

유체유동 외팔 파이프의 고유진동수에 미치는 이동질량들의 영향

The Influence of Moving Masses on Natural Frequency of Cantilever Pipe Conveying Fluid

윤한익[†] · 손인수* · 진종태*** · 김현수**

Han-Ik Yoon, In-Soo Son, Jong-Tae Jin and Hyun-Soo Kim

(2002년 5월 10일 접수 : 2002년 10월 16일 심사완료)

Key Words : Cantilever Pipe Conveying Fluid(외팔 송수관), Natural Frequency(고유진동수), Moving Mass(이동질량), Follower Force(종동력)

ABSTRACT

The vibrational system of this study is consisted of a cantilever pipe conveying fluid, the moving masses upon it and an attached tip mass. The equation of motion is derived by using Lagrange equation. The influences of the velocity and the number of moving masses and the velocities of fluid flow in the pipe have been studied on the natural frequency of a cantilever pipe by numerical method. As the size and number of a moving mass increases, the natural frequency of cantilever pipe conveying fluid is decreased. When the first a moving mass is located at the end of cantilever pipe, the increasing of the distance of moving masses make the natural frequency increase at first and third mode, but the frequency of second mode is decreased. The variation of natural frequency of the system is decreased due to increase of the number of a moving mass. The number and distance of moving masses effect more on the frequency of higher mode of vibration.

1. 서 론

유동유체를 갖는 파이프 구조물의 대표적 예는 송수관으로, 파이프 속을 흐르는 유체에 의하여 파이프에 진동이 발생하며, 유체의 속도 및 파이프의 끝단에 집중종동력으로 작용하는 유체의 분사력은 탄성계의 동특성과 안정성에 큰 영향을 미친다. 또한, 이동질량의 영향을 받는 외팔 구조물에 대한 동특성 해석은 공진 회피 등의 이유로 공학자들의 많은 관심의 대상이 되어왔다.

유체유동에 의한 송수관의 진동과 안정성에 대한 연구는 Ashley와 Haviland⁽¹⁾에 의해 비롯되어 동역학에 대한 이론적 연구와 실험적 연구^(2, 3)를 통해 송수관이 양단 단순지지된 경우는 유동유체의 힘은 보존적이고, 계는 어떤 임계유속 이상에서 발산형 불안정을 일으키지만 유체가 나오는 유출 끝단이 자유인 경우는 유동유체의 힘이 비보존적이며, 계는 어떤 임계유속 이상에서 플러터(flutter) 불안정을 일으킨다는 것을 제시하였다. 또, Chen⁽⁴⁾은 양단이 단순지지된 송수관에 시간 종속적(time-dependent)인 유속이 주어지는 경우에 있어서 송수관의 파라미터 불안정에 대한 연구를 수행하였으며, 기계 장치부를 갖는 수직 외팔 파이프 구조물의 동적 안정성에 관한 연구⁽⁵⁾가 수치해석과 실험을 통하여 진행되어 졌다. 또, Wilson⁽⁶⁾은 집중질량으로 된 이동하중이 아닌 등분포 질량으로 된 이동하중에 대한 보의 응답을 연구하였고, 이동질량에 의한 보 형태의 구조물 및 유체에 의

† 책임저자, 정회원, 동의대학교 기계산업시스템공학부

E-mail : hiyoon@dongeeui.ac.kr

Tel : (051) 890-1645, Fax : (051) 890-2232

* 정회원, 동의대학교 대학원 기계공학과

** 동의대학교 대학원 기계공학과

*** 부산정보대학 기계자동차산업계열

한 파이프계의 동적안정성과 거동에 대한 많은 연구 결과(7-11) 발표되었다.

이상의 연구자들은 유체유동에 의한 파이프의 횡진동과 안정성, 그리고 이동질량이 단순보의 횡진동에 미치는 영향들에 대하여 연구하였으나 유체유동을 갖는 외팔 파이프의 고유진동수에 미치는 이동질량들의 영향에 대해서는 연구하지 아니하였다. 계의 동특성 해석에서 가장 중요한 부분은 고유진동수 해석이라 할 수 있으며, 이를 통하여 구조물의 공진을 피할 수 있다.

본 연구에서는 점성이 매우 작은 유동유체의 분사력에 의하여 외팔 파이프의 끝단에 집중 중동력이 작용하고 동시에 파이프 위를 질량들이 일정 속도와 간격으로 이동하는 탄성계를 고려하였으며, 이러한 계는 높은 온도를 가진 이동질량 또는 일정 수의 이동질량의 이동에 의하여 파이프에 발생하는 열을 파이프 속을 흐르는 유체로써 냉각시키는 기계장치에서 발견할 수 있다. 계의 운동방정식은 Lagrange 방정식으로 유도하여 수치해석 하였다. 유체유동을 갖는 외팔 파이프 위를 이동하는 질량의 크기와 이들 사이의 간격이 외팔 파이프의 고유진동수에 미치는 영향을 연구하였고, 특히 이동질량 수량의 변화에 따른 파이프의 고유진동수 변화에 관하여 연구하였다.

2. 이론해석

Fig. 1은 내부에 점성이 매우 작은 유체가 흐르는 외팔 파이프 위를 집중질량들이 일정속도와 일정간격을 가지고 연속적으로 이동하는 탄성계의 개략도를 나타내고 있다. 여기서 m_1, m_2, m_3 는 파이프 위를 이동하는 집중질량들, v 는 집중질량들의 속도, 그리고 u 는 유동유체의 속도이며 F 는 유동유체의 분사력이다. 또, m_p 는 외팔 파이프의 노즐 등에 해당하

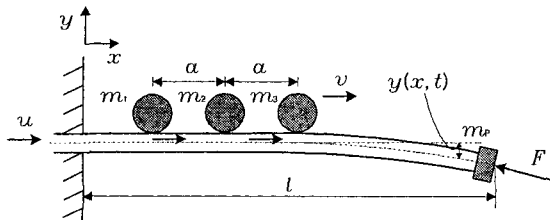


Fig. 1 A cantilever pipe conveying fluid with moving masses

는 끝단질량이고, a 는 집중질량 사이의 간격을, l 은 외팔 파이프의 전체 길이를 의미한다. 이동질량들의 속도와 크기, 그리고 이동질량들 간의 간격이 외팔 파이프의 고유진동수에 미치는 영향을 해석하기 위하여 Lagrange 방정식으로 계의 운동방정식을 유도한다.

2.1 계의 운동방정식

외팔 파이프의 횡변위 $y(x, t)$ 를 유체와 이동질량이 없는 경우, 경계조건을 만족시키는 끝단질량을 가진 외팔 보의 고유함수 $\phi_i(x)$ 를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i(x) \quad (1)$$

여기서, $q_i(t)$ 는 일반화 좌표, μ 는 일반화 좌표의 수를 나타낸다. 또, $\phi_i(x)$ 는 고유함수로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_i(x) = & \cos(\lambda_i x) - \cosh(\lambda_i x) \\ & - \alpha_i [\sin(\lambda_i x) - \sinh(\lambda_i x)] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, α_i 는 외팔보의 자유진동의 i 번째 고유치이며 다음 식으로 주어진다.

$$\alpha_i = \frac{\cos(\lambda_i l) + \cosh(\lambda_i l)}{\sin(\lambda_i l) + \sinh(\lambda_i l)} \quad (3)$$

식 (3)에서 λ_i 는 다음 식에서 구한다.

$$\frac{1 + \cos(\lambda_i l) \cosh(\lambda_i l)}{\sin(\lambda_i l) \cosh(\lambda_i l) - \cos(\lambda_i l) \sinh(\lambda_i l)} = \frac{m_p}{m l} (\lambda_i l) \quad (4)$$

여기서 m 은 외팔 파이프의 단위 길이당 질량이다. 외팔 파이프의 자중과 중력에 의한 유체의 영향을 무시하면, Fig. 1에서 보인 계를 구성하는 외팔 파이프, 이동질량, 그리고 유동유체의 에너지 식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} T_p = & \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2(t) \int_0^l \phi_i^2(x) dx \\ & + \frac{1}{2} m_p \{ \dot{y}(l, t) \}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} T_f = & \frac{1}{2} \int_0^l m_f (u^2 + 2u y_f y_f' + y_f'^2) dx \\ y_f = & y(x_f, t), \quad x_f = ut \end{aligned} \quad (6)$$

$$T_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left\{ v^2 \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2(t) \phi_i'^2[f_k(t)] + 2v \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t) \dot{q}_i(t) \phi_i[f_k(t)] \phi_i'[f_k(t)] + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2(t) \phi_i^2[f_k(t)] + v^2 \right\} \quad (7)$$

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y'')^2 dx - m_p g y(l, t) \quad (8)$$

$$V_m = - \sum_{k=1}^n m_k g y(x_k, t) |_{x_k=f_k(t)} \quad (9)$$

여기서 k 는 이동질량의 수이며 T_p , T_f , 그리고 T_m 은 각각 외팔 파이프, 유동유체, 그리고 이동질량들의 운동에너지이다. V_p 는 외팔 파이프의 포텐셜 에너지를 나타내며, V_m 은 이동질량들의 포텐셜 에너지를 표현하고 있다. 식 (6)의 첫 번째 식의 두 번째 항과 식 (7)의 두 번째 항은 물리적으로 코리올리력을 의미한다.⁽¹²⁾ 또, (·)는 시간 t 에 대한 미분을 나타내며, (·)은 축방향 좌표 x 에 대한 미분을 의미한다.

식 (9)에서 이동질량의 수평속도가 v 이면 이동질량들의 수평변위 x_k 는

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t) = \int_0^t v dt \\ x_2 &= f_2(t) = \int_0^t v dt - a \\ x_3 &= f_3(t) = \int_0^t v dt - 2a \end{aligned} \quad (\text{단, } 0 < x_k \leq l) \quad (10)$$

이고, $x_2 < a$, $x_3 < 2a$ 인 경우는 이동질량이 각각 1 개, 2 개인 경우와 동일한 상태이므로 고려하지 않는다. 또, 이동질량들은 보와 분리되지 않고 접촉된 상태로 이동한다고 본다.

유체유동의 분사력에 의하여 파이프에 작용되는 힘은 $x = l$ 인 점에 작용하는 집중점선종동력이 된다. 이러한 점선종동력에 의한 일은 그 보존력성분에 의한 일과 비보존력 성분에 의한 일로 구분되며 각각 다음과 같다.

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A u^2 y'^2 dx \quad (11)$$

$$W_N = - \rho A u^2 y'(l, t) y(l, t) \quad (12)$$

계의 운동방정식을 유도하기 위하여 식 (5) ~ 식

(12)의 일과 에너지 식을 다음의 Lagrange 방정식에 대입한다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (13)$$

여기서 L 은 Lagrangian 이다. 따라서 계의 운동방정식은 $i = 1$ 부터 μ 항까지의 합으로 표현되며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left\{ m \int_0^l \dot{\phi}_i^2(x) dx + m_p \dot{\phi}_i^2(l) + m_f \int_0^l \dot{\phi}_i^2(x_f) dx + \sum_{k=1}^n m_k \dot{\phi}_i^2(x_k) \right\} \ddot{q}_i(t) \\ & + \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} [\dot{\phi}_i^2(x_k) - m_f \int_0^l \frac{d}{dt} [\dot{\phi}_i^2(x_f)] dx] \right\} \dot{q}_i(t) \\ & + \sum_{i=1}^n \left[EI \int_0^l (\dot{\phi}_i(x))^2 dx - \rho A u^2 \int_0^l (\dot{\phi}_i(x))^2 dx + 2\rho A u^2 \dot{\phi}_i(l) \phi_i(l) + \sum_{k=1}^n \left\{ v m_k \frac{d}{dt} (\dot{\phi}_i(x_k)) \phi_i(x_k) - m_k v^2 \dot{\phi}_i^2(x_k) + v m_k \frac{d}{dt} (\phi_i(x_k)) \dot{\phi}_i(x_k) \right\} + u m_f \int_0^l \left\{ \frac{d}{dt} (\dot{\phi}_i(x_f)) \phi_i(x_f) + \frac{d}{dt} (\phi_i(x_k)) \dot{\phi}_i(x_k) \right\} dx \right] q_i(t) - \sum_{i=1}^n \left\{ (m + m_f) g \int_0^l \phi_i(x) dx + m_p g \phi_i(l) + \sum_{k=1}^n m_k g \phi_i(x_k) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

2.2 계의 진동수 해석

식 (14)의 운동방정식을 자유진동해석을 위해 행렬 형태의 식으로 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (15)$$

식 (15)는 고유치 문제를 해결하기 위하여 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$M^* \dot{\eta} + K^* \eta = 0 \quad (16)$$

여기서 식 (16)의 각 항은 각각 다음과 같다.

$$M^* = \begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad K^* = \begin{bmatrix} [C] & [K] \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\{\eta\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix} \quad (18)$$

여기서 I 는 단위행렬을 의미한다. 복소모드 해석을 위해 식 (18)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\eta = e^{\lambda t} \theta \quad (19)$$

여기서 λ 는 복소수 값의 고유치이고, θ 는 모드형을 나타내는 행렬이다. 식 (16)~(19)을 이용하여 구해진 고유치는 다음과 같이 복소수 값을 갖는데 이 값으로부터 계의 진동수(Ω)를 구할 수 있다.

$$\lambda = b + \omega i \quad (20)$$

$$\Omega = \sqrt{b^2 + \omega^2}$$

3. 수치해석 결과 및 고찰

본 연구에서는 이론해석에서 유도된 운동방정식을 바탕으로 계의 동특성을 지배하는 유동유체의 속도, 이동질량의 크기 및 속도들에 대하여 외팔 파이프의 횡진동을 10차 모드까지 고려하여($\mu = 10$) 그 각각의 영향을 수치해석을 통해 비교, 고찰하였다. Table 1은 수치해석을 위한 입력 데이터를 나타내고 있다.

Fig. 2는 이동질량의 속도가 0.2 m/s, 유동유체의 속도가 10 m/s, 그리고 이동질량의 크기가 0.2 kg 일 때 이동질량들의 간격과 이동질량 수량에 따른 진동수 변화를 3차 모드까지 표현하고 있다. Fig. 2에서 이동질량들의 간격이 0.5m 일 때는 첫 번째 이동질량이 파이프의 1m를 지날 때, 간격이 0.3m 일 때는 0.6m를 지날 때 이동질량의 수가 2개에서 3개로 증가한다. 1차 모드에서는 이동질량의 간격이 클 때 계의 진동수는 더 큰 값을 가지며, 이동질량의 수가 3개 일 때가 2개 일 때에 비해 미소하지만 조금 작은 진동수를 가진다. 하지만 2차 모드에서는 첫 번째의 이동질량이 파이프의 1.5m 지점을 통과하기 전에는 이동질량들의 간격이 클 때 진동수는 큰 값을 가지지만, 1.5m를 지난 후에는 간격이 클 때 파이프의 진동수는 더 작은 값을 가진다. 또, 3차 모드에서는 이동질량들의 간격이 0.3m 일 때, 첫 번째 질량이 파이프의 1.25m 부근을 지나는 경우에 이동질량의 수에 관계없이 거의 같은 진동수를 나타내며, 이동질량들의 간격이 0.5m 일 때는 1.4m 부근을 지날 때 이동질량이 2개 일 때와 3개 일 때 같은 값의 진동수를 가진다. 첫 번째 이동질량이 보의 끝단에 위치할 때 이동질량들의 간격이 0.3m 일 때와 간격이 0.5m 일 때의 진동수를 비교해 보면 이동질량의 수와 관계없이 간격이 0.3m인 경우에 1차 모드에서는 약 2.8%,

Table 1 Specifications of cantilever pipe conveying fluid with moving masses system

| | |
|------------------------------|------------|
| Mass per unit length (m) | 0.2 (kg/m) |
| Length (l) | 2 (m) |
| Young's modulus (E) | 9,72 (MPa) |
| Outer diameter | 26 (mm) |
| Inner diameter | 14 (mm) |
| Tip mass (m_p) | 0.2 (kg) |

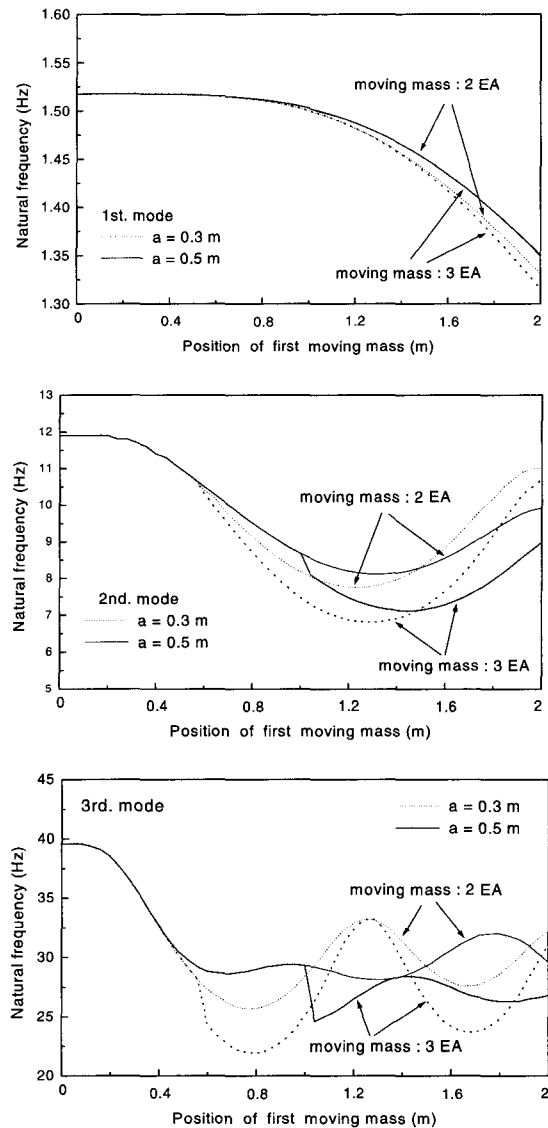


Fig. 2 Natural frequency of cantilever pipe according to distance of moving masses

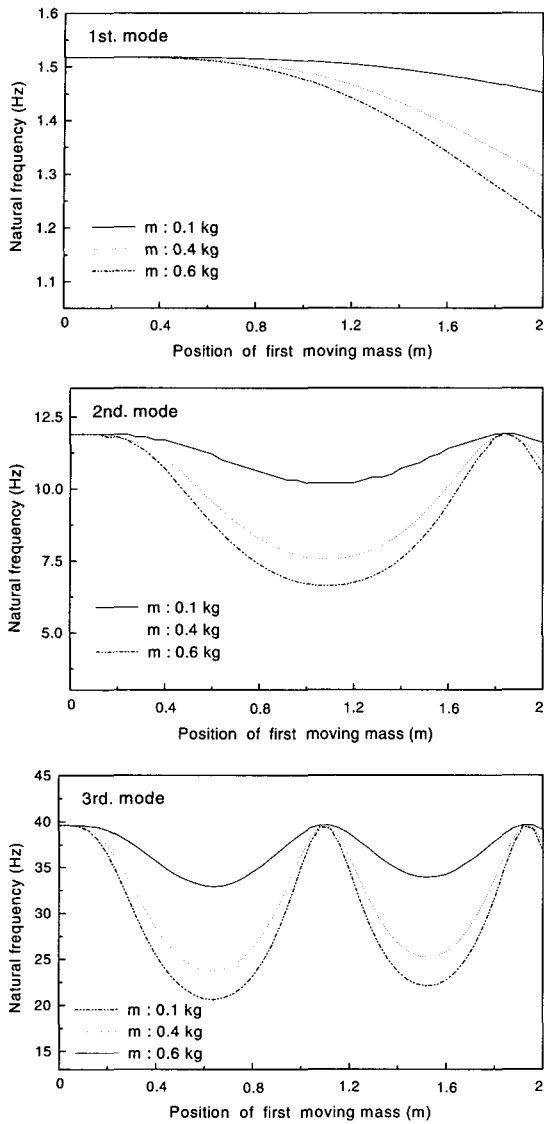


Fig. 3 Natural frequency of cantilever pipe according to moving mass(1 mass)

3차 모드에서는 약 10.2% 정도 진동수의 감소를 가져오지만, 2차 모드에서는 이동질량들의 간격이 0.3m의 경우 약 18.5% 정도 계의 진동수가 증가함을 알 수 있다.

Fig. 3에서 Fig. 5까지는 이동질량들 사이의 간격은 0.5m, 이동질량의 속도가 0.2m/s, 유동유체의 속도가 10m/s이고, 이동질량의 수가 각각 1개, 2개, 그리고 3개일 때 이동질량들의 크기에 따른 계의 진동수 변화 3차 모드까지 도시하였다. 2차와 3차 모드에서 진동수가 증가와 감소를 반복하는 것은 일반적으

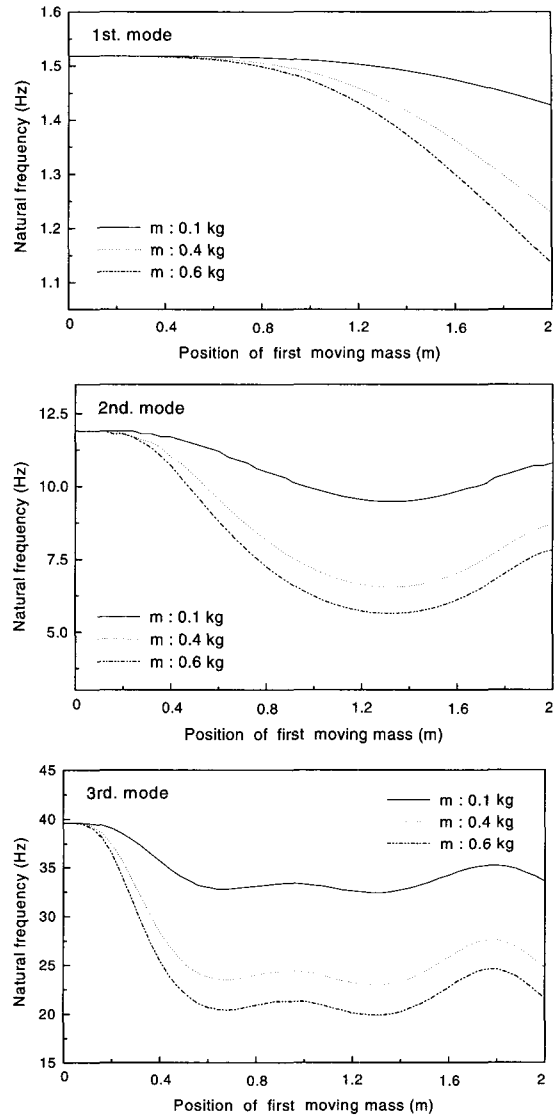


Fig. 4 Natural frequency of cantilever pipe according to moving mass(2 masses)

로 진동모드에서 나타나는 절점의 영향이며, 그 굴곡의 변화는 이동질량에 의한 것임을 알 수 있다. 전체적으로 계의 진동수는 이동질량의 크기와 이동질량의 수에 반비례적이다.

Fig. 3은 이동질량이 1개 일 때 계의 진동수 변화를 나타내고 있다. 1차 모드에서는 첫 번째 이동질량이 파이프의 0.5m를 지날 때까지는 거의 같은 진동수를 나타내고 있으며, 2차 모드에서는 첫 번째 이동질량이 파이프의 1.8m 위치를 지날 때 같은 진동수를 가지고, 3차 모드에서는 첫 번째 이동질량이 파

이프의 1.1 m 지점과 1.9 m 지점을 지날 때 각각 같은 진동수를 가진다. Fig. 4의 이동질량이 2개 일 때, 첫 번째 이동질량이 파이프의 0.5 m를 지날 때 두 번째 이동질량이 출발하고, Fig. 5의 이동질량이 3개인 경우에는 첫 번째 이동질량이 파이프의 1 m 지점을 지나면서부터 3 개의 이동질량들이 파이프 위를 함께 이동하게 된다. Fig. 4와 Fig. 5에서 두 번째 이동질량이 출발하는 0.5 m 지점에서는 계의 진동수에 큰 변화가 일어나지 않지만, Fig. 5에서 볼 수 있는 것처럼 이동질량이 3개로 증가되는 1 m 위치에서는 진동

수의 급격한 감소를 가져온다. 또, 이동 질량의 수량 변화는 1차 모드에서는 단지 진동수의 크기에만 영향을 주고, 2차 모드와 3차 모드에서는 이동질량의 수량이 2개 이상인 경우 Fig. 4에서 볼 수 있는 것처럼 진동수의 변화굴곡을 완만하게 만든다.

Fig. 6은 이동질량의 속도가 0.2 m/s, 유동유체의 속도가 10 m/s, 그리고 이동질량들의 크기 및 간격이 각각 0.4 kg, 0.5 m 일 때 이동질량의 수량에 따른 진동수 변화를 3차 모드까지 나타내었다. 두 번째 이동질량이 파이프 위를 출발할 때는 진동수에 큰 변

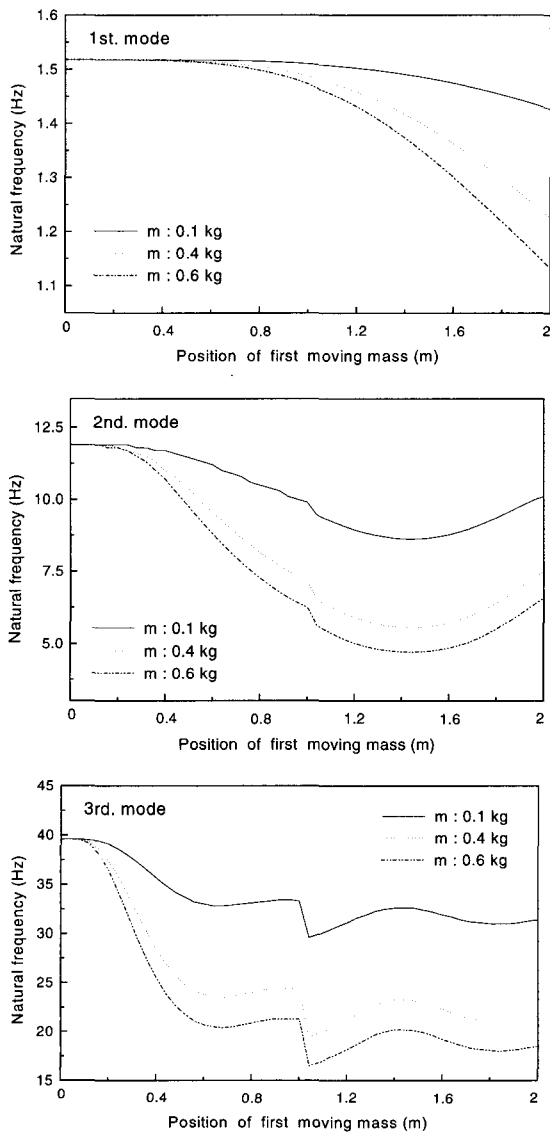


Fig. 5 Natural frequency of cantilever pipe according to moving mass(3 masses)

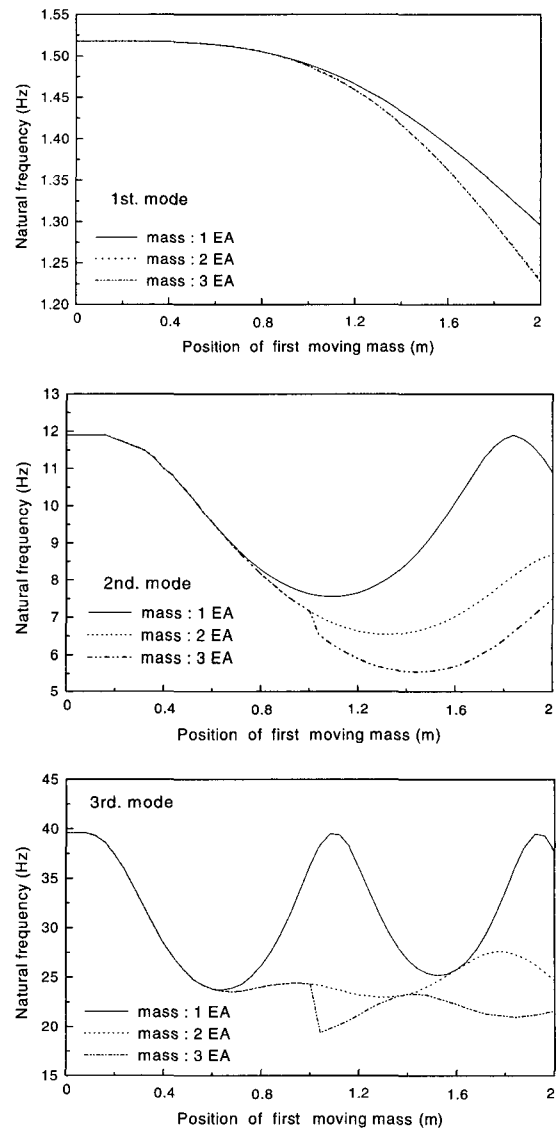


Fig. 6 Natural frequency of cantilever pipe according to Number of moving mass

화가 없으나 세 번째 질량이 파이프 위를 출발하는 시점의 진동수는 1차 모드에서 약 1.2% 정도, 2차 모드에서는 약 11.3%, 그리고 3차 모드에서는 약 23.8% 정도 감소한다. 1차 모드에서는 이동질량의 수가 2개 일 때와 3개 일 때 계의 진동수 변화는 거의 없으며, 3차 모드에서는 첫 번째 이동질량이 파이프의 1.6m를 지나는 시점에서 이동질량의 수가 1개와 2개인 경우 계의 진동수가 같아지고, 1.4m를 지날 때 이동질량의 수가 2개와 3개인 경우 계의 진동수는 같아진다. 또한 1차 모드에서는 이동질량이 1개 일 때에 비해 2개인 경우 약 4.9%, 3개의 경우는 약 5.3% 진동수가 감소하고, 2차 모드에서는 각각 약 21.3%, 30.7% 정도의 감소를, 그리고 3차 모드에서는 34.5%, 42.7% 정도의 진동수 감소를 보인다.

4. 결 론

본 연구에서는 점성이 매우 작은 유동유체의 분사력에 의하여 외팔 파이프의 끝단에 집중중동력이 작용하고, 동시에 파이프 위를 질량들이 일정한 간격과 속도로 이동하는 계의 각 구성인자가 계의 고유진동수에 미치는 영향에 대하여 수치해석 하였으며, 연구 결과에 대한 결론은 다음과 같다.

(1) 첫 번째 이동질량이 보의 끝단에 위치할 때 1차 모드와 3차 모드에서는 이동질량들의 간격이 클수록 계의 고유진동수가 커지고, 2차 모드에서는 작아진다.

(2) 이동질량의 수량 변화는 1차 모드에서는 단지 계의 진동수의 크기에 영향을 주며, 2차 모드와 3차 모드에서는 이동질량의 수량이 2개 이상인 경우 고유진동수의 변화곡곡을 완만하게 한다.

(3) 두 번째 이동질량이 파이프 위를 출발할 때는 계의 진동수에 큰 변화가 없으나 세 번째 질량이 파이프 위를 출발하는 시점의 진동수는 1차 모드는 1.2%, 2차 모드는 11.3%, 그리고 3차 모드에서는 약 23.8% 정도 감소한다.

(4) 계의 고유진동수에 미치는 이동질량들의 수와 간격의 영향은 고차 모드로 갈수록 더 크게 나타난다.

참 고 문 헌

(1) Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending

Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, pp. 229~232.

(2) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(I. Theory)," *Proceedings of the Royal Society (London)*, Series A, Vol. 261, pp. 457~486.

(3) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (II. Experiments)," *Proceedings of the Royal Society (London)*, Series A, Vol. 261, pp. 487~499.

(4) Chen, S. S., 1971, "Dynamic Stability of Tube Conveying Fluid" *Journal of Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE*, Vol. 97, pp. 1469~1485.

(5) 류봉조, 정승호, 이종원, 2000, "유체유동에 의한 유연한 파이프의 불안정과 진동억제에 미치는 부가질량의 영향," *한국소음진동공학회지(현 논문집)*, 제 10 권, 제 2호, pp. 280~290.

(6) Wilson, J. F., 1973, "Response of Simple Sans to Moving Mass Loads;" *AIAA Journal*, pp. 4~5.

(7) Stanisic, M. M., 1985, "On a New Theory of the Dynamic Behavior of the Structures Carrying Moving Masses," *Ingenieur-archiv*, Vol. 55, pp. 176~185.

(8) 이우식, 박철희, 홍성철, 1991, "내부에 유체가 흐르는 파이프계의 동적안정성 및 응답해석," *대한기계학회논문집*, 제 15 권, 제 6 호, pp. 1861~1871.

(9) Lee, H. P., 1996, "Dynamic Response of a Beam with a Moving Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 191, pp. 289~294.

(10) Siddiqui, S. A. Q., Golnaraghi, M. F. and Heppler, G. R., 1998, "Dynamics of a Flexible Cantilever Beam Carrying a Moving Mass," *Nonlinear Dynamics*, Vol. 15, pp. 137~154.

(11) 윤한익, 손인수, 2002, "이동질량을 가진 유체 유동 파이프의 동특성," *한국소음진동공학회논문집*, 제 12권, 제 7 호, pp. 550~556.

(12) Meirovitch, L., 1970, *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill, chap. 2.