

축대칭 문제에서의 동적 응력집중 해석

심우진[†] · 이성희^{*}

(2002년 3월 18일 접수, 2002년 8월 7일 심사완료)

Numerical Analysis of Dynamic Stress Concentrations in Axisymmetric Problems

Woo-Jin Sim and Sung-Hee Lee

Key Words: Axisymmetric(축대칭), Transient(과도), Dynamic Stress Concentration(동적 응력집중), Finite Element Equation(유한요소방정식)

Abstract

In this paper, the finite element equations for the time-domain numerical analysis of transient dynamic axisymmetric problems are newly presented, which are based on the equations of motion in convolution integral as in the previous paper. A hollow cylinder subjected to a sudden internal pressure is solved first as a benchmark problem and then the dynamic stress concentrations are analyzed in detail for hollow cylinders having inner and outer circumferential grooves subjected to sudden internal or axial loadings, all the computed results are compared with the existing or the computed ones obtained by using the commercial finite element packages Nastran and Ansys to show the validity and capability of the presented method.

1. 서론

축대칭 형상을 가진 물체는 산업계에 많이 존재하며, 그러한 예들은 압력 용기, 보일러, 터빈, 펌프, 그리고 자동차나 비행기, 배, 잠수함 등의 설계에서 자주 접할 수 있다. 그리고 그러한 요소들이 노치나, 홈, 원공 등의 기하학적 불연속을 포함하게 되면 응력집중현상이 발생하게 되어 설계시 주의를 요하게 된다.

현재까지 정적하중하에서 축대칭 문제의 응력집중해석은 여러 문헌^(1~8)에서 많이 취급되고 있

으나, 과도 동적하중하의 응력해석^(9~12)에서 축대칭 문제의 응력집중에 관한 연구는 드문 편이다. 축대칭 문제는 원칙적으로 3차원 문제이므로 이론적인 해석이 어려우며 실험보다는 수치적 해법에 더 많이 의존하게 된다.

본 논문에서는 유한요소법을 도구로 하여 축대칭 문제를 해석하는데, 축대칭 문제의 여러 형상 중에서 원통형 용기를 택하고, 충격하중과 경계조건 그리고 기하학적 불연속이 응력집중에 끼치는 영향을 수치해석적으로 조사한다. 이를 위하여 본 논문에서는 기 발표된 시간영역에서의 과도 선형 동탄성 해법⁽¹³⁾을 바탕으로, 축대칭 형상과 하중을 받는 문제들의 동적 해석을 위한 유한요소방정식을 새로이 유도, 제시한다. 제시된 축대칭 유한요소방정식의 타당성을 보이기 위하여, 기본 예제로서 충격 내압을 받는 원통 문제를 해석하고, 나머지 응용 예제들에서는 원통의 내측

[†] 책임저자, 회원, 금오공과대학교

E-mail : wjsim@kunt.kumoh.ac.kr

TEL : (054)467-4224/4221 FAX : (054)467-4221

^{*} 금오공과대학교 대학원

과 외측에 흡을 지닌 문제들의 응력집중을 해석한다. 응용 예제들의 경우에는 계산된 수치결과를 비교할 문헌들을 찾지 못하였으므로, 다목적 공학문제 해석프로그램인 Nastran이나 Ansys를 이용하여 해석하고 비교 검증한다.

2. 축대칭 해석을 위한 유한요소정식화

2.1 지배방정식

탄성 문제의 동적 해석을 위한 지배방정식의 일반적 형태는 다음처럼 텐서로써 표기된다.

$$\sigma_{ij} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3)$$

여기서, σ_{ij} 는 응력, ρ 는 밀도, f_i 는 체적력, u_i 는 변위, ϵ_{ij} 는 변형률, D_{ijkl} 은 탄성계수 행렬이다. 그리고, 위와 같은 지배방정식을 풀기 위한 상계 및 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_i &= \hat{u}_i, & \dot{u}_i &= \hat{i}_i \\ u_i &= u_{0i}, & \dot{u}_i &= \dot{u}_{0i} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, \hat{u}_i 와 \hat{i}_i 는 경계면에서의 변위와 표면력값이며, u_{0i} 와 \dot{u}_{0i} 는 변위와 속도에 관한 초기값이다.

식 (1), (2), (3) 및 (4)는 축대칭 문제의 경우에 원통좌표계 (r, θ , z)로 표현되며^(14,15) 식 (2), (3)은 다음처럼 행렬식으로 표현된다.⁽¹⁻³⁾

i) 변위

$$\{u\} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = [M] \{\Delta\} \quad (5)$$

여기서, u, w 는 r과 z 방향 변위이며

$$\{\Delta\}^T = \{(u_1, w_1), (u_2, w_2), \dots, (u_m, w_m)\} \quad (6)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & \dots & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (7)$$

ii) 변형률

$$\{\epsilon\} = \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} = [B] \{\Delta\} \quad (8)$$

여기서,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \dots & \frac{N_m}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial z} & \frac{\partial N_m}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (9)$$

iii) 응력

$$\{\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} = [D] \{\epsilon\} = [D][B] \{\Delta\} \quad (10)$$

여기서,

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

위 식들에서, $\{\Delta\}$ 는 절점변위 벡터, $[M]$ 은 형상함수, $[B]$ 는 변형률-변위, 그리고 $[D]$ 는 탄성계수 행렬이다.

2.2 유한요소방정식

동탄성 문제의 유한요소해석을 위한 정식화 방법에는 두 가지가 있다. 첫째는 주어진 미분방정식에 변분을 취하고 부분적분하여 얻어진 변분적분식(variational form)을 바탕으로 하는 방법과 동탄성 포텐셜에너지 최소화 원리를 이용하는 방법이다. 변위 근사에 의한 유한요소법의 경우에는 행렬식 표현과 함께 후자의 방법을 많이 이용한다.

기 발표된 논문⁽¹³⁾에서는 등분된 시간축상에서 변수분리된 적분식을 푸는데 있어서, 각 시간구간에서 종속함수가 일정하게 변한다는 가정과 선형적으로 변한다는 가정 하에, 체적력이 없고 외력이 정지상태에서 초기에 충격적으로 가해진다는 조건하에서, 각각의 유한요소방정식들을 유도하였다. 행렬식으로 표현된 그 유한요소방정식들은 동탄성 문제의 일반적 해석을 위한 것이므로, 그 식에 앞 절에서 설명된 축대칭 문제에서의 응력, 변형률 및 변위에 관한 행렬식 그리고 원통좌표계의 미소체적($2\pi r dr dz$)과 미소면적(내압: $2\pi r dz$, 축하중: $2\pi r dr$)을 대입하면 원통형 축대칭 문제에 관한 유한요소방정식이 얻어진다. 이와 같은 방법은 구형상의 문제에도 마찬가지로 적용될 수 있다.

먼저, 각 시간구간에서 종속함수가 일정하게 변할 경우의 축대칭 문제 해석을 위한 유한요소방정식은 다음처럼 표현된다:

$$[\bar{K}]\{\Delta\}^N = \{\bar{F}(t)\} + \{\bar{R}\}^{N-1} \quad (12)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [K] &= 2\pi \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] r dr dz, \\ [M] &= 2\pi \int_{\Omega} \rho [M]^T [N] r dr dz, \\ [\bar{K}] &= [\frac{1}{2} \Delta t^2 [K] + [M]], \\ \{\bar{F}\} &= \pi \int_r [M]^T \hat{f}_i r dz, \\ \{\bar{R}\}^{N-1} &= -\frac{1}{2} \Delta t^2 [K] \sum_{n=1}^{N-1} (2N-2n+1) \{\Delta\}^n \end{aligned} \quad (13)$$

식 (12)에서 $[\bar{K}]$ 는 일정하므로, 시간축상에서 매시간 계산작업은 $t = N\Delta t$ 로 하여 $\{\bar{F}\}$ 을 계산하고, $\{\bar{R}\}^{N-1}$, 즉, 과거의 동적변위가 현시간에 미치는 영향을 고려한 후에, 가우스 소거법을 이용해서 식 (12)를 풀면 된다.

한편, 각 시간구간에서 종속함수가 선형적으로 변할 경우에도 축대칭 유한요소방정식이 마찬가지로 얻어진다:

$$\begin{aligned} & [\frac{1}{6} \Delta t^2 [K] + [M]] \{\Delta\}^N \\ & = \frac{t^2}{2} \{F\} - \Delta t^2 [K] \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) \{\Delta\}^n \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, 관련된 변수들은 식 (13)과 같다.

3. 수치해석 예

축대칭 해석의 대상으로 충격 하중(내압, 인장)을 받는 길이가 유한한 원통 문제를 택하였으며, 처음 예제에서는 제시된 축대칭 유한요소방정식들의 타당성을 보이고, 나머지 예제들에서는 원통 내에서 기하학적 불연속에 의한 동적 응력집중문제를 다루었다. 수치계산을 위하여 사용된 유한요소는 등매개변수 2차 사변형 요소이며, 물성치로서 밀도는 $\rho = 7.8 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$, 탄성계수는 $E = 2.0 \times 10^6 \text{ MPa}$ ($2.0 \times 10^9 \text{ kg/mm sec}^2$), 프와송비는 $\nu = 0.3$ 의 값을 사용하였고, 내압 (p) 및 인장력 (σ_0)의 크기는 $2.0 \times 10^4 \text{ MPa}$ ($2.0 \times 10^7 \text{ kg/mm sec}^2$) 이다. 계산된 수치결과를 비교하기 위하여, Nastran과 Ansys 프로그램을 이용하였는데, 전자의 경우에는 삼각형 2차요소를, 후자의 경우에는 본 논문처럼 사변형 2차요소를 사용하였다. 예제 해석의 설명 속에 나오는 무차원 변수 β 는 요소에 대한 시간증분의 상대적 크기를 말해주며 다음처럼 정의된다.

$$\beta = c \Delta t / l_e \quad (15)$$

여기서 $c = [E(1-\nu) / \rho(1-\nu-2\nu^2)]^{1/2}$ (종파속도), Δt 는 시간증분, 그리고 l_e 는 가장 작은 요소의 특징길이 이다.

3.1 충격 내압을 받는 원통

외경(b)과 내경(a)의 비가 2:1이며 원통의 길이(L)가 외경의 4배이고 충격 내압 $pH(t)$ (여기서 $H(t)$: 단위계단함수)를 받는 원통이 있다. 이 문제를 해석하기 위한 축대칭 유한요소모델은 Fig.

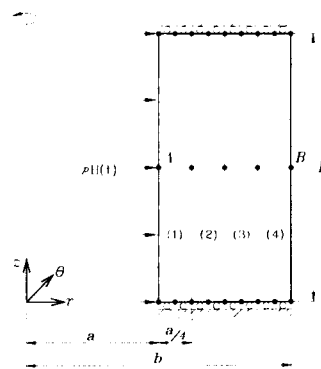


Fig. 1 Axisymmetric finite element model

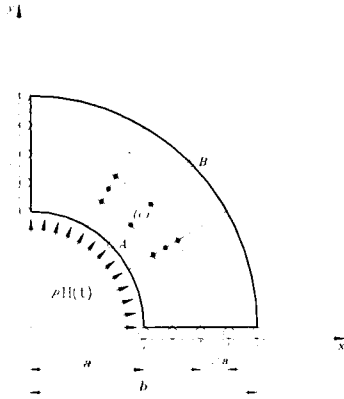


Fig. 2 Plane strain finite element model

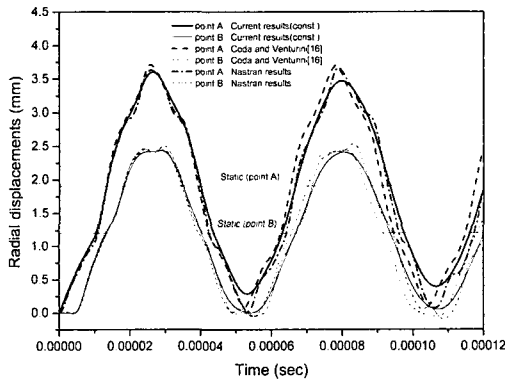


Fig. 3 Radial displacements in hollow cylinder subject to sudden internal pressure(constant time variation)

1과 같으며, 2차원 평면변형률 가정^(13,16)에 의한 해석(Fig. 2)과 비교하기 위하여, 상하단을 물러로 구속하였다. Fig. 1의 모델은 z방향으로 분할되지 않았는데, 그 이유는 상하단이 물러로 구속된 경우에 사각형 요소를 기본으로 사용하는 축대칭 유한요소해석(본 논문과 Ansys)에서는 z방향으로의 매쉬 분할과 원통의 길이가 수치결과에 거의 영향을 끼치지 않기 때문이다. 그러나 삼각형 요소를 매쉬의 기본으로 사용하는 Nastran의 경우에는 해의 정밀도를 높이기 위하여 z방향 분할이 필요하였다.

Fig. 3과 4에는 원통의 내벽(A점)과 외벽(B점)에서의 반경방향 변위를, 종속함수가 시간구간에서 일정할 경우와 선형적인 경우에 대한 축대칭 유한요소방정식들 식 (12)와 (14), 시간중분의 크기 $\Delta t = 2.69 \times 10^{-7}$ sec ($\beta = 0.2$), 그리고 Fig. 1의

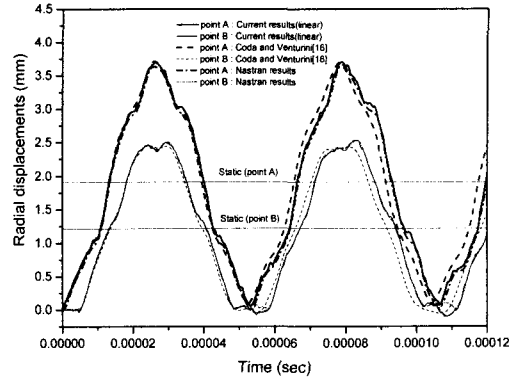


Fig. 4 Radial displacements in hollow cylinder subject to sudden internal pressure(linear time variation)

축대칭 유한요소모델(요소수: 4개, 절점수: 23개)을 이용한 계산결과와, 경계요소법을 사용한 Coda와 Venturini⁽¹⁶⁾에 의한 수치결과, Fig. 2의 평면변형률 유한요소모델⁽¹³⁾(요소수: 12개, 절점수: 51개)에 의한 수치결과, Nastran에 의한 수치결과(요소수: 100개, 절점수: 231개), 그리고 정적하중에 의한 수치결과들(A점: 1.9065 mm, B점: 1.2133 mm)을 함께 비교하였다. 본 논문의 축대칭 모델과 평면변형률 모델에 의한 수치결과들은 완전히 일치하였으며(그림에서 생략), Coda와 Venturini⁽¹⁶⁾보다는 Nastran에 의한 수치결과에 더 잘 일치하고 있다. 축대칭 모델의 사용결과 적은 수의 요소로도 타 수치결과들만큼의 정확성을 얻을 수 있음을 알 수 있다. 참고로, Ansys (Fig. 1과 동일 모델 사용)에 의한 해석결과도 조사하였는데 그 경향은 그림 3과 4와 같으나 크기가 그림의 수치들보다 조금 더 큰 곡선(제일 바깥쪽)으로 그려진다. 그러나, 그림의 복잡성으로 인하여 위 그림들에 포함시키지 않았다.

Fig. 5와 6에는 원통의 내측(A점)과 외측(B점)에서의 반경방향, 접선방향, 그리고 축방향 응력을 도시하였다. 그림에서 본 논문의 해석결과(current results)는 수치결과의 안정성이 높은 축대칭 유한요소방정식 식 (12)(constant time variation)를 사용하여 얻어졌으며(이것은 다음의 예제들에서도 마찬가지임), Nastran과 Ansys에 의한 수치결과들과 비교하였는데, Fig. 5에서는 후자(Ansys)에 의한 수치결과가 본 해석의 결과와 더 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

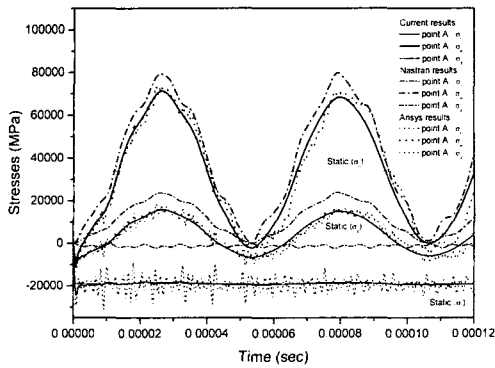


Fig. 5 Stress variations at point A of hollow cylinder subject to sudden internal pressure

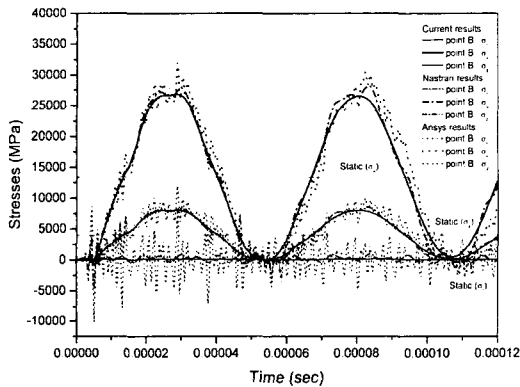


Fig. 6 Stress variations at point B of hollow cylinder subject to sudden internal pressure

3.2 외벽에 반원형 홈을 지닌 원통이 충격 내압을 받을 때

Fig. 7에서처럼 원통 두께($t=a$)의 1/4배 되는 반경($c=t/4$)을 지닌 원형 홈이 바깥 외벽에 파여진 원통이 초기에 충격 내압 $pH(t)$ 를 받는다. Fig. 7 (a) (b)에는 이 문제를 해석하기 위한 기하학적 형태와 유한요소모델이 그려져 있다. 이때 계산에 사용된 요소수는 200개, 절점수는 685개이며, Nastran 수행시 사용된 요소수는 824개, 절점수는 1753개이다, 그리고 시간증분의 크기는 $\Delta t = 1.07 \times 10^{-7}$ sec ($\beta=0.25$)로 하였다. 이 예제에서는 상하단을 구속했을 때(롤러지지)와 안 했을 때(자유단) 경계조건이 응력집중에 끼치는 영향을 조사한다.

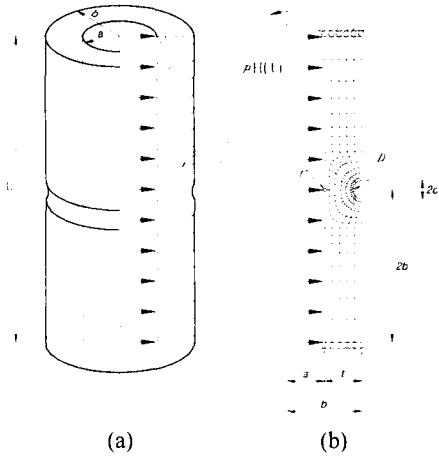


Fig. 7 (a) Hollow cylinder with external circumferential groove
(b) Axisymmetric finite element model with external groove

Fig. 8에는 내벽(C점)에서의 반경방향 변위를 비교하였는데, 경계가 롤러지지와 자유단일 경우 초기에는 큰 차이가 없으나, 시간이 흐름에 따라 자유단에서 더 큰 변위를 보이면서 점차 사이가 벌어져 감을 알 수 있다. 참고로 수치결과의 비교를 위하여 정적해(수치결과)를 도시하였다.

Fig. 9, 10에는 반원형 홈의 응력집중점(D점)에서의 응력(σ_θ, σ_z)의 크기를 비교하였다. Fig. 9에서는 양단이 롤러지지일 경우에 본 논문의 해법과 Nastran에 의한 수치결과를 비교하였으며, 접선응력이 축방향 응력보다 더 크게 나타나고 있다. 본 논문의 해석결과는 $t = 2.8248 \times 10^{-5}$ sec 부근에서 접선응력의 최대치가 $(\sigma_\theta)_{max} = 4.3790 \times 10^4$ MPa 임을 알 수 있는데, 이를 해당 정적해 2.17×10^4 MPa와 비교하면 2.02배 정도 됨을 알 수 있다. Fig. 10에서는 양단이 자유단일 경우에 대한 접선응력과 축방향 응력을 비교했는데, $t = 5.3286 \times 10^{-5}$ sec 부근에서 축방향 응력이 최대치 $(\sigma_z)_{max} = -7.731 \times 10^4$ MPa를 보이고 있다. 그런데 그 값은 $t = 2.8034 \times 10^{-5}$ sec 부근에서 접선응력의 최대치 $(\sigma_\theta)_{max} = 4.7750 \times 10^4$ MPa보다 1.62배나 되고, 축방향 정적해 2.838×10^3 MPa보다는 무려 27배나 되며 그 부호도 반대가

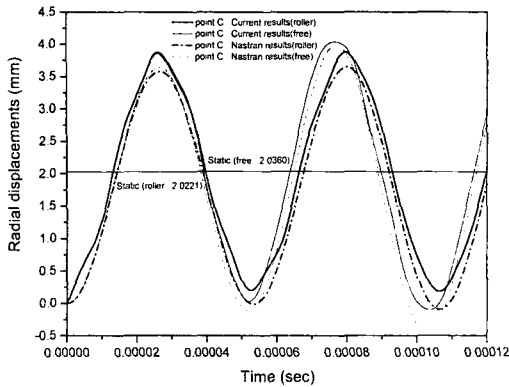


Fig. 8 Radial displacements at point C due to free end and roller support boundary conditions

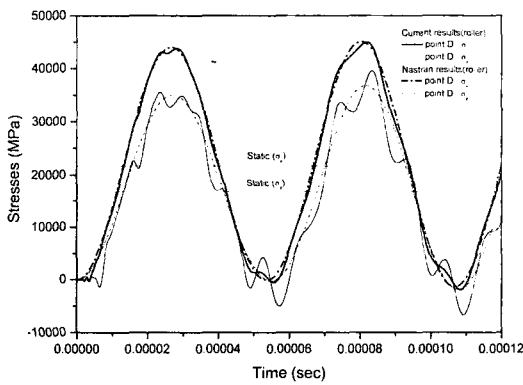


Fig. 9 Stress concentrations at point D due to roller support boundary condition

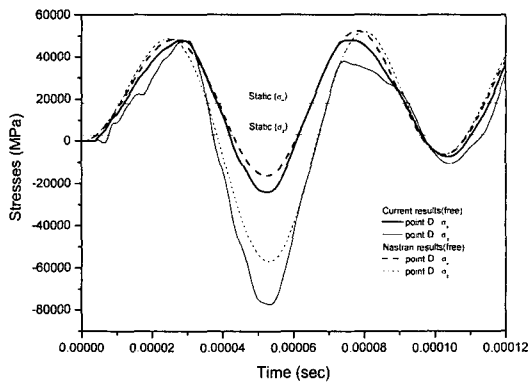


Fig. 10 Stress concentrations at point D due to free end boundary condition

됨을 알 수 있다. 이러한 결과는 정적해에서는 우리가 예측할 수 없었던 것으로, 상하가 자유단이고 원주홈을 지닌 원통이 내압을 받을 경우에 축방향 응력이 동적 파손해석에서 주 변수가 될 수 있음을 보여준다. 참고로 Fig. 9, 10의 수치결과를 Ansys(요소수: 418개, 절점수: 1383개; 이후 해석에서도 동일한 메쉬가 사용됨)에 의해서도 확인하였는데 그 경향이 Nastran보다는 본 해석과 매우 유사하였다, 그러나 수치결과의 많은 떨림으로 인하여 위 그림들에 포함시키지 않았다.

3.3 외벽에 반원형 홈을 지닌 원통이 충격 인장을 받을 때

Fig. 11에서처럼 원통 두께($t=a$)의 1/4배 되는 반경($c=t/4$)을 지닌 원형 홈이 바깥 외벽에 파여진 원통이 초기에 충격 인장 $\sigma_0 H(t)$ 를 받는다. Fig. 11 (a) (b)에는 이 문제를 해석하기 위한 기하학적 형태와 유한요소모델이 그려져 있는데, 메쉬 형상은 앞 예제와 동일하며 하중만이 다르다.

Fig. 12에는 인장점(E점)과 반원형 홈의 응력집중점(F점)에서의 축방향 변위를 $\Delta t = 2.69 \times 10^{-7}$ sec ($\beta = 0.62$)로 하여 Nastran과 Ansys에 의한 수치결과들과 함께 비교하였는데, 전반적으로 그

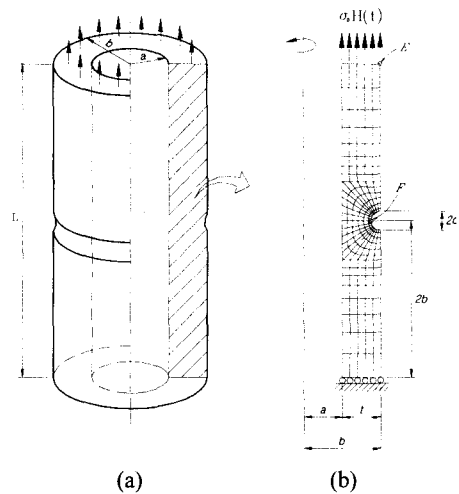


Fig. 11 (a) Hollow cylinder with external circumferential groove
(b) Axisymmetric finite element model with external groove

크기와 경향이 거의 일치하고 있다. 참고로 그림에 도시된 정적해(수치결과)는 E와 F점에서 각각 8.3984 mm, 4.2041 mm 이다. 그러나 Fig. 12에서 Nastran에 의한 수치결과는 응력파가 도달하지 않았는데도 반원형 홈의 응력집중점에서 변위를 보이고 있는데 이것은 그 이후의 수치결과에 좋지 않은 영향을 끼칠 수 있다.

Fig. 13에는 응력집중점(F점)에서의 응력(σ_r, σ_z)의 크기를 Nastran과 Ansys에 의한 수치결과와 비교하였는데, 크기에 약간의 차이는 있으나 전체적인 경향은 일치하고 있다. 본 논문에 의한 해석의 경우 $t=1.1352 \times 10^{-4}$ sec 부근에서 축방향 응력이 최대치 (σ_z)_{max} = 1.607×10^5 MPa 임을 알 수 있는데, 이를 정적해(수치결과) 7.252×10^4 MPa와 비교하면 약 2.22배 정도 됨을 알 수 있다. 접선응력의 경우에도 $t=1.1433 \times 10^{-1}$ sec

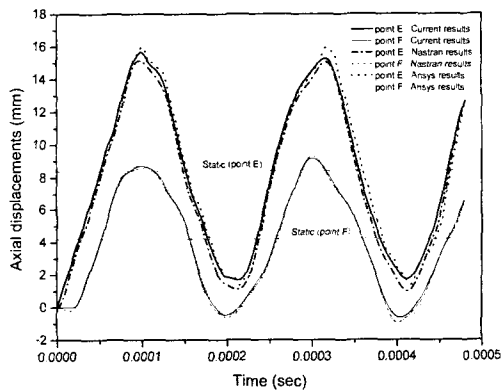


Fig. 12 Axial displacements at point E under the axial load

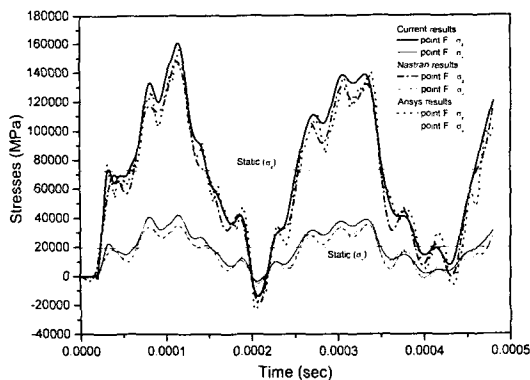


Fig. 13 Stress concentrations at point F under the axial load

부근에서 최대치가 (σ_θ)_{max} = 4.205×10^4 MPa 임을 알 수 있는데, 이를 정적해(수치결과) 1.960×10^4 MPa와 비교하면 약 2.15배 정도 됨을 알 수 있다. 그리고, 반원형 홈의 응력집중점(F점)에서의 축방향 응력의 최대치 (σ_z)_{max}와 접선응력의 최대치 (σ_θ)_{max}를 비교하면 3.82배 정도가 됨을 알 수 있다. 참고로 정적하중의 경우에 응력집중점에서 σ_z 와 σ_θ 의 비는 3.7배이다.

3.4 내벽에 반원형 홈을 지닌 원통이 충격 인장을 받을 때

Fig. 14 (a)에서처럼 원통 두께($t=a$)의 1/4배 되는 반경($c=t/4$)을 지닌 원형 홈이 내벽에 파여진 원통이 초기에 충격 인장 $\sigma_0 H(t)$ 를 받는다. Fig. 14 (a) (b)에는 이 문제를 해석하기 위한 기하학적 형태와 유한요소모델이 그려져 있다.

Fig. 15에는 인장점(G점)과 반원형 홈의 응력집중점(H점)에서의 축방향 변위를 $\Delta t = 2.69 \times 10^{-7}$ sec ($\beta=0.62$)로 하여 Nastran과 Ansys에 의한 수치결과와 비교하였는데, 그 경향이 앞의 예제에서와 유사함을 알 수 있다. 참고로 그림에 도시된 정적해(수치결과)는 G와 H점에서 각각 8.2088 mm, 4.1088 mm 이다.

Fig. 16에는 반원형 홈의 응력집중점(H점)에서

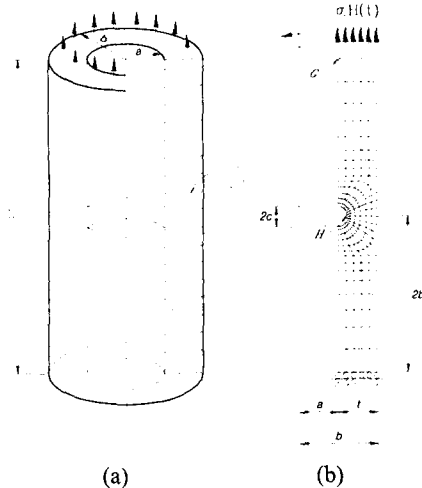


Fig. 14 (a) Hollow cylinder with internal circumferential groove
(b) Axisymmetric finite element model with internal groove

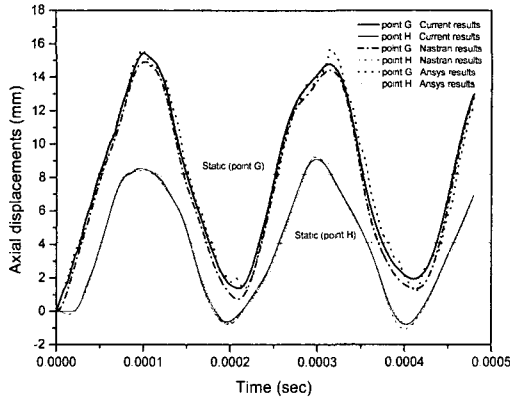


Fig. 15 Axial displacements at point G and H under the axial load

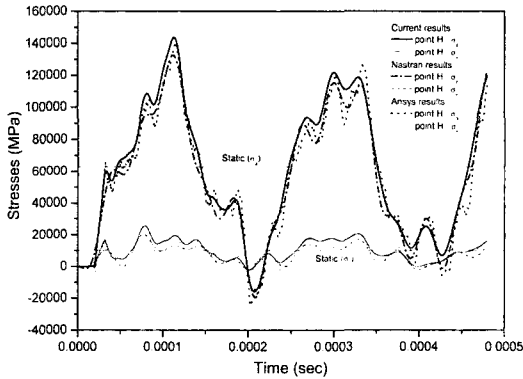


Fig. 16 Stress concentrations at point H under the axial load

의 응력분포(σ_θ , σ_z)의 수치결과를 비교하였는데, 그 경향이 홈이 외벽에 존재할 경우와 유사하나 홈이 내벽에 존재할 때보다 외벽에 존재할 때 응력집중이 더 커짐을 알 수 있다. Fig. 16에서 $t = 1.1298 \times 10^{-4}$ sec 부근에서 축방향 응력의 최대치가 $(\sigma_z)_{max} = 1.437 \times 10^5$ MPa 임을 알 수 있는데, 이를 정적해의 수치결과 6.306×10^4 MPa와 비교하면 약 2.28배 정도 됨을 알 수 있다. 접선응력의 경우에도, $t = 7.8817 \times 10^{-5}$ sec 부근에서 최대치가 $(\sigma_\theta)_{max} = 2.564 \times 10^4$ MPa 임을 알 수 있는데, 이를 정적해의 수치결과 1.018×10^4 MPa와 비교하면 약 2.52배 정도 됨을 알 수 있다. 그리고, 반원형 홈의 응력집중점(H점)에서의 축방향 응력의 최대치 $(\sigma_z)_{max}$ 와 접선응력의 최대

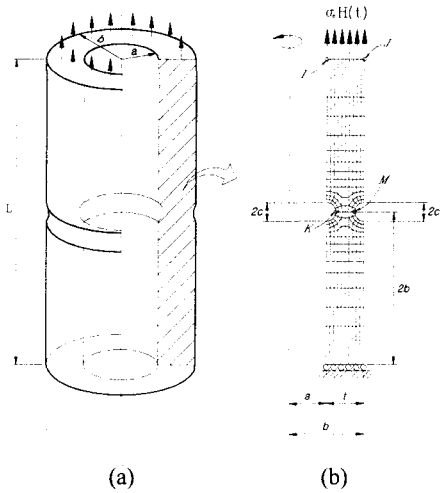


Fig. 17 (a) Hollow cylinder with internal and external circumferential grooves
(b) Axisymmetric finite element model with internal and external grooves

치 $(\sigma_\theta)_{max}$ 를 비교하면 5.60배가 되어, 홈이 안쪽에 있을 때의 비(3.82배)보다 더 커짐을 알 수 있다. 참고로 정적하중의 경우에 응력집중점에서 σ_z 와 σ_θ 의 비는 6.19배이다.

3.5 내벽과 외벽에 반원형 홈을 지닌 원통이 충격 인장을 받을 때

Fig. 17에서처럼 원통 두께($t=a$)의 1/4배 되는 반경($c=t/4$)을 지닌 반원형 홈이 내벽과 외벽에 파여진 원통이 초기에 충격 인장 $\sigma_0 H(t)$ 를 받는다. Fig. 17 (a) (b)에는 이 문제를 해석하기 위한 기하학적 형태와 유한요소모델이 그려져 있다. 이때 계산에 사용된 요소수는 244개, 절점수는 821개이며, Nastran 수행시 사용된 요소수는 1072개, 절점수는 2257개, 그리고 Ansys 수행시 사용된 요소수는 560개, 절점수는 1833개이다. 또한 시간증분의 크기는 $\Delta t = 2.69 \times 10^{-7}$ sec ($\beta = 0.71$)이다.

Fig. 18에는 인장점(J점)과 반원형 홈의 응력집중점(M점)에서의 축방향 변위를 비교하였는데, 앞의 예제들과 유사한 경향을 보임을 알 수 있다.

Fig. 19, 20에는 내·외측 반원형 홈의 응력집중점(K, M점)에서의 응력(σ_θ , σ_z)의 크기를 비교하였다. K점의 경우에는 축방향 응력의 최대치가

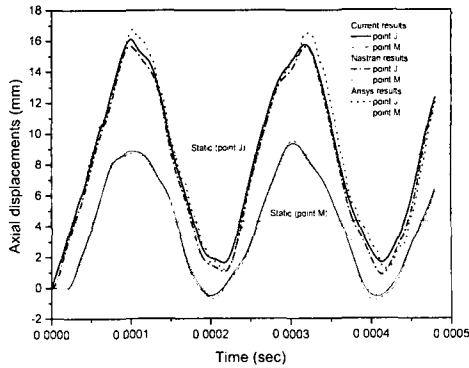


Fig. 18 Axial displacements at point J and M under the axial load

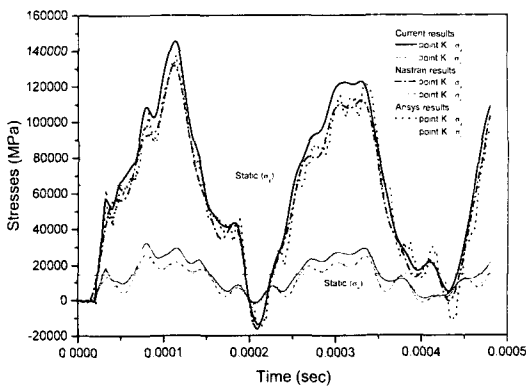


Fig. 19 Stress concentrations at point K under the axial load

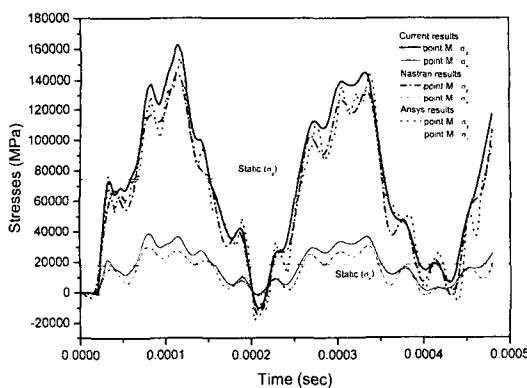


Fig. 20 Stress concentrations at point M under the axial load

$t = 1.13249 \times 10^{-4}$ sec 부근에서 $(\sigma_z)_{max} = 1.454 \times 10^5$ MPa 임을 알 수 있는데, 이를 정적해 6.484×10^4 MPa와 비교하면 2.24배 정도 된다. 그리고 접선응력의 최대치는 $(\sigma_\theta)_{max} = 3.236 \times 10^4$ MPa 임을 알 수 있는데, 이를 정적해 1.479×10^4 MPa와 비교하면 약 2.19배 정도 됨을 알 수 있다. 한편, M점의 경우에는 $t = 1.13249 \times 10^{-4}$ sec 부근에서 축방향 응력이 최대치 $(\sigma_z)_{max} = 1.624 \times 10^5$ MPa를 가짐을 알 수 있으며, 이를 정적해 7.439×10^4 MPa와 비교하면 약 2.18배 정도 됨을 알 수 있다. 또한 최대 접선응력은 $t = 8.0162 \times 10^{-5}$ sec 부근에서 $(\sigma_\theta)_{max} = 3.875 \times 10^4$ MPa 임을 알 수 있는데, 이를 정적해 1.795×10^4 MPa와 비교하면 2.16배 정도 된다.

지금까지 결과의 일부 요약으로써, 동적 축하중하의 축방향 응력의 최대치(동적 응력집중값)를 정적해(정적 응력집중값)로 나눈 값을 비교해 보면, 내벽에 홈이 있을 때가 2.28배, 외벽에 홈이 있을 때가 2.22배, 그리고 내·외벽에 홈이 있을 때가 2.18배가 되어, 동적하중이 응력집중에 끼치는 영향이 거의 비슷함을 알 수 있다. 그리고 이 결과는 동적하중이 정적하중에 비하여 응력집중을 2배 이상 더 증가시킨다는 사실을 밝혀준다.

하중이 동적일 때는 정적일 경우와는 달리 경계조건뿐 아니라 원통의 길이나 두께가 응력집중에 상당히 큰 영향을 끼치게 되는데 수치해석적으로 조사결과 다음과 같은 일부 사실을 발견하였다: 원통의 두께가 두꺼워지면 내벽과 외벽에서의 최대 변위값은 점차 감소하고, 원통의 두께가 얇아지면 변위 곡선의 기울기가 급하게 상승하여 거의 직선적으로 표현된다. 내압을 받을 경우에 길이에 따른 변화는 상하가 물러지지 되었을 때는 크게 영향을 받지 않으나, 자유단일 경우에는 길이가 커짐에 따라 축방향 변위 및 응력이 크게 증가한다. 홈이 있는 원통이 충격 인장을 받을 때는 원통의 길이가 짧으면 변위 및 응력이 시간에 따라 일정한 곡선을 반복하지 않으나, 원통의 길이가 증가되면 어느 정도 일정한 진폭과 주기를 반복하는 곡선을 나타낸다.

4. 결 론

축대칭 문제의 시간영역에서의 과도 동적응력 해석을 위하여 유한요소공식화 과정을 소개하고, 축대칭 유한요소방정식을 제시하였다. 제시된 방정식을 이용하여 충격하중(내압과 인장)을 받고 외벽과 내벽에 반원형 원주홈을 지닌 원통을 예로써 변위와 응력집중을 해석하였으며, 그 결과를 타 해법(Nastran과 Ansys 등)에 의한 수치결과들과 비교하여, 제시된 유한요소방정식의 타당성을 보이고 수치결과와의 정확성을 비교하였다.

수치결과로서, 외벽에 반원형 홈을 지니고 상하가 자유단인 원통이 충격 내압을 받을 경우에는 정적하중하에서는 예측할 수 없는 매우 큰 응력집중을 축방향으로 일으키므로, 원통의 동적과 손해에서 주 변수가 될 수 있다. 또한 원통이 축방향으로 충격 인장을 받을 경우에는 홈이 내벽보다는 외벽에 있을 때 축방향으로 더 큰 응력집중이 발생하며, 그 크기를 정적하중시의 응력집중의 크기와 비교하면 홈의 위치에 따라 약간의 차이는 있으나 대략 2.2배 정도 된다.

하중이 동적일 때는 경계조건뿐 아니라 원통의 길이나 두께가 응력집중에 상당히 큰 영향을 끼치는데, 그 영향의 일부를 논문의 끝에 서술하였다.

끝으로, 축대칭 형상의 문제는 산업계에서 여러 가지 복합 형상으로 존재할 수 있는데, 그럴 경우에도 본 논문에서 제시된 해법을 적용할 수 있다. 그리고 본 논문의 해석 결과는 동적하중을 받는 축대칭 문제의 응력해석에 대한 기본 자료로 이용될 수 있다.

참고문헌

- (1) Bickford, W.B., 1990, *A First Course in the Finite Element Method*, IRWIN, Homewood.
- (2) Bathe, K.J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- (3) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., 1991, *The Finite Element Method* (4th edn.), McGraw-Hill, London.
- (4) Ross, C.T.F., 1984, *Finite Element Programs for Axisymmetric Problems in Engineering*, Ellis Horwood, Halsted Press, New York.
- (5) Bakr A.A., 1986, *The Boundary Integral Equation Method in Axisymmetric Stress Analysis Problems*, Springer-Verlag, Berlin.
- (6) Sang-Jin Lee and Jin Cho, 1996, "A Study on the Thermal Stress Analysis of Axi-Symmetric Hollow Cylinder," *Transactions of the KSME A*, Vol. 20, No. 10, pp. 3152~3159.
- (7) Chang-Duk Kong and Suk-Choo Chung, 1996, "A Study on Structural Analysis for Aircraft Gas Turbine Rotor Disks Using the Axisymmetric Boundary Integral Equation Method," *Transactions of the KSME A*, Vol. 20, No. 9, pp. 2524~2539.
- (8) Boo-Youn Lee, 1996, "Direct Differentiation Method for Shape Design Sensitivity Analysis of Axisymmetric Elastic Solids by the BEM and Shape Optimization of Turbin Disc," *Transactions of the KSME A*, Vol. 20, No. 5, pp. 1458~1467.
- (9) Dauksher, W. and Emery, A.F., 2000, "The Solution of Elastostatic and Elastodynamic Problems with Chebyshev Spectral Finite Elements," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 188, pp. 217~233.
- (10) Pao, Y. H. and Mow, C. C., 1973, "Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations," Crane and Russak, New York.
- (11) Tsinoopoulos, S.V., Kattis, S.E., Polyzos D., and Beskos, D.E., 1999, "An Advanced Boundary Element Method for Axisymmetric Elastodynamic Analysis," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 175, pp. 53~70.
- (12) Dargush, G.F. and Banerjee P.K., 1992, "Time Dependent Axisymmetric Thermoelastic Boundary Element Analysis," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 33, pp. 695~717.
- (13) Woo-Jin Sim and Sung-Hee Lee, 2001, "A Time-Domain Finite Element Formulation for Transient Dynamic Linear Elasticity," *Transactions of the KSME A*, Vol. 25, No. 4, pp. 574~581.
- (14) Achenbach, J.D., 1975, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam.
- (15) Graff K.F., 1975, *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover, New York.
- (16) Coda H.B. and Venturini W.S., 2000, "Dynamic Non-Linear Stress Analysis by the Mass Matrix BEM," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 24, pp. 623~632.