$$F_j(t)=1-\frac{1}{(A\beta_j t+1)^{\alpha}} \tag{2}$$

$$f_j(t)=\frac{A\alpha\beta_j}{(A\beta_j t+1)^{\alpha+1}} \tag{3}$$

$$E(T_j)=\frac{1}{A\beta_j(\alpha-1)} \tag{4}$$

또한 고장시간의 제 $100p$ 백분위수와 특정 시점 t_s에서의 신뢰도함수는 각각 식 (5), (6)과 같이 된다.

$$t_{jp}=\frac{1-(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}}{A\beta_j(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{5}$$

$$R_j(t_s)=\frac{1}{(A\beta_j t_s+1)^{\alpha}} \tag{6}$$

한편 사용환경보다 높은 m개의 스트레스 수준에서 각각 가속수명시험을 하는 경우 η에서 관측 중단을 고려할 때 η이전에 $D_j=d_j$개의 고장이 생겼다고 가정하면, 모수 A와 α에 대한 표본 n_j개의 관측치로 부터의 우도함수는 식 (7)처럼 되며, 이때 대수우도함수는 식 (8)과 같이 표현된다.

$$L(t\,;A,\alpha)=\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n_j}\left\{\frac{A\alpha\beta_j}{(A\beta_j t_{ji}+1)^{\alpha+1}}\right\}^{\delta_{ji}}\left\{\frac{1}{(A\beta_j\eta+1)^{\alpha}}\right\}^{1-\delta_{ji}} \tag{7}$$

$$\ln L(t\,;A,\alpha)=\sum_{j=1}^{m}\{\, r_j\ln A\alpha\beta_j-(\alpha+1)\sum_{i\in C_j}(A\beta_j t_{ji}+1) \\ -\alpha(n_j-r_j)\ln(A\beta_j\eta+1)\} \tag{8}$$

따라서 A와 α의 최대우도 추정량은 식 (7) 혹은 (8)을 최대화하는 경우의 $\hat{A}$, $\hat{\alpha}$이며, 하나의 관측에 대한 대수우도함수는 다음과 같다.

$$\ln L_{ji}(t\,;A,\alpha)=\delta_{ji}\{\ln A\alpha\beta_j-(\alpha+1)(A\beta_j t_{ji}+1)\}-(1-\delta_{ji})\alpha\ln(A\beta_j\eta+1) \tag{9}$$

식 (9)에서 모수들에 대한 1차 편미분식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial\ln L_{ji}(t\,;A,\alpha)}{\partial A}=\delta_{ji}\left\{\frac{1}{A}-\frac{(\alpha+1)\beta_j t_{ji}}{A\beta_j t_{ji}+1}\right\}-(1-\delta_{ji})\frac{\alpha\beta_j\eta}{A\beta_j\eta+1} \tag{10}$$

$$\frac{\partial\ln L_{ji}(t\,;A,\alpha)}{\partial\alpha}=\delta_{ji}\left\{\frac{1}{\alpha}-\ln(A\beta_j t_{ji}+1)\right\}-(1-\delta_{ji})\ln(A\beta_j\eta+1) \tag{11}$$

또한 식 (10), (11)에서 모수들에 대한 2차 편미분식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2\ln L_{ji}(t\,;A,\alpha)}{\partial A^2}=-\delta_{ji}\left\{\frac{1}{A^2}-\frac{(\alpha+1)\,\beta_j^2\,t_{ji}^2}{(A\beta_j t_{ji}+1)^2}\right\}+(1-\delta_{ji})\frac{\alpha\,\beta_j^2\eta^2}{(A\beta_j\eta+1)^2} \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_{ji}(t\,;A,\alpha)}{\partial \alpha^2} = -\delta_{ji}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_{ji}(t\,;A,\alpha)}{\partial A\ \partial \alpha} = -\delta_{ji}\left(\frac{\beta_j t_{ji}}{A\beta_j t_{ji}+1}\right) - (1-\delta_{ji})\frac{\beta_j \eta}{A\beta_j \eta + 1} \tag{14}$$

피셔정보행렬(Fisher information matrix)을 얻기 위하여 식 (12), (13), (14)에 각각 음수를 하여 기대값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} I_{AA,ji} &= E\left\{-\frac{\partial^2 \ln L(t\,;A,\alpha)}{\partial A^2}\right\} \\ &= \frac{\alpha}{A^2(\alpha+2)} + \frac{\alpha}{A^2}\frac{1}{(A\beta_j\eta+1)^{\alpha}} - \frac{2\alpha}{A^2}\frac{1}{(A\beta_j\eta+1)^{\alpha+1}} \\ &\qquad + \left\{\frac{\alpha(\alpha+1)}{A^2(\alpha+2)} - \alpha\,\beta_j^2\eta^2\right\}\frac{1}{(A\beta_j\eta+1)^{\alpha+2}} \end{aligned} \tag{15}$$

$$I_{\alpha\alpha,ji} = E\left\{-\frac{\partial^2 \ln L(t\,;A,\alpha)}{\partial \alpha^2}\right\} = \frac{1}{\alpha^2}\left\{1-\frac{1}{(A\beta_j\eta+1)^{\alpha}}\right\} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} I_{A\alpha,ji} &= E\left\{-\frac{\partial^2 \ln L_{ji}(t\,;A,\alpha)}{\partial A\ \partial \alpha}\right\} \\ &= \frac{1}{A}\left\{1-\frac{1}{(A\beta_j\eta+1)^{\alpha}}\right\} + \frac{\beta_j\eta}{(A\beta_j\eta+1)^{\alpha+1}} \\ &\qquad - \frac{\alpha}{A(\alpha+1)}\left\{1-\frac{1}{(A\beta_j\eta+1)^{\alpha+1}}\right\} \end{aligned} \tag{17}$$

위 식들에 의하여 피셔정보행렬(Fisher information matrix)은 다음과 같이 표현된다.

$$I = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} I_{AA,ji} & \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} I_{A\alpha,ji} \\ \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} I_{\alpha A,ji} & \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} I_{\alpha\alpha,ji} \end{bmatrix} \tag{18}$$

표본이 충분히 클 때 ($\hat{A}$, $\hat{\alpha}$)은 평균이 (A,α)이고, 공분산행렬이 I^{-1}인 이변량정규분포로 근사한다. 따라서 $\hat{A}$은 평균이 A이고, 분산이 $AsVar(A)$인 정규분포에 근사하므로 A의 100(1- γ)% 신뢰구간은 식 (19)로 표현되며, α의 100(1- γ)% 신뢰구간 또한 이와 비슷하게 구할 수 있다.

$$\hat{A} \pm z_{1-\frac{\gamma}{2}}\sqrt{AsVar(\hat{A})} \tag{19}$$

$\alpha=\hat{\alpha}$인 경우에 대하여 식 (19)의 상한과 하한을 각각 U, L로 나타낸다고 하면 $E(T_j)$, $R_j(t_s)$, t_{jp}의 100(1- γ)% 신뢰구간은 식 (20), (21), (22)로 표현된다.

$$\frac{1}{U(\alpha-1)\beta_j} \le E(T_j) \le \frac{1}{L(\alpha-1)\beta_j} \tag{20}$$

$$\frac{1}{(U\beta_j t_s+1)^{\alpha}} \le R_j(t_s) \le \frac{1}{(L\beta_j t_s+1)^{\alpha}} \tag{21}$$

$$\frac{1-(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}}{U\beta_j(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}} \le t_{jp} \le \frac{1-(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}}{L\beta_j(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{22}$$

스트레스분포의 척도모수인 β_j는 축적된 기술이나 과거의 데이터 등으로 미리 알 수 있는 것으로 가정하였으며, 이것은 가속수명시험에서 흔히 말하는 스트레스 수준들을 결정하는 것이다. 만약 m수준의 스트레스를 사용한다면 β_j의 값은 각각 m개를 미리 정하는 것과 같다. 따라서 가속수명시험 데이터를 이용하여 모수를 추정하고 이 값을 이용하여 사용환경에서 확률적 스트레스를 고려하는 제품의 평균수명을 추정할 수 있다.

제품의 수명분포가 지수분포를 따르고 스트레스가 $\alpha\beta_j$로 일정한 경우의 분포함수와 기대값은 각각 $F_j(t)=1-\exp(-A\alpha\beta_j t)$, $E(T_j)=\frac{1}{A\alpha\beta_j}$로 주어지는데, 이것을 스트레스와 고장률 사이의 관계가 선형이고 스트레스분포가 감마분포를 따르는 확률적 스트레스하에서의 분포함수와 기대값인 식 (2)와 식 (4)와 비교하면 다음과 같다.

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha\to\infty} F_j(t) = \operatorname*{Lim}_{\alpha\to\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(\frac{AKt}{\alpha}+1\right)^{\alpha}}\right\} = 1-\exp(-AKt) \tag{23}$$

단, $\alpha\beta_j=K$ (: 상수), $\operatorname*{Lim}_{\alpha\to\infty}\left(\frac{x}{n}+1\right)^{\alpha}=\exp(x)$

식 (2)에서 $\alpha=\infty$인 경우 스트레스분포인 감마분포가 degenerate 분포가 되고 위의 식 (23)이 되는 것을 알 수 있으며, 또한 식 (4)도 $\alpha=\infty$인 경우에 스트레스가 $\alpha\beta_j$로 일정한 경우의 기대값이 되는 것을 알 수 있다.

5. 예제

전압과 관련하여 발생하는 여러 요인에 의해 온도가 높아지므로 해서 수명에 영향을 주는 어떤 제품이 있다고 하자. 이 제품은 온도가 수명에 직접적인 영향을 주며 온도를 기준으로 하여 가혹조건을 부가할 수 있다고 가정한다. 제품의 수명은 지수분포를 따르고 이 제품이 받는 스트레스 분포는 형태모수 α, 척도모수 β_j인 감마분포로 설명되는 $m=2$인 경우를 살펴보자. 표 1의 자료는 스트레스 s_1, s_2가 각각 0.2~0.5, 0.6~0.9 천℃에서 확률적으로 변하는 것을 고려하고, 이것을 척도모수 β_j, $j=1,2$, 는 각각 2.247, 3.494 천℃, 형태모수 α인 감마분포로 나타낼 수 있다고 가정하고, 제품의 수명이 평균 $\frac{1}{As_j}$인 지수분포를 따를 때, A는 1.24, n_1, n_2 각각 30개를 1600시간에서 관측 중단 가속수명시험하는 것을 시뮬레

이션하여 얻은 d_1, d_2가 각각 17, 21개인 경우이다.

표 1. 고장시간 데이터, 단위: 천시간

t_{1i}	t_{2i}
1.10185, 1.03534, 0.31573, 1.14791, 1.46774, 1.55301, 0.99681, 1.18731, 0.84509, 0.18255, 1.54660, 0.47930, 0.91287, 1.22211, 0.05398, 1.11936, 0.92575	0.22626, 0.57254, 1.54546, 0.65327, 1.23610, 1.29911, 0.52760, 0.49182, 0.97832, 0.53519, 0.27719, 0.33939, 0.43853, 0.74192, 0.10135, 0.01538, 0.55558, 0.16045, 0.41740, 0.31570, 1.36205

A와 α의 최대우도 추정치는 식 (7)혹은 (8)을 최대화하는 경우로 NLP 소프트웨어인 GINO를 이용하여 구해보면 $\hat{A}$은 1.235, $\hat{\alpha}$은 1.272로 주어진다. 사용조건에서 스트레스 분포의 척도모수는 $\beta_0=0.6$ 천℃로 알려진 경우에 식 (4)를 이용하여 $\widehat{E(T_0)}$을 구해보면 4.96150 천시간이 되고, 식 (5)를 이용하여 $\widehat{t_{0p}}$, $p=0.75$인 제 75 백분위수를 구해보면 2.66375 천시간이 되며, $R_0(t_s)$, $t_s=2.5$ 천시간에서의 신뢰도함수를 점추정하면 0.45647이 된다. 식 (18)에 A와 α의 최우추정치를 대입한 피셔정보행렬(Fisher information matrix)의 추정치 $\hat{I}$과 점근공분산행렬 $\hat{I}^{-1}$는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{I}=\begin{bmatrix} 31.8285 & 21.0579 \\ 21.0579 & 33.5961 \end{bmatrix}, \quad \hat{I}^{-1}=\begin{bmatrix} 0.05368 & -0.03365 \\ -0.03365 & 0.05085 \end{bmatrix}$$

또한 식 (19)를 이용하여 A의 95% 신뢰구간을 구해보면 (0.78089, 1.68911)이 되며, $E(T_0)$, 일정시점 $t_s=2.5$ 천시간에서의 $R_0(t_s)$와 $p=0.75$에서 t_{0p}의 95% 신뢰구간은 식 (20), (21), (22)에 의해 각각 (3.62762, 7.84675), (0.30650, 0.81778), (1.94761, 4.21280)이 된다.

6. 결론

본 논문은 시험대상 제품이 확률적 스트레스를 받는다는 것을 고려하는 경우의 정시 관측중단 가속수명시험 방법을 제안하였다. 스트레스가 통제 불가능하여 어떤 범위 내에서 확률적으로 변한다는 경우에 대하여 2모수 감마분포로 표현할 수 있다는 가정을 하였는데, 감마분포의 척도모수는 스트레스 수준을 결정하는 것으로 축적된 기술이나 과거의 데이터 등으로 미리 알 수 있다는 가정을 하였고, 형상모수는 현재의 가속수명시험 데이터를 이용하여 추정할 수 있다. 제품의 고장분포는 지수분포를 따르고 고장률과 스트레스 사이의 관계는 선형으로 가정하여 최대우도법으로 모수를 추정하는 방법을 제안하고 수치예제를 살펴보았다.

7. 참고문헌

[1] Bai, D. S. and H. J. Yun, "Accelerated Life Tests for Products of Unequal Size", IEEE Trans. Rel., Vol. 45, No. 4, pp. 611-618, 1996.

[2] Nelson, W., "Analysis of Accelerated Life Test Data-Part Ⅰ: The Arrhenius Model and Graphical Methods", IEEE Trans. Rel., Vol. EI-6, No. 4, pp. 165-181, 1971.

[3] Nelson, W., "Analysis of Accelerated Life Test Data-Part Ⅱ: Numerical Methods and Test Planning", IEEE Trans. Rel., Vol. EI-7, No. 1, pp. 36-55, 1972.

[4] Nelson, W., "Analysis of Accelerated Life Test Data-Part Ⅲ: Product Comparisons and Checks on the Validity of the Model and Data", IEEE Trans. Rel., Vol. EI-7, No. 2, pp. 99-119, 1972.

[5] Nelson, W., "Accelerated Life Testing-Step-Stress Model and Data Analyses", IEEE Trans. Rel., Vol. R-29, No. 2, pp. 103-108, 1980.

[6] Seo, S. K. and B. J. Yum, "Accelerated Life Test Plans under Intermittent Inspection and Type-Ⅰ Censoring: The Case of Weibull Failure Distribution", Nav. Res. Log., Vol. 38, pp. 1-22, 1991.

[7] Singpurwalla, N. D., "Inference from Accelerated Life Tests When Observations Are Obtained from Censored Samples", Technometrics, Vol. 13, No. 1, pp. 161-170, 1971.

[8] Singpurwalla, N. D., "A Problem in Accelerated Life Testing", J. Amer. Statist. Assoc., Vol. 66, No. 336, pp. 841-845, 1971.

[9] Singpurwalla, N. D., "Inference from Accelerated Life Tests Using Arrhenius Type Re-Parameterizations", Technometrics, Vol. 15, No. 2, pp. 289-299, 1973.

[10] Singpurwalla, N. D., V. C. Castellino, and D. Y. Goldschen, "Inference from Accelerated Life Tests Using Eyring Type Re-Parameterizations", Nav. Res. Log. Q., Vol. 22, pp. 289-296, 1975.

[11] Won, Y. C., "Accelerated Life Tests under Uniform Stress Distribution", Journal of the Safety Management & Science, Vol. 2, No.2, pp.71-83, 2000.

[12] Yin X. K. and B. J. Sheng, "Some Aspects of Accelerated Life Testing by Progressive Stress", IEEE Trans. Rel., Vol. R-36, No. 1, pp. 150-155, 1987.

[13] Yum, B. J. and S. C. Choi, "Optimal Design of Accelerated Life Tests under Periodic Inspection", Nav. Res. Log., Vol. 36, pp. 779-795, 1989.

저 자 소 개

원 영 철 : 현 선린대학 인터넷방송계열 교수

관심분야는 멀티미디어, 통계응용, 시스템 안전