

# 차분격자볼츠만법의 압축성 유체모델을 도입한 중력류의 흐름현상에 관한 연구

손유식\* · 김원철\* · 강호근\*  
\*경상대학교 수송기계공학부 · 해양산업연구소

## Study on Analysis of Gravity Currents by the Finite Difference Boltzmann Method using Two-dimensional Compressible Fluid Model

YU-SIK SON\*, WON-CHEOL KIM\* AND HO-KEUN KANG\*

\*School of Transport Vehicle Engineering · Institute of Marine Industry, Gyeongsang National University, Tongyeong, Korea

**KEY WORDS:** Compressible Flow 압축성흐름, Finite Difference Lattice Boltzmann Method 차분격자볼츠만법, Gravity Currents 중력흐름, Boussinesq Fluid 부시네크유체

**ABSTRACT:** In this research, the finite difference lattice Boltzmann method(FDLBM) is used to analyze gravity currents in the lock exchange configuration that occur in many natural and man-made situations. At a lock those are seen when a gate is suddenly opened, and, in the atmosphere, when the thunderstorm outflows make a cold front. At estuaries in the ocean, the phenomenon is found between fresh water from a river and salt water in the sea. Since such interesting phenomena were recognized, pioneers have challenged to make them clear by conducting both experiments and analysis. Most of them were about the currents of liquid or Boussinesq fluids, which are assumed as incompressible. Otherwise, the difference in density of two fluids is small. The finite difference lattice Boltzmann method has been a powerful tool to simulate the flow of compressible fluids. Also, numerical predictions using FDLBM to clarify the gravity currents of compressible fluids exhibit all features, but typically observed in experimental flows near the gravity current head, including the lobe-and-cleft structure at the leading edge.

### 1. 서 론

강하구에서 해수/담수를 분리하고 있는 수문을 열었을 때 발생하는 흐름, 또는 천둥번개로부터 갑자기 형성되는 차가운 기체에 의한 불연속면을 갖는 기체의 흐름 등의 중력류의 흐름은 자연계에서 자주 접할 수가 있으며, 여러 사례들이 이전의 문헌에 소개되어 있다(Simpson, 1997). 이러한 현상을 조사할 목적으로 예전부터 실험을 통해 연구되어져 왔으며(Keulegan, 1957; Benjamin, 1969; Britter and Simpson, 1978; Simpson and Britter, 1979; Huppert and Simpson, 1980), 또한 최근 들어 계산기의 눈부신 발전과 더불어 수치계산을 통한 연구도 활발하게 이루어지고 있다(Hartel et al., 2000). 그러나 이와 같은 연구들은 일반적으로 접근하기 쉬운 방법으로서 Boussinesq 근사를 이용한 비압축성 유체모델을 이용하는 것이었으나, 이러한 중력류의 흐름현상들은 압축성 유체의 관점에서 해석하는 것이 가장 바람직하다.

본 연구에 사용되고 있는 열·유체모델의 격자볼츠만법(Lattice Boltzmann Method, LBM)은 최근, 흐름현상을 해석함

에 있어 널리 이용되는 수치계산방법이다(Alexander et al., 1993; Chen et al., 1994; Huang et al., 1997; Wolf-Gladrow, 2000). 격자볼츠만법에서 일반적으로 흐름의 영역은 규칙적인 격자에 의해 이산화 되며, 그 격자 상에서 가상입자가 충돌과 병진(이동)을 반복한다(McNamara and Zanetti, 1988). 이 때, 입자의 분포함수로부터 유체로서의 거시적인 변수를 결정하여 흐름의 여러 파라미터들(밀도, 속도 및 에너지)을 구하는 방법이며, 직접적으로 Navier-Stokes 방정식을 이용하는 다른 수치계산 방법과는 다르다.

한편, 격자볼츠만 모델에서는 유체의 열적인 성질을 고려한 열유체모델과 그 외에 비열유체모델이 있다. 이 차이는 입자의 충돌과정에 있어서 입자의 운동에너지의 보존법칙을 적용하는가 혹은 하지 않는가에 의해 결정한다(Tsutahara and Kang, 2002). 일반적으로 종래의 격자볼츠만 모델에서의 열유체모델은 계산 가능한 온도(내부에너지)의 범위가 제한되어져 있을 뿐만 아니라 계산이 불안정하게 되는 경우가 있다. 그래서 격자볼츠만 모델의 계산을 차분화함으로써 수치계산을 안정적으로 수행할 수가 있다.

앞에서 설명한 바와 같이 규칙적인 격자를 도입하는 것은 이 모델이 등방적인 유체의 성질을 재현하기 위한 목적이지만, 현실적인 문제에서 중요하게 되는 복잡한 형상의 경계에 대해

제1저자 손유식 연락처 : 경상남도 통영시 인평동 445  
055-640-3121 ysson@gaechuk.gsnu.ac.kr

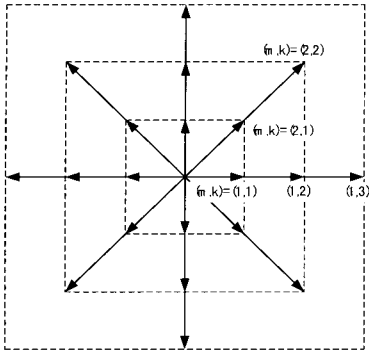


Fig. 1 Distribution of particles on square lattice(2D21V)

서 경계조건을 적용하기에는 어려운 점이 수반된다. 격자볼츠만법의 scheme은, 이 규칙격자에 대한 차분 scheme으로 되어 있지만, 이것을 곡선격자에 확장하는 것에 의해서 상기의 어려운 점을 해결할 수가 있게 된다. 이와 같은 방법을 차분격자볼츠만 방법 (Finite Difference Lattice Boltzmann Method, FDLBM)이라고 하며, 격자볼츠만법이 갖는 이 점을 계승하고, 한층 계산을 안정하게 수행하기 위한 방법으로서 개발되었다 (Cao et al., 1997; Seta et al., 1999).

따라서, 본 연구에서는 차분격자볼츠만법의 압축성 유체모델을 도입하여 중력류의 수치계산을 행하였으며, 그 결과를 나타내었다. 아울러, 중력류의 선단속도, 선단 돌출부 후부의 와의 발생모양, 발생조건 등 실험결과 및 Boussinesq유체의 결과와 정량적인 비교분석을 통하여 조사되었다.

## 2. 이론해석

### 2.1 열·유체 차분격자BGK모델

차분격자볼츠만법의 기초가 되는 이산화 BGK방정식은 다음과 같은 속도분포함수  $f_i$ 를 이용한 형태로서

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i = -\frac{1}{\phi} (f_i - f_i^{(0)}) \quad (1)$$

와 같이 표현된다. 여기서  $f$ 는 입자의 분포함수,  $f_i$ 는  $i$ 방향의 속도를 갖는 입자의 수,  $f_i^{(0)}$ 는 국소평형분포함수,  $\mathbf{c}_i$ 는 입자속도,  $\phi$ 는 단일시간완화계수를 나타낸다.

미시적 상태에 있는 유체에 대한 상태량은 식(1)의 분포함수로부터 결정되며 거시적 흐름과 미시적 흐름에 대한 상태량, 즉 밀도  $\rho$ , 운동량  $\rho u_a$  및 내부에너지  $e$ 는 다음 식과 같은 관계가 있다.

$$\rho = \sum_{\sigma,i} f_{\sigma i} \quad (2)$$

$$\rho u_a = \sum_{\sigma,i} f_{\sigma i} c_{\sigma i}^a \quad (3)$$

$$\rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) = \sum_{\sigma,i} f_{\sigma i} \frac{c_{\sigma i}^2}{2} \quad (4)$$

식(1)에서 국소평형분포함수는 속도  $\mathbf{u}$ 에 관해서 3차항까지

고려하면

$$f_{\sigma i}^{(0)} = F_{\sigma} \rho \left[ 1 - 2Bc_{\sigma i}^a u_a + 2B^2 c_{\sigma i}^a c_{\sigma i}^b c_{\sigma i}^c u_a u_b + Bu^2 - 2B^2 c_{\sigma i}^a u_a u^2 - \frac{4}{3} B^3 c_{\sigma i}^a c_{\sigma i}^b c_{\sigma i}^c u_a u_b u_c \right] \quad (5)$$

와 같으며, 여기서 입자속도  $\mathbf{c}_i$ 는 Fig. 1과 같이 8개의 방향과 정지입자를 포함한 21종류의 속도를 갖으며 다음과 같이 표현할 수가 있다.

$$c_{mki} = k\sqrt{m}c \left\{ \cos \left[ \frac{\pi(i-1)}{2} + \frac{\pi(m-1)}{4} \right], \sin \left[ \frac{\pi(i-1)}{2} + \frac{\pi(m-1)}{4} \right] \right\} \quad (6)$$

$$(i = 1, \dots, 4, m = 1, 2, k = 1, 2, \dots)$$

식(5)에서  $\sigma$ 는  $m, k$ 를 나타내며, 계수  $F_{\sigma}$  및  $B$ 는

$$F_0 = 1 + \frac{5}{4Bc^2} \left( \frac{17}{96B^2c^4} + \frac{35}{48Bc^2} + \frac{49}{45} \right)$$

$$F_{11} = -\frac{1}{8Bc^2} \left( \frac{13}{16B^2c^4} + \frac{71}{24Bc^2} + 3 \right)$$

$$F_{12} = \frac{1}{16Bc^2} \left( \frac{5}{16B^2c^4} + \frac{25}{24Bc^2} + \frac{3}{5} \right)$$

$$F_{13} = -\frac{1}{24Bc^2} \left( \frac{1}{16B^2c^4} + \frac{1}{8Bc^2} + \frac{1}{15} \right)$$

$$F_{21} = \frac{1}{4B^3c^6} \left( \frac{Bc^2}{3} + \frac{1}{8} \right)$$

$$F_{22} = -\frac{1}{1536B^3c^6} (2Bc^2 + 3)$$

$$B = -\frac{1}{2e} \quad (7) \sim (13)$$

와 같이 결정된다.

### 2.2 지배방정식

체적력(중력)은 각각의 시간  $t$ 에서  $y$ 방향으로 작용하면 다음과 같이 국소평형분포함수는 중력에 의한 운동량 변화를 고려할 수가 있다.

$$\circ \text{질량: } \rho \rightarrow \rho \quad (14)$$

$$\circ \text{운동량: } \rho \mathbf{u} \rightarrow \rho(\mathbf{u} - \mathbf{g} \cdot \phi) \quad (15)$$

$$\circ \text{에너지: } \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \rightarrow \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{g}|^2 \cdot \phi^2 \quad (16)$$

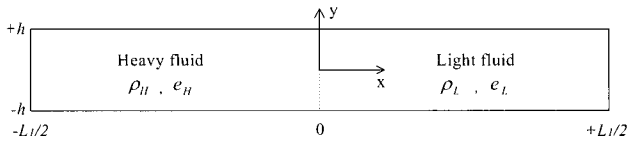
따라서 중력의 효과가 포함된 이산화BGK방정식(1)은 다음과 같이 변환할 수가 있다.

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i = -\frac{1}{\phi} (f_i - f_i^{(0)g}) \quad (17)$$

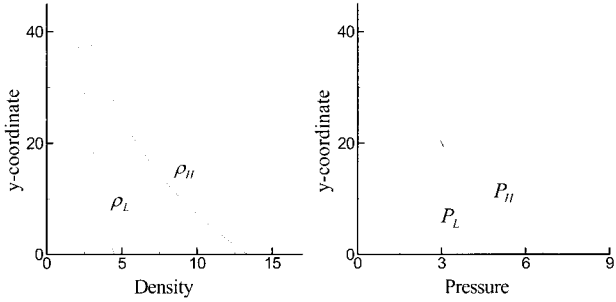
상기 방정식을 Chapmann-Enskog전개를 이용하면 거시적 흐름에 관한 유체 운동방정식(Navier-Stokes)을 도출할 수가 있다.

○ 질량방정식:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_a} (\rho u_a) = 0 \quad (18)$$



**Fig. 2** Lock-exchange in a channel of length  $L_l$  and height  $2h$ . The dotted line gives the interface between the two fluids and the gravity acts in the normal direction  $y$ .



**Fig. 3** Distribution of density and pressure at a initial condition

○ 운동량방정식:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_\alpha) + \frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho u_\alpha u_\beta + P \delta_{\alpha\beta}) - \frac{\partial}{\partial r_\beta} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} \right) + \lambda \frac{\partial u_\gamma}{\partial r_\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \rho g_\alpha = 0 \quad (19)$$

○ 에너지방정식:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left[ \rho u_\alpha \left( e + \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left[ \kappa \frac{\partial e}{\partial r_\alpha} + \mu u_\beta \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} \right) + \lambda u_\alpha \frac{\partial u_\gamma}{\partial r_\gamma} \right] + \rho g_\alpha u_\alpha = 0 \quad (20)$$

여기서 압력, 점성계수, 제2점성계수 및 열전도계수는 각각

$$P = \frac{2}{D} \rho e, \quad \mu = \frac{2}{D} \rho e \tau \left( \phi - \frac{1}{2} \right), \quad \lambda = -\frac{4}{D^2} \rho e \tau \left( \phi - \frac{1}{2} \right),$$

$$\kappa^* = \frac{2(D+2)}{D^2} \rho e \tau \left( \phi - \frac{1}{2} \right) \quad (21) \sim (24)$$

로 주어진다. 여기서  $D$ 는 차원수,  $\tau$ 는 시간간격을 나타낸다.

**Table 1** The parameters of the input data for numerical predictions

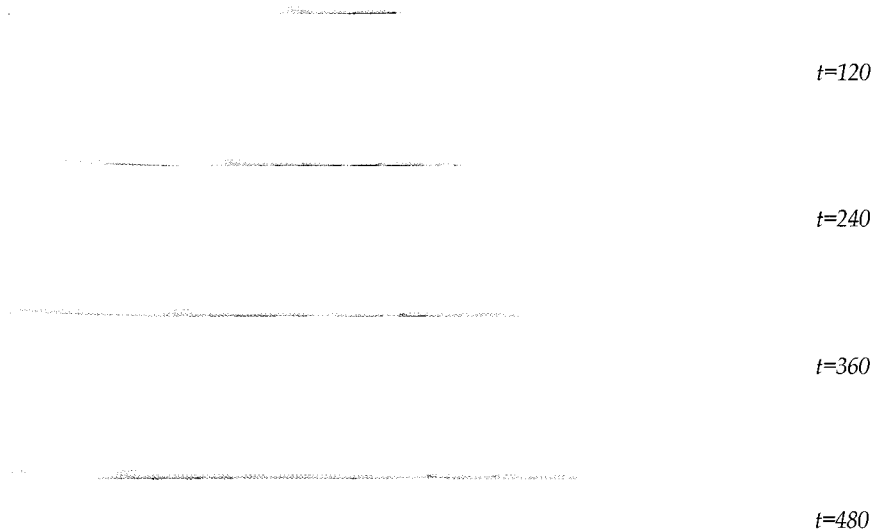
Case	$\rho_H$	$e_H$	$\rho_L$	$e_L$	$g$	$\phi$	$u_B$	$\nu$	$Gr$
1	6.0	0.5	3.0	1.0	0.02	0.5	0.516	0.375	$8.0 \times 10^4$
2	6.0	0.5	3.0	1.0	0.02	0.1	0.516	0.075	$2.0 \times 10^4$
3	6.0	0.5	3.0	1.0	0.02	0.02	0.516	0.015	$5.0 \times 10^3$
4	6.0	0.5	3.0	1.0	0.02	0.005	0.516	0.004	$8.0 \times 10^2$
5	6.0	0.5	3.0	1.0	0.02	0.001	0.516	$8 \times 10^{-4}$	$2.0 \times 10^2$

### 3. 수치계산

#### 3.1 계산조건

Lock Exchange Flow의 환경을 설정하기 위해 Fig. 2에 표시한 바와 같이 계산영역을 2개로 나누어서 각각의 영역에 밀도와 내부에너지(온도)가 다른 유체를 설정하여, 정수압 형태의 초기조건을 주었다. 초기상태  $t=0$ 의 시점에서 수문을 일시에 제거하여 시간경과와 더불어 흐름형태를 조사하였다. 우선, 단위 격자의 한 변의 길이를 1로 하고, 영역  $x$ 방향의 길이는 400,  $y$ 방향의 길이는 40으로 설정하였다.

경계조건은 전체벽면에서 점착조건 (no slip)을 주었으며, Table 1에 나타낸 바와 같이 확산방정식에 있어서 단일시간완



**Fig. 4** Two-dimensional lock-exchange flow between no-slip walls at a Grashof number of  $Gr=5 \times 10^5$ . Flow fields at difference times  $t$  are visualized by an internal energy distribution.

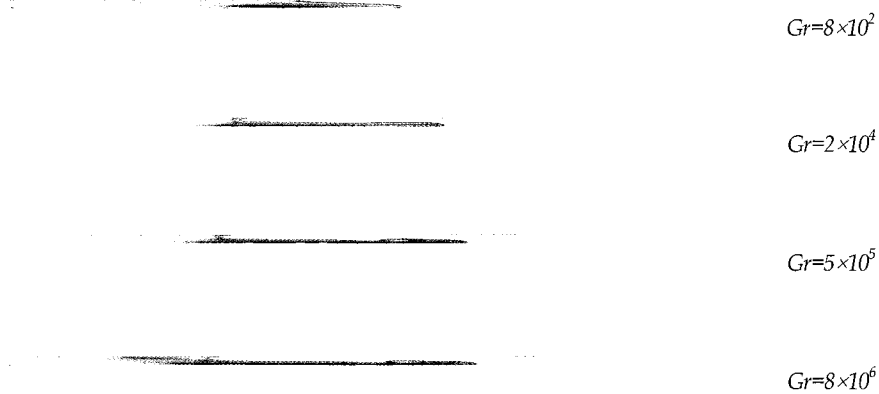


Fig. 5 A comparison of the variation of the Grashof number at  $t=240$  is visualized by isocontours of an internal energy.

화계수  $\phi$ 를 바꾸는 방법으로 점성계수를 변화시켜 중력류의 흐름형태가 어떻게 변하는가를 살펴보았다. 또한 좌우 영역의 압력차가 크면, 두 유체를 분리하고 있는 막을 열었을 때, 밀도차에 의한 약한 충격파가 발생하여 중력류가 크게 진동하기 때문에, 이러한 현상을 방지하기 위하여 평균압력(중간깊이에서의 압력)이 좌우영역에서 일치하도록 밀도 및 내부에너지를 설정했다. 즉, 내부에너지는 각 영역에서 일정하지만, Fig. 3에 나타난 바와 같이 밀도는  $y$ 방향으로 작용하는 중력으로 인하여 하부쪽으로 갈수록 증가하며, 하층부에서는 영역 H(무거운 유체) 쪽이 압력이 높으며, 상층부에서는 영역 L(가벼운 유체)의 압력이 높다.

### 3.2 중력류

중력류는 중력, 관성력 및 마찰력간의 평형에 의해 발생하는 현상이며, 이러한 흐름의 특징으로는 Grashof수의 파라미터로서 대표될 수가 있다. 본 연구에서는 2차원 수평채널만 고려하고 있으며, 모든 파라미터들은 채널의 절반높이  $h$ , 평균밀도  $\rho_{av}$  및 부력속도  $u_B$ 에 의해 무차원화되었다. 따라서 부력속도  $u_B$ 는 다음과 같이 정의될 수가 있다.

$$u_B = \sqrt{g^* h} \quad (25)$$

여기서  $g^*$ 는 일반적으로 감소된 압력을 나타내며, 중력가속도는 다음과 같이 표현된다.

$$g^* = g \frac{\Delta \rho}{\rho_{av}} \quad (26)$$

식(26)에서  $\Delta \rho = \rho_H - \rho_L$ 는 무거운 유체와 가벼운 유체의 차를 나타내며, Grashof수는

$$Gr = \left( \frac{u_B h}{\nu} \right)^2 \quad (27)$$

와 같이 표현될 수 있다. 식(27)에서 동점성계수  $\nu$ 는  $\nu = \mu / \rho$ 의 값을 갖는다.

## 4. 결과 및 해석

Fig. 4는  $Gr (= 5 \times 10^5)$ 인 경우의 중력류의 시간경과에 따른 내부에너지의 분포도를 나타내며, 흐름형태의 전반적인 구조를 나타내고 있다. 중력류의 선단부가 거의 일정속도로 진행하고 있으며, 선단 돌출부의 모습을 명확하게 보여주고 있다.

Fig. 5는 각각 다른  $Gr$ 수에 따른 중력류의 유동패턴을 무차원화된 시간( $t=240$ )에서 보여주고 있다.  $Gr$ 수가 작은 경우는  $Gr$ 수가 큰 유체보다도 선단부의 전진속도는 서서히 이동하며, 그 형상은 부드러운 곡선형태를 띄고 있다. 한편,  $Gr$ 수가 점점 크게 됨에 따라 전진속도는 점점 빠르게 되며,  $Gr$ 수가  $10^{4 \sim 5}$ 를 넘어가면서부터 선단 돌출부의 후부에는 와 파형의 불안정한 파(billow)가 발생한다. 그렇지만,  $Gr$ 수가  $10^{7 \sim 8}$ 이상일 때는 전진속도 및 선단부 형상도 큰 변화는 없게 되며, 이러한 특징은 실험 및 Boussinesq유체의 수치실험 결과에서도 같은 특성을 보인다(Simpson and Britter, 1979; Hartel et al., 2000). Fig. 6은 시간변화에 따른 선단부의 위치변화를 나타내며, 일정한 속도로 전진하는 것을 알 수가 있다.

전진속도를 부양속도  $u_B$ 로 무차원화시킨 Froude수는

$$Fr = \frac{u_p}{u_B} \quad (28)$$

과 같이 정의할 수가 있으며,  $u_p$ 는 선단부의 전진속도를 의미한다. Fig. 7은  $Fr$ 수와  $Gr$ 수와의 관계를 이용하여 LBM의 결과를 이전연구자들의 실험 및 수치해석 결과(DNS)와 함께 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 해수/담수를 이용한 실험 및 작은 밀도차를 갖는 Boussinesq근사의 결과와 매우 잘 일치함을 알 수가 있다. 밀도차가 큰 중력류의 경우(예를 들면 밀도비가 1.3~1.4를 넘는 경우), 무거운 유체의 선단부의 전진속도는 빠르게 이동하며, 가벼운 유체의 선단부는 천천히 전진하지만(Grobelbauer et al., 1993), 이번의 수치계산에서는 양자의 전진속도의 차는 거의 없었다.

한편, 밀도차가 적은 Boussinesq근사의 수치계산(Hartel et

al., 2000)에서는 흐름장은 모두 대칭적으로 되는 형태를 띠고 있지만, 본 연구에서 대상으로 한 압축성 유체모델의 경우에는 Fig. 3 및 Fig. 4에 나타난 바와 같이 무거운 유체의 선단 돌출 부분과 가벼운 유체의 선단 돌출부분은 전혀 다르며, 무거운 유체에서는 돌출부 후부에 와 파형의 불안정한 파가 발생하지만, 이에 반하여 가벼운 유체에서는 그러한 형태는 발생하지 않았으며, 발생하더라도 매우 경미한 것이었다.

Fig. 8은  $Gr (= 5 \times 10^5)$ 인 경우의 중력류의 선단부의 흐름의 모양을 확대하여 나타내고 있으며, Fig. 9의 실험결과(Britter and Simpson, 1978)와 정성적으로 잘 일치함을 알 수가 있다.

### 5. 결 론

차분격자볼츠만법의 압축성 유체모델을 도입한 수치계산에서 자연계에서 자주 접할 수 있는 중력류의 유동현상이 조사되었다. 압축성유체의 중력류는 선단속도, 선단부의 돌출 와의 형태, 발생조건 등에 관해서는 작은 밀도차를 갖는 Boussinesq

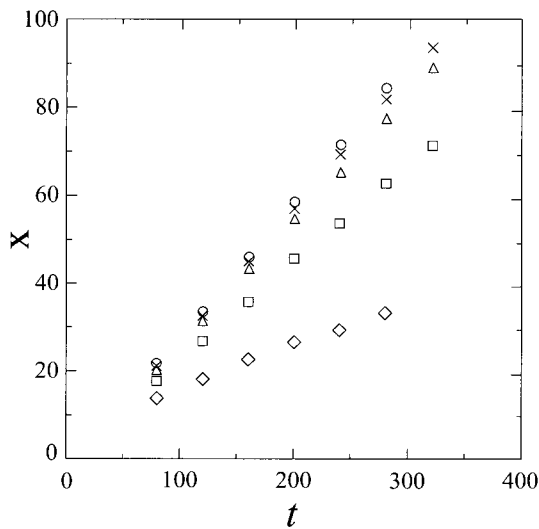


Fig. 6 Variation of the head of a gravity current at various time  $t$  by LBM:  $\diamond 8 \times 10^2$ ,  $\square 2 \times 10^4$ ,  $\triangle 5 \times 10^5$ ,  $\times 8 \times 10^6$  and  $2 \times 10^8$ .

유체의 결과와 잘 일치하였다. 단, 본 연구에서는 Boussinesq 근사를 이용한 비압축성 유체모델과 같이 흐름의 형상이 가벼운 유체 및 무거운 유체가 동시에 존재하는 흐름에서와 같은 대칭되는 현상은 보이지 않았다. 또한, 무거운 유체의 선단부에서 와 파형의 불안정한 파가 발생해도 가벼운 유체의 선단부에서는 발생하지 않거나, 발생하여도 미약하게 발생함을 알 수가 있었다.

### 후 기

이 논문은 2002년도 경상대학교 해양과학대학 부설 해양산업연구소 학술연구조성비 및 2002년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

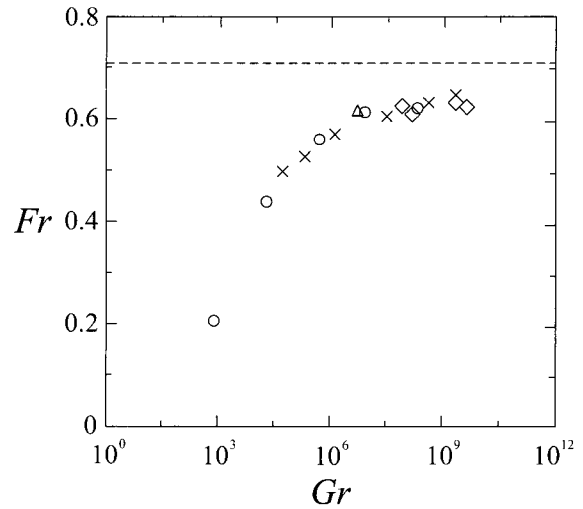


Fig. 7 The Froude number  $Fr$  at the head of a gravity current as a function of the Grashof number  $Gr$ :  $\circ$ , Two-dimensional LBM;  $\times$ , DNS(Hartel et al., 2000);  $\diamond$ , Keulegan(1957);  $\triangle$ , Simpson & Britter(1979). The dashed line is the theoretical result(Benjamin, 1968)

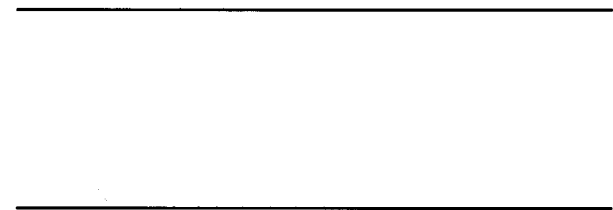


Fig. 8 Structure of the head of a two-dimensional gravity current. Flow shown by isocontours of internal energy.  $Gr=5 \times 10^5$

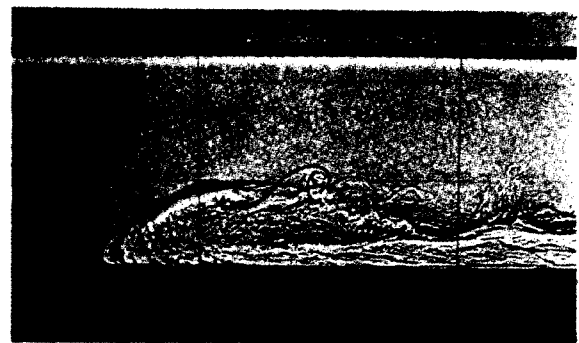


Fig. 9 Experimental result by Simpson et al.(1979)

### 참 고 문 헌

Alexander, F.J., Chen, S. and Sterling, J.D. (1993). "Lattice Boltzmann Thermo-hydrodynamic", Phys. Rev. E, Vol

- 47, pp 2249-2252.
- Benjamin, T.B. (1969). "Gravity Currents and Related Phenomena", *J. Fluid Mech.*, Vol 31, pp 209-248.
- Britter, R.E. and Simpson, J.E. (1978). "Experiments on the Dynamics of a Gravity Currents Head", *J. Fluid Mech.*, Vol 88, pp 223-240.
- Cao, N., Chen, S., Jin, S. and Martinez, D. (1997). "Physical Symmetry and Lattice Symmetry in the Lattice Boltzmann Method", *Phys. Rev. E*, Vol 55, R21-R24.
- Chen, Y., Ohashi, H. and Akiyama, M. (1994). "Thermal Lattice Bhatnagar-Gross-Krook Model without Nonlinear Deviations in Macrodynamic Equation", *Phys. Rev. E*, Vol 50, pp 2775-2783.
- Grobelbauer, H.P., Fanelop, T.K. and Britter, R.E. (1993). "The Propagation of Intrusion Fronts of High Density Ratios", *J. Fluid Mech.*, Vol 250, pp 669-687.
- Hartel, C., Meiburg, E. and Necker, F. (2000). "Analysis and Direct Numerical Simulation of the Flow at a Gravity Current Head. Part 1. Flow Topology and Front Speed for Slip and No-slip Boundaries", *J. Fluid Mech.*, Vol 418, pp 189-212.
- Huang, J., Xu, F., Vallieres, M., Feng, D.H., Qian, Y.H., Fryxell, B. and Strayer, M.R. (1997). "A Thermal LBGK Model for Large Density and Temperature Differences", *Int. J. Mod. Phys. C*, Vol 8, No 4, pp 827-841.
- Huppert, H.E. and Simpson, J.E. (1980). "The Slumping of Gravity Currents", *J. Fluid Mech.*, Vol 99, pp 785-799.
- Keulegan, G.H. (1957). An Experimental Study of the Motion of Saline Water from Locks into Fresh Water Channels, U.S. Natl. Bur. Stand. Rep. 5168.
- McNamara, G. and Zanetti, G. (1988). "Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice Gas Automata", *Phys. Rev. Lett.*, 61, pp 2332-2335.
- Seta, T., Kono, K., Martinez, D. and Chen, S. (1999). "Lattice Boltzmann Scheme for Simulating Two-Phase Flows", *JSME, B*, 65-634, pp 1955 - 1963.
- Simpson, J.E. (1997). *Gravity Currents: in the Environment and the Laboratory*, Cambridge University Press.
- Simpson, J.E. and Britter, R.E. (1979). "The Dynamics of Head of a Gravity Current Advancing over a Horizontal Surface", *J. Fluid Mech.*, Vol 94, pp 477-495.
- Tsutahara, M. and Kang, H.K. (2002). "A Discrete Effect of the Thermal Lattice BGK Model", *J. Sta. Phys.*, Vol 107, No 112, pp 479-498.
- Wolf-Gladrow, D.A. (2000). "Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models", *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, pp 159-247.

---

2002년 7월 23일 원고 접수

2002년 9월 30일 최종 수정본 채택