

역정규 손실함수를 이용한 공정능력지수에 관한 연구

정영배 · 문혜진
인천대학교 산업공학과

A Study on Process Capability Index using Reflected Normal Loss Function

Young-Bae Chung · Hye-Jin Mun
Dept. of Industrial Engineering, University of Incheon

Key Words : Process Capability Index, Reflected Normal Loss Function

Abstract

Process capability indices are being used as indicators for measurements of process capability for SPC of quality assurance system in industries. In view of the enhancement of customer satisfaction, process capability indices in which loss functions are used to deal with the economic loss in the processes deviated from the target, are in an adequate representation of the customer's perception of quality. In this connection, the loss function has become increasingly important in quality assurance. Taguchi uses a modified form of the quadratic loss function to demonstrate the need to consider the proximity to the target while assessing its quality. But this traditional quadratic loss function is inadequate to assessing the quality and quality improvement since different processes have different sets of economic consequences on the manufacturing. Thereby, a flexible approach to the development of the loss function needs to be desired.

In this paper, we introduce an easily understood loss function, based on reflection of probability density function of the normal distribution. That is, the Reflected Normal Loss Function can be adapted to an asymmetric loss as well as to a symmetric loss around the target. We propose that, instead of the process variation, a new capability index, C_pI using the Reflected Normal Loss Function that can accurately reflect the losses associated with the process and a new capability index C_pI is compared with the classical indices as C_p , C_{pk} , C_{pm} and C_{pm}^+ .

1. 서 론

현대의 기업에서는 고객의 요구를 만족시

키는 품질의 제품을 생산하기 위하여 오프라인의 설계단계에서부터 품질에 대한 관리를 중요시 여기고 있는 추세지만 온라인의 제조 단계에서의 품질 역시 중요한 문제로 인식되고 있다. 이러한 기업들의 상황하에서는 품질향상을 위해서 규격 내에서 공정 산포의 감소와 더불어 목표치에 보다 가까운 균질의 제품을 생산하기 위한 지속적인 노력이 더욱 요구되고 있으며 이를 위해 생산현장에 통계적 공정관리에 대한 필요성이 부각되고 있는 실정이다.

통계적 공정관리의 기법 가운데 공정의 능력을 평가하는 척도로서 가장 보편적으로 쓰이고 있는 것이 공정능력지수이고, 이 공정능력지수는 계산이 용이하고 현장에서 사용하기 간편하다는 장점으로 인해 공정의 진단 및 평가의 척도로서 과거에서부터 널리 이용되고 있는 도구이다.

그러나 대부분의 전통적인 공정능력지수들이 산포에 의해서 공정을 평가하는 것에 대한 한계점에 봉착하면서, 목표치로부터 공정의 평균이 얼마나 접근하고 있는가를 반영하기 시작하였고, 더 나아가 다구찌의 이차손실함수를 이용한 목표치로부터 품질의 변동을 잘 반영하는 공정능력지수가 제안되었다.

전통적인 공정능력지수 C_p , C_{pk} , C_{pm} 등은 단지 품질의 산포에 의해 공정을 평가하기 때문에 고객의 입장에서 경제적 손실을 고려한 평가가 이루어지기는 어렵다는 지적에 의해 Bolyes(1991)가 제안한 C_{pm}^* 는 다구찌의 이차손실함수의 기대손실을 이용하여 비용적 측면까지도 고려하는 공정능력지수를 제시하였다. 그러나 다구찌의 이차손실함수는 품질 특성치가 규격 내에 있을 때나 규격을 벗어날 때나 일률적으로 이차함수를 적용하고 있다는 점에서 비현실적이라는 것이다.

실제 제조공정들은 그 유형이나 특성들이 매우 다양하고 이러한 다양성에 맞춰 경제적 산출이나 손실 역시 다양하게 발생할 것이기 때문에 목표치로부터 발생하는 손실이 이차적으로 발생한다는 다구찌의 이차손실함수를 일률적으로 적용하기 보다는 공정의 특성에 적합하도록 다양하고 융통성 있는 손실함수를 적용하는 것이 타당할 것이다. 따라서 최근의 연구들을 통해 이러한 다구찌의 이차손실함수가 가지는 결점들을 보완한 대안적인 손실함수들이 제시되고 있고 이를 이용한 공정평가척도에 관한 연구들이 활발하게 이루어지고 있다. 또한 공정이 정규분포일 때뿐만 아니라 비정규분포일 때의 공정평가로도 확장되고 있다. 이러한 공정평가척도들은 공정의 산포에 의해서 공정능력을 평가하기보다는 목표치로부터 품질의 변동에 따른 경제적 손실(비용적 측면)까지도 고려하여 보다 현실적이고 유용한 정보를 많이 제공할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 기존의 이차손실함수에 대한 대안적인 손실함수로서, 목표치로부터의 손실이 정규분포의 확률밀도함수(p.d.f.)의 역함수를 근거로 한 역정규 손실함수를 따를 때 기대손실을 이용한 새로운 공정능력지수 C_{pI} 를 제안하고 기존의 공정능력지수들과 C_{pI} 를 비교·분석하고자 한다.

2. 공정능력지수의 고찰

2.1 전통적인 6σ 개념의 공정능력지수

공정능력(process capability)은 “공정이 관리상태에 있을 때 그 공정에서 생산되는 제

품의 품질변동이 어느 정도인가를 나타내는 양”으로, 이를 자연공차라 부르고 6σ 로 정의한다. 공정능력지수(process capability index)는 규격과 관련하여 공정능력을 평가하는 척도로서, 이는 공정능력(6σ)과 규격의 폭과의 비율로서 공정이 규격에 맞는 제품을 생산할 능력을 가지고 있는지를 나타내는 지수이다.

C_p 는 산업계에서 가장 먼저 사용된 것으로 전통적인 6σ 개념을 기초로 개발된 공정능력지수이다(Kane, 1986).

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{T}{6\sigma} \quad (1)$$

그러나 C_p 는 규격의 중심에 대한 공정 평균의 치우침을 고려하지 않고 있기 때문에 이러한 문제점을 해결하기 위하여 공정의 평균과 규격의 중심과의 사이에 치우침이 있을 때에도 실제공정의 수율을 정확하게 표현할 수 있는 치우침도를 고려한 공정능력지수 C_{pk} 가 제안되었다(Kane, 1986).

$$C_{pk} = \min\left\{\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right\} \\ = (1 - K) C_p \quad (2)$$

$$\text{단, } K = \frac{|M - \mu|}{(T/2)}$$

$$T = USL - LSL, \quad M = \frac{(USL + LSL)}{2}$$

만약 공정의 평균이 규격의 중심과 일치할 경우에는 $K=0$ 으로 치우침이 없고 이때에 $C_{pk}=C_p$ 이며 C_{pk} 가 음수이면 0으로 정의한다.

C_{pm} 은 다구찌의 이차손실함수를 기초로 하여 개발된 공정능력지수로서, C_p 와 C_{pk} 의 단점을 보완하여 목표치를 고려한 공정능력지수이다(Chan et al., 1988).

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \\ = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[(x - T)^2]}}$$

$$= \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \\ = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \frac{(\mu - T)^2}{\sigma^2}}} \quad (3)$$

이 공정능력지수는 다구찌의 이차손실함수가 망목특성인 경우의 기대손실에서 $k=1$ 인 경우이고, $\mu = T$ 이면 C_{pm} 은 C_p 와 일치한다.

또한 공정평균이 목표치에 충분히 근접하고 있는지의 여부와 공정평균에 대한 변동이 충분히 작은지의 여부를 동시에 결정할 수 있는 공정능력지수 C_{pmk} 는 다음의 식(4)와 같다(Pearson et.al, 1992).

$$C_{pmk} = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \\ = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1 + \frac{(\mu - T)^2}{\sigma^2}}} \quad (4)$$

2.2 이차 기대손실함수를 이용한 공정능력지수

C_p , C_{pk} , C_{pm} , C_{pmk} 등은 모두 공정의 산포를 근거로 공정능력을 평가하는 척도이지만 손실함수의 기대치를 이용함으로써 공정능력을 평가하는 것은 목표치로부터 품질 변동에 따른 경제적 손실까지 고려하는 보다 유용한 공정평가척도라는 점에 그 의미가 있다고 할 수 있다.

일반적으로 가장 널리 사용되는 대표적인 손실함수는 다구찌의 이차손실함수로서, 그 개념은 성능특성치가 목표치와 일치할 때는 손실이 발생하지 않으며 목표치로부터 멀어짐에 따라 손실이 크게 발생한다는 가정하에서 이차식으로 근사화한 손실함수로 그 기호를 $L(x)$ 로 나타내며 그 기대치를 $E[L(x)]$ 로 나타낸다. 이러한 다구찌의 품질특성치에 따른 손실함수와 기대손실을 정리하면 다음의

<표 1>과 같다[4][5][6].

<표1> 특성치에 따른 손실함수와 기대손실

품질 특성	손실함수 L(x)	기대손실 E[L(x)]	비고
망목	$k(x-T)^2$	$E[k(x-T)^2]=k[\sigma^2+(\mu-T)^2]$	$k = \frac{A}{\Delta^2}$
망소	kx^2	$E[kx^2]=k(\sigma^2+\mu^2)$	
망대	$k\left(\frac{1}{x^2}\right)$	$E\left[\frac{k}{x^2}\right]=k\left[\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{3\sigma^2}{\mu^2}+1\right)\right]$	

즉, 공정능력지수 C_{pm} 은 아래의 식(5)와 같이 제공오차손실(squared error loss)의 개념을 적용시켜 목표치로부터 멀어질수록 특성치에 대한 손실이 대칭적 제공오차의 손실함수, 즉 이차손실함수에 따라 발생한다는 것에 잘 근사한다[2][9].

$$\sigma^2 = E[(x-T)^2] = \sigma^2 + (\mu-T)^2 \quad (5)$$

따라서 망목특성일 경우 다구찌의 이차손실함수는

$$L(x) = k(x-T)^2 \quad (6)$$

이고, 이 손실함수의 기대손실은

$$E[L(x)] = E[k(x-T)^2] = kE[(x-T)^2] \quad (7)$$

이다. 여기서 k 는 손실계수로서 양의 상수값을 가진다. 그리고 손실계수 $k=1$ 이라면 C_{pm} 의 분산과 이차손실함수의 기대손실은 동일한 식을 취하게 된다.

한편, Boyles(1991)는 다구찌의 이차손실함수의 기대손실을 이용한 공정능력지수를 C_{pm}^+ 라고 정의하고 다음의 식(8)과 같이 제안하였다[3].

$$C_{pm}^+ = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[L(x)]}} \quad (8)$$

즉, 여기서 기대손실 $E[L(x)]$ 는 식(3)의 C_{pm} 에서 산포를 대신하여 쓰인 것이라 할 수 있

다. 품질특성이 망목특성이라면 식(8)의 분모에 해당되는 이차손실함수의 기대손실은

$$E[L(x)] = k[\sigma^2 + (\mu-T)^2]$$

가 된다.

이러한 이차손실함수의 기대치를 일반적인 함수로 표현하면 다음의 식(9), 식(10)과 같이 정의될 수 있다.

$$L(x) = L(x, T) = \begin{cases} k_1(x-T)^2 & x < T \\ k_2(x-T)^2 & x \geq T \end{cases} \quad (9)$$

$$E[L(x)] = \sigma^2[(1+\xi^2)(k_1(1-\Phi(\xi)) + k_2\Phi(\xi)) - (k_1-k_2)\xi\phi(\xi)] \quad (10)$$

여기서

$$\xi = \frac{(\mu-T)}{\sigma}, k_1 = \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)k_0, k_2 = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)k_0$$

$$\beta_1 = \frac{T - LSL}{USL - LSL}, \beta_2 = \frac{USL - T}{USL - LSL},$$

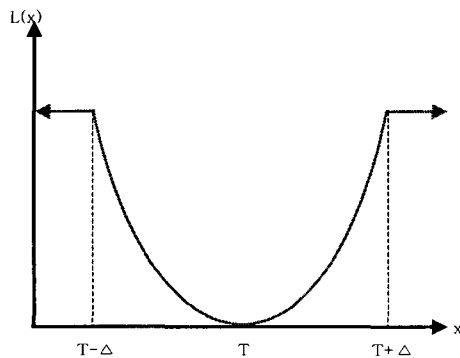
$$k_0 = \frac{\max(\beta_1/\beta_2, \beta_2/\beta_1)}{2(\beta_1^2 + \beta_2^2)}$$

이다. k_1 과 k_2 는 비례상수이고 k_0 는 k_1 과 k_2 의 기하평균($k_0 = \sqrt{k_1k_2}$)이며, β_1 은 목표치가 하한규격에 치우침의 비율이고 β_2 는 상한규격에 치우침의 비율이다. $\Phi(\cdot)$ 와 $\phi(\cdot)$ 은 표준정규분포의 분포함수와 밀도함수를 각각 나타낸 것이다. 만일 $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$, $E[L(x)] = \sigma^2$ 으로 대칭인 경우 C_{pm}^+ 는 C_{pm} 과 동일하고 k_0 가 결정되면 $\mu = T$ 일 때 $C_{pm}^+ = C_p$ 가 된다[1].

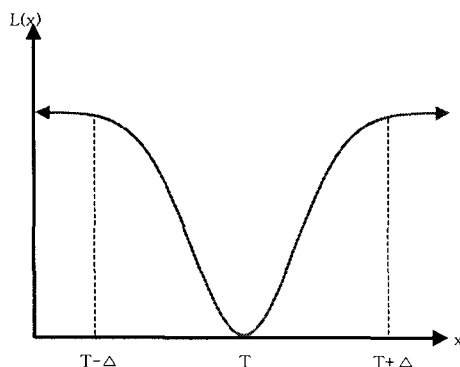
3. 역정규 손실함수와 기대손실을 이용한 공정능력지수의 모형

앞에서 언급한 바와 같이 다구찌(1986)의 이차손실함수가 손실함수를 대표적으로 설명

하고 있으나 이러한 다구찌의 이차손실함수는 정규공정이고 대칭적인 손실함수의 경우에만 잘 설명될 수 있다는 한계를 가지고 있다. 또한 다구찌의 이차손실함수는 규격을 벗어났을 때에도 계속 손실이 증가하는 것으로 해석하는 단점을 가지고 있다. 이러한 비현실적인 단점을 보완하여 <그림 1>에서와 같이 손실함수의 그래프를 규격 내에서는 이차함수로 근사하고 규격을 벗어난 경우에는 최대손실에 대해 일양적인 1차함수로 나타내었다.



<그림 1> 보강된 이차손실함수
(Modified Quadratic Loss Function)



<그림 2> 역정규 손실함수 (RNLF)

반면, Spiring(1993)은 다구찌의 이차손실함수의 대안적인 손실함수로서 <그림 2>와 같이 정규분포에 대한 확률밀도함수(p.d.f.)의 역함수를 근거로 한 손실함수를 제안하였고, 이러한 역정규 손실함수를 'RNLF'(Reflected Normal Loss Function)라 정의하였다. 이 RNLF는 기존의 이차손실함수에 비해 목표치로부터 품질의 변동에 따른 손실을 보다 합리적으로 설명할 수 있고 응용의 폭도 넓힐 수 있다는 장점을 지니고 있다.

역정규 손실함수는 '손실(loss)은 항상 양수의 값을 가지고, 목표치에서 가장 최소의 값을 가지며 목표치에서 멀어질수록 공정의 분산은 커지고 그에 따른 손실도 증가한다'라는 손실함수의 일반적인 특성을 잘 만족시키고 있다. 즉, 정규분포의 역함수는 $(-\infty, T]$ 구간에서는 감소하고 $[T, \infty)$ 구간에서는 증가하는 두 개의 성향 모두를 나타내며 목표치에서 유일한 최소값을 가진다는 점에서 손실함수의 일반적인 특성을 잘 표현하고 있다는 점이다.

그러면서도 역정규 손실함수는 이차손실함수에 비해 목표치를 중심으로 대칭일 때뿐만 아니라 비대칭 경우에도 설명이 용이하다. 더욱이 손실함수와 공정 분포 모두에 대하여 다양하게 적용할 수 있다라는 것이다. 다시 말해 만약 손실함수가 목표치에 대하여 정규분포를 따르는 경우라면 정규공정 뿐만 아니라 비정규공정에 대해서도 다양하게 적용하여 분석할 수 있으며 직관적인 해석이 용이하다는 장점을 가지고 있다. 또한 실제로 최대손실을 발생시키는 비용적 요인들은 제품의 재료, 확인(검사 등)작업에 드는 비용, 폐기 또는 재작업 비용, 채무, 부채 등등 그 종류가 무한한데 반하여 일반적으로 기존의 이차손실함수는 이러한 여러 요인들 가운데 극

히 일부 요인만을 한정하여 분석하기에 제품과 관련된 손실을 제대로 반영하지 못할 수 있다라는 단점들이 발생될 수도 있을 것이다 [12][14]. 따라서 본 연구는 손실함수로서의 특성을 지니면서 보다 현실적이고 융통성있는 대안적인 손실함수를 이용하여 공정능력을 평가하고자 하는 것이다.

우선 본 연구의 가정 및 범위는 다음과 같다.

- (1) 품질특성치는 망목특성이며 연속적인 값을 가진다.
- (2) 공정의 데이터는 정규분포를 따른다.
- (3) 손실함수는 목표치에 대해 정규분포를 따르고, 그 p.d.f의 역함수를 취한다.

역정규 손실함수의 기대손실은 다음과 같이 유도한다. 실제 공정의 측정치에 대한 분포의 확률밀도함수 (p.d.f.)를 $f(x)$ 라 하고 목표치에 대한 p.d.f.로써 손실함수에 이용되는 분포의 p.d.f.를 함수 $g(x, T)$ 로 나타내면 여기에서 함수 $g(x, T)$ 에 대한 역함수를 근거한 손실함수 $L(x, T)$ 는 다음의 식(11)과 같이 도출된다.

$$L(x, T) = A \left(1 - \frac{g(x, T)}{m} \right) \quad \forall x \in \Omega \quad (11)$$

여기서 m 은 함수 $g(x, T)$ 가 최대로 도달할 수 있는 값이다. A 는 손실함수가 가지는 최대 손실이고, Ω 는 x 값이 가지는 범위로 $(-\infty, \infty)$ 가 된다.

따라서 손실함수의 기대손실 $E[L(x, T)]$ 는 다음의 식(12)와 같다.

$$E[L(x, T)] = \int_{\Omega} A \left(1 - \frac{g(x, T)}{m} \right) f(x) dx$$

$$= A \left(1 - \frac{1}{m} \int_{\Omega} g(x, T) f(x) dx \right) \quad (12)$$

즉, 목표치에 대한 함수 $g(x, T)$ 의 역함수에서 구해진 손실함수 $L(x, T)$ 와 실제 공정의 데이터가 따르는 분포에 대한 함수 $f(x)$ 를 비교하여 기대손실 $E[L(x)]$ 를 얻을 수 있다. 결국 위의 수식은 역함수를 근거한 손실함수에 대한 함수 $g(x, T)$ 가 정규분포, 감마분포, Tukey의 람다분포 등의 따를 수 있는 다양한 분포를 폭넓게 적용할 수 있으며, 특히 역함수를 근거한 손실함수가 정규분포를 따를 경우에는 대칭·비대칭을 포함한 공정의 데이터가 따를 수 있는 대부분의 분포를 적용할 수 있다라는 장점을 가지고 있다. 또한 식(12)와 같이 간편한 식으로 도출할 수 있고 공정 해석도 용이하다[14].

본 연구에서는 손실함수가 정규분포를 따른다고 가정하였으므로 정규분포에 대한 구체적인 모형을 살펴보고자 한다. 품질특성치 x 가 정규분포를 따를 때 x 에 대한 확률밀도함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad -\infty < x < \infty \quad (13)$$

이다. 따라서 목표치 T 에 대한 공정의 측정치 x 가 정규분포를 따른다면 이 함수의 확률밀도함수 $g(x, T)$ 를 구하면 다음의 식(14)와 같다.

$$g(x, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \gamma} \exp \left\{ -\frac{(x-T)^2}{2\gamma^2} \right\} \quad -\infty < x < \infty \quad (14)$$

여기서 T 는 목표치이고, γ 는 형상모수(shape parameter)이다. 이 형상모수는 손실함수의 형상을 결정하는 모수 인자이기도 하다.

형상모수 γ 를 수식으로 나타내면,

$$\gamma = \frac{\Delta}{4} \tag{15}$$

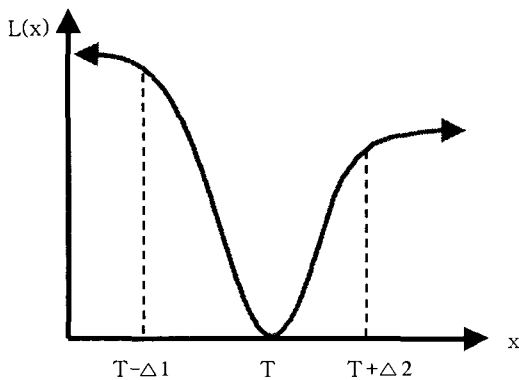
와 같다. 여기서 Δ 는 최대손실 A 가 첫 번째로 발생하는 시점에서의 목표치로부터 떨어진 거리(정도)를 말한다. 즉 이것은 손실함수에서 6σ (또는 99.73%의 의미) 내에 $T \pm \Delta$ 가 존재한다는 의미이다.

역함수를 근거한 손실함수의 일반적인 식 (11)에서와 같이,

$$L(x, T) = A \left(1 - \frac{g(x, T)}{m} \right)$$

에서 정규분포를 따르는 함수 $g(x, T)$ 의 식 (14)를 대입하게 된다. 여기서 m 은 품질특성치 x 가 목표치 T 와 일치할 때 $g(x, T)$ 의 함수값이 최대가 되므로 m 은 $x = T$ 일 때의 $g(x, T)$ 값이 된다.

$$m = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \tag{16}$$



<그림 3> 목표치를 중심으로 비대칭일 때의 역정규 손실함수

따라서 손실함수는

$$L(x, T) = A \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \exp \left\{ -\frac{(x-T)^2}{2\gamma^2} \right\} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \right) \right] \\ = A \left(1 - \exp \left\{ -\frac{(x-T)^2}{2\gamma^2} \right\} \right) \tag{17}$$

이다.

특히 목표치를 중심으로 역정규 손실함수가 비대칭일 때를 살펴보면 다음의 <그림 3>과 같은 경우일 것이다.

위의 그림을 보면 특성치 x 가 목표치 T 와 일치할 경우에는 손실이 0(zero)가 되며, 목표치 T 를 중심으로 손실함수가 감소하는 구간($x < T$)에서는 $T - \Delta_1$ 의 시점(거리)에서 최대손실 A_1 이 첫번째로 발생되고 손실함수가 증가하는 구간($x \geq T$)에서는 $T + \Delta_2$ 의 시점(거리)에서 최대손실 A_2 가 첫번째로 발생하게 된다.

따라서 역정규 손실함수가 비대칭일 경우일 때 목표치 T 를 중심으로 다음의 식(18)과 같이 나타낼 수 있다.

$$L(x, T) = \begin{cases} A_1 \left(1 - \exp \left\{ -\frac{(x-T)^2}{2\gamma_1^2} \right\} \right) & x < T \\ A_2 \left(1 - \exp \left\{ -\frac{(x-T)^2}{2\gamma_2^2} \right\} \right) & x \geq T \end{cases} \tag{18}$$

여기서 형상모수 γ 는 각각 $\gamma_1 = \frac{\Delta_1}{4}$, $\gamma_2 = \frac{\Delta_2}{4}$ 이다. 또한 위의 식(18)에 대한 기대손실을 구하면 다음의 식(19)와 같다.

$$E[L(x, T)] = \int_{-\infty}^T A_1 \left(1 - \exp \left\{ -\frac{(x-T)^2}{2\gamma_1^2} \right\} \right) f(x) dx \\ + \int_T^{\infty} A_2 \left(1 - \exp \left\{ -\frac{(x-T)^2}{2\gamma_2^2} \right\} \right) f(x) dx \tag{19}$$

식(19)를 표준누적정규분포함수 $\Phi(Z)$ 로 다시 표현하면 식(20)과 같다.

$$\begin{aligned}
 E[L(x, T)] &= A_1 \Phi(Z) + A_2 [1 - \Phi(Z)] \\
 &- A_1 \int_{-\infty}^T \exp\left\{-\frac{(x-T)^2}{2\gamma_1^2}\right\} f(x) dx \\
 &+ A_2 \int_T^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-T)^2}{2\gamma_2^2}\right\} f(x) dx \quad (20)
 \end{aligned}$$

여기서 $Z = \frac{T-\mu}{\sigma}$ 이다.

이상으로 역정규 손실함수가 목표치를 중심으로 대칭일 때와 비대칭일 때 모두를 살펴 보았다. 본 연구에서는 공정이 정규분포를 따른다고 가정하였기 때문에 일반적인 대칭적 구조의 역정규 손실함수와 기대손실의 식에 $f(x)$ 를 대입하면 다음과 같다. 즉, 공정의 특성치가 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$ 를 따를 때 정규분포의 역함수를 근거한 손실함수의 기대손실은

$$\begin{aligned}
 E[L(x, T)] &= A \left[1 - \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, T) f(x) dx \right] \\
 &= A \left[1 - \sqrt{2\pi} \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \gamma} \exp\left\{-\frac{(x-T)^2}{2\gamma^2}\right\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \right\} dx \right] \\
 &= A \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{(x-T)^2}{\gamma^2} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right) \right\} dx \right] \quad (21)
 \end{aligned}$$

이다(Spiring, 1993). 여기서

$$\begin{aligned}
 &\frac{(x-T)^2}{\gamma^2} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \\
 &= \frac{\sigma^2 + \gamma^2}{\sigma^2 \gamma^2} \left(x - \frac{\sigma^2 T + \gamma^2 \mu}{\sigma^2 + \gamma^2} \right)^2 + \frac{(\mu-T)^2}{\sigma^2 + \gamma^2} \quad (22)
 \end{aligned}$$

으로 표현될 수 있다(Spiring, 1993).

따라서 식(22)를 위의 식(21)에 대입하면 다음의 식(23)과 같다(Spiring, 1993).

$$\begin{aligned}
 E[L(x, T)] &= A \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2 + \gamma^2}{\sigma \gamma} \left(x - \frac{\sigma^2 T + \gamma^2 \mu}{\sigma + \gamma} \right) + \frac{(\mu-T)^2}{\sigma + \gamma} \right) \right\} dx \right] \\
 &= A \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2 + \gamma^2}{\sigma \gamma} \left(x - \frac{\sigma^2 T + \gamma^2 \mu}{\sigma + \gamma} \right) \right)^2 \right\} dx \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu-T}{\sigma + \gamma} \right)^2 \right\} \right] \\
 &= A \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu-T}{\sigma + \gamma} \right)^2 \right\} \left| \sqrt{\frac{\sigma^2 + \gamma^2}{\sigma \gamma}} \right| dx \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(\sqrt{\frac{\sigma^2 + \gamma^2}{\sigma \gamma}} \right)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2 + \gamma^2}{\sigma \gamma} \left(x - \frac{\sigma^2 T + \gamma^2 \mu}{\sigma + \gamma} \right) \right)^2 \right\} dx \\
 &= A \left[1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\sigma^2 + \gamma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu-T}{\sigma + \gamma} \right)^2 \right\} \right] \quad (23)
 \end{aligned}$$

이상 역정규 손실함수와 기대손실을 구하였다.

따라서 본 연구에서는 Bolyes(1991)가 제안한 C_{pm}^+ 의 모형에서 분모에 해당되는 기대손실을 이용함에 있어서 이차손실함수 대신 역정규 손실함수를 적용하여 새로운 공정능력지수의 모형을 제안하고자 한다.

우선 기존의 이차손실함수의 기대치를 이용한 공정능력지수 C_{pm}^+ 는 식(8)에서와 같이,

$$C_{pm}^+ = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[L(x)]}}$$

이고, 분모의 $E[L(x)]$ 는 망목특성일 때의 이차손실함수의 기대손실로써

$$E[L(x)] = k[\sigma^2 + (\mu - T)^2]$$

를 이용하였다.

그렇다면 C_{pm}^+ 의 모형에서와 같이 역정규 손실함수의 기대손실을 이용한 새로운 공정능력지수를 C_{pl} 라 정의하고 그 모형을 다음의 식(24)와 같이 제안한다.

$$C_{pl} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[L(x, T)]}} \quad (24)$$

여기서 기대손실은

$$E[L(x, T)] = A \left[1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\sigma^2 + \gamma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu-T}{\sigma + \gamma} \right)^2 \right\} \right] \quad (25)$$

가 된다.

4. 수치예

본 연구에서는 새로운 공정능력지수 C_{pl}

와 기존의 공정능력지수들을 비교하기 위하여 다구찌, Elsayed, Hsiang(1989)의 수치예를 사용하였다.

TV를 생산하는 공정에서 불합격품을 처리하는데 드는 최대손실비용이 단위당 \$2이고, 목표치로부터 규격의 허용오차는 ± 5 이다.

우선 <표 2>와 <그림 4>는 목표치 $T=0$ 이고 목표치로부터 공정평균이 변할 때, 표준편차 $\sigma_1=0.5$, $\sigma_2=1.0$, $\sigma_3=1.5$ 각각에 대하여 (a)이차손실함수 기대손실 $E[L(x)]$ 와 (b)역정규 손실함수 (RNLF ; Reflected Normal Loss Function)의 기대손실 $E[L(x, T)]$ 를 비교한 결과이다.

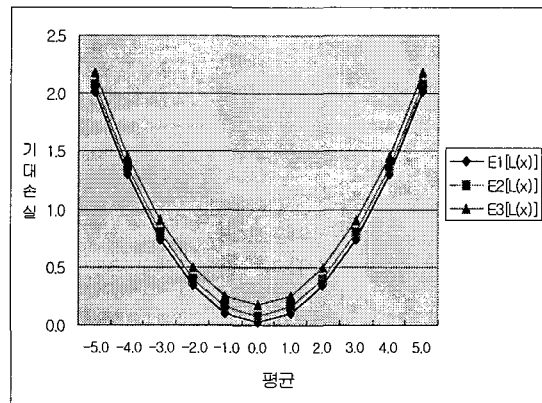
<그림 4>에서 (a)의 이차손실함수를 보면 서로 다른 표준편차 값에 대하여 y축의 기대손실은 거의 차이가 없는 반면 (b)의 역정규 손실함수는 표준편차의 차이에 따른 기대손실의 변화를 명확하게 반영하는 것으로 나타났다.

<표 2> $\sigma_1=0.5$, $\sigma_2=1.0$, $\sigma_3=1.5$ 일 때 이차손실함수와 역정규 손실함수의 기대치

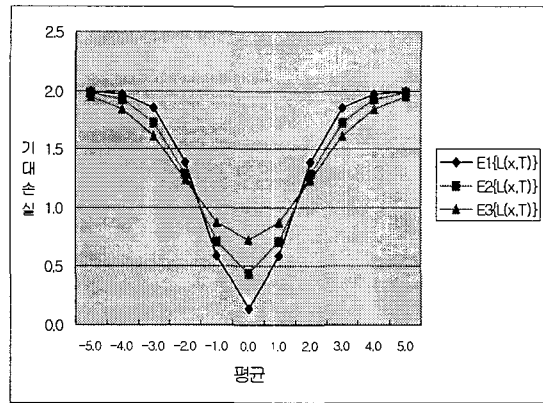
μ	$\sigma_1=0.5$		$\sigma_2=1.0$		$\sigma_3=1.5$	
	$E_1[L(x)]$	$E_1[L(x, T)]$	$E_2[L(x)]$	$E_2[L(x, T)]$	$E_3[L(x)]$	$E_3[L(x, T)]$
-5.0	2.02000	1.99812	2.08000	1.98811	2.18000	1.95176
-4.0	1.30000	1.97751	1.36000	1.93117	1.46000	1.84295
-3.0	0.74000	1.84492	0.80000	1.73026	0.90000	1.60670
-2.0	0.34000	1.38400	0.40000	1.28444	0.50000	1.24228
-1.0	0.10000	0.59073	0.16000	0.71510	0.26000	0.87700
0.0	0.02000	0.14305	0.08000	0.43826	0.18000	0.71963
1.0	0.10000	0.59073	0.16000	0.71510	0.26000	0.87700
2.0	0.34000	1.38400	0.40000	1.28444	0.50000	1.24228
3.0	0.74000	1.84492	0.80000	1.73026	0.90000	1.60670
4.0	1.30000	1.97751	1.36000	1.93117	1.46000	1.84295
5.0	2.02000	1.99812	2.08000	1.98811	2.18000	1.95176

즉, <그림 4>의 두 그림을 통해서 서로 다른 크기를 갖는 표준편차들의 변화에 대하여 두 손실함수의 기대치를 반영하는 정도의 차이를 쉽게 확인할 수 있을 것이다. 이것은 동일한 조건의 공정이 주어진다면 역정규 손실

함수가 이차손실함수에 비해 σ 의 변화에 대한 판별력이 뛰어나다는 것으로써 보다 민감성이 좋은 손실함수라 할 수 있겠다.



(a) 이차손실함수



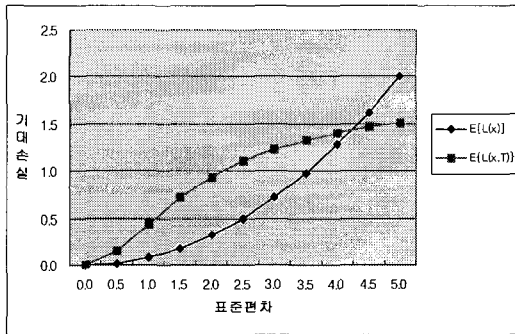
(b) 역정규 손실함수

<그림 4> $\sigma_1=0.5$, $\sigma_2=1.0$, $\sigma_3=1.5$ 일 때 공정평균의 변화에 대한 기대손실의 변화 비교

<표 3>과 <그림 5>는 공정 평균이 목표치와 일치할 때 표준편차의 변화에 따른 이차손실함수와 역정규 손실함수의 기대손실을 비교한 것이다.

<표 3> $\mu = T$ 일 때 표준편차에 따른 이차손실함수와 역정규 손실함수의 기대치

σ	$E[L(x)]$	$E[L(x,T)]$
0.0	0.00000	0.00000
0.5	0.02000	0.14305
1.0	0.08000	0.43826
1.5	0.18000	0.71963
2.0	0.32000	0.94000
2.5	0.50000	1.10557
3.0	0.72000	1.23077
3.5	0.98000	1.32733
4.0	1.28000	1.40345
4.5	1.62000	1.46471
5.0	2.00000	1.51493



<그림 5> $\mu = T$ 일때 표준편차에 따른 기대손실 비교

<그림 5>에서도 보듯이 표준편차의 변화에 따른 이차손실함수의 기대손실은 최대손실까지 거의 일정한 비율로 증가하는 선형에 가까운 형태를 띠고 있다. 반면 역정규 손실함수의 기대손실은 표준편차가 작을수록 큰 폭으로 증가하다가 표준편차가 점점 커지면 손실의 폭은 줄어들고 최대손실에 가까워지면 거의 변화 없이 일정해지는 평평한 커브(포물선 형태)를 띠고 있는 차이점을 볼 수 있다.

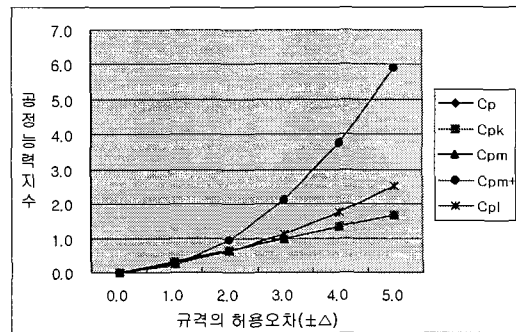
또한 <그림 4>와 <그림 5>의 결과를 통하여 알 수 있는 또 한가지의 사실은 역정규 손실함수의 모양이 최대손실 A와 형상모수인 γ 에 의해 결정된다는 것이다. 즉 최대손

실과 관련된 형상모수는 손실함수를 변형시킴으로써 다양한 공정에서 존재할 수 있는 손실들의 차이를 반영하게 된다.

<표 4>와 <그림 6>은 이차손실함수와 역정규 손실함수의 모양에 영향을 미치는 인자들을 변화시킴으로써 공정능력지수에 미치는 영향을 알아보려고 비교한 것이다. 즉, 목표치를 중심으로 규격의 폭($\pm\Delta$)이 변하게 되면 이차손실함수의 손실계수 k와 역정규 손실함수의 형상모수 γ 의 값이 변화하게 되고, 이러한 인자들에 의해 공정능력지수들의 값을 비교함으로써 그것의 미치는 영향을 비교한 결과이다.

<표 4> 규격의 폭이 변할 때 손실계수와 형상모수의 값에 대한 공정능력지수의 비교

$\pm\Delta$	형상모수	손실계수	C_p	C_{pk}	C_{pm}	C_{pm+}	C_{pl}
0.0	0.00	-	0.0000	-	0.0000	-	0.0000
1.0	0.25	2.00	0.3333	0.3333	0.3333	0.2357	0.2708
2.0	0.50	0.50	0.6667	0.6667	0.6667	0.9428	0.6340
3.0	0.75	0.22	1.0000	1.0000	1.0000	2.1213	1.1180
4.0	1.00	0.13	1.3333	1.3333	1.3333	3.7712	1.7421
5.0	1.25	0.08	1.6667	1.6667	1.6667	5.8926	2.5176



<그림 6> 규격의 폭이 변할 때 손실계수와 형상모수가 공정능력지수에 미치는 영향 비교

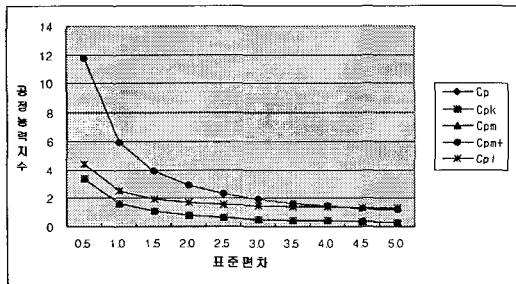
<그림 6>을 보면 규격의 폭이 점점 커지면 이차손실함수의 기대손실은 역정규 손실함수의 기대손실에 비하여 상대적으로 크게

작아지게 되어 결과적으로 C_{pm}^+ 가 C_{pl} 및 다른 공정능력지수들 보다 훨씬 높게 평가되고 있음을 알 수 있다.

이상 이차손실함수와 역정규 손실함수에 대하여 여러 측면에서의 특성들을 비교해 보고 그 차이점들을 살펴보았다. 위에서 얻어진 이러한 결과들을 토대로 종합해 보면, 역정규 손실함수를 이용하여 새로이 제안한 공정능력지수 C_{pl} 는 기존의 C_{pm} 이나 C_{pm}^+ 와 마찬가지로 목표치로부터 품질의 변동을 잘 반영하고 경제적 손실까지도 고려하고 있다. 그러면서도 C_{pl} 는 이차손실함수에 비해 표준편차의 변화에도 민감하게 반응할 수 있는 공정평가척도라는 것이다.

<표 5> 표준편차의 변화에 따른 공정능력지수

σ	C_p	C_{pk}	C_{pm}	C_{pm}^+	C_{pl}
0.5	3.33333	3.33333	3.33333	11.78511	4.40666
1.0	1.66667	1.66667	1.66667	5.89256	2.51757
1.5	1.11111	1.11111	1.11111	3.92837	1.96469
2.0	0.83333	0.83333	0.83333	2.94628	1.71903
2.5	0.66667	0.66667	0.66667	2.35702	1.58509
3.0	0.55556	0.55556	0.55556	1.96419	1.50231
3.5	0.47619	0.47619	0.47619	1.68359	1.44664
4.0	0.41667	0.41667	0.41667	1.47314	1.40686
4.5	0.37037	0.37037	0.37037	1.30946	1.37712
5.0	0.33333	0.33333	0.33333	1.17851	1.35411



<그림 7> 표준편차에 따른 공정능력지수들의 비교

따라서 <표 5>와 <그림 7>은 $\mu = T$ 일 때

이러한 특성의 차이를 가지는 두 가지의 손실함수를 각각 적용한 새로운 공정능력지수 C_{pl} 와 기존의 C_{pm}^+ , 그리고 기타 전통적인 공정능력지수들을 비교한 결과이다.

<그림 7>의 결과를 보면, 특히 $\sigma=0.5$ 일 때 역정규 손실함수의 기대손실을 이용한 C_{pl} 와 기존의 다른 공정능력지수 C_p , C_{pk} , C_{pm} 들에 비하여 이차손실함수의 기대손실을 이용한 C_{pm}^+ 의 값이 확연하게 큰 차이로 높게 나타나 공정능력을 과대평가하고 있는 것을 볼 수 있다. 그리고 표준편차가 커지면서는 C_{pl} 와 C_{pm}^+ 모두 유사하게 평가하고 있다. 따라서 표준편차가 작은 공정에서 공정능력을 분석한다면 기존 C_{pm}^+ 에 의해 평가하는 것은 실제로 수행된 공정능력 보다 과대평가할 확률이 높다는 결론을 얻을 수 있다.

이상의 수치예를 통하여 본 논문에서 새로이 제안한 공정능력지수 C_{pl} 의 특징들을 살펴보았다. 역정규 손실함수를 이용한 C_{pl} 는 기존의 공정능력지수들이 가지고 있는 평가척도로서의 특성을 그대로 지니면서 C_{pm}^+ 와 같이 목표치로부터의 품질변동과 비용적 측면도 고려하여 평가한다. 그리고 더 나아가 C_{pl} 의 역정규 손실함수는 이차손실함수에 비해 좀더 현실적으로 손실에 대한 개념에 접근하였고, 이로써 C_{pl} 는 여러 측면에서 다양한 공정특성들을 잘 반영하는 공정평가척도이다. 또한 공정 산포의 변화에 대하여 민감하게 평가할 수 있는 척도라는 장점을 가지고 있다.

5. 결론

손실함수는 목표치로부터 품질변동에 따른

손실을 잘 표현해 주는 것으로 다구찌의 이차손실함수가 가장 널리 쓰여왔다. 그러나 이차손실함수는 규격을 벗어났을 때에도 계속 손실이 증가하는 것으로 해석되고 또한 규격 내에서도 규격을 벗어날 때도 일률적으로 이차함수를 적용함으로써 현실적이지 못하다. 또한 정규공정이고 대칭적인 손실함수의 경우에만 잘 설명될 수 있다라는 단점을 가지고 있다. 그러나 현실적으로 공정들은 형태나 특성이 다양하게 나타나기 때문에 그로 인해 발생하는 손실비용 역시 다양하게 나타난다. 이러한 복합적인 요인들에 의해 발생하는 경제적 손실의 수많은 요인들 가운데 극히 일부분만을 한정하여 산출된 최대손실을 적용한다는 것은 비현실적인 요소가 많을 것이다.

따라서 이러한 한계점을 지닌 이차손실함수의 대안으로 정규분포에 대한 확률밀도함수의 역함수를 근거로 한 손실함수가 제안되었다. 즉, 역정규 손실함수는 손실함수의 특성을 그대로 가지면서 손실함수가 대칭일 때뿐만 아니라 비대칭일 때도 유용하게 평가할 수 있으며, 공정의 분포에 따라 다양하게 적용할 수 있다라는 장점을 가지고 있다.

본 연구에서는 이러한 장점을 지닌 역정규 손실함수의 기대치를 이용하여 새로운 공정능력지수 C_{pl} 를 제안하였다. C_{pl} 와 기존의 공정능력지수들을 비교한 결과 표준편차가 작아질수록 유독 이차손실함수를 이용한 C_{pm}^+ 만이 새로운 공정능력지수 C_{pl} 와 기존의 산포에 근거한 C_p , C_{pk} , C_{pm} 들보다도 공정능력을 과대평가 한다는 사실이다. 또한 각기 다른 표준편차가 주어진 경우 이차손실함수의 기대손실과 역정규 손실함수의 기대손실을 비교한 결과 역정규 손실함수의 기대손실이 표준편차의 변화에 대하여 민감하게 반응하

고 있다는 사실을 알았다.

따라서 새로운 공정능력지수 C_{pl} 는 기존의 공정능력지수 C_{pm}^+ 와 같이 목표치로부터 품질의 변동을 고려함과 동시에 경제적 손실까지도 고려하면서 이차손실함수가 가지지 못한 표준편차의 변화에 대해서도 민감하게 평가하고, 공정의 다양한 특성에 따라 발생하는 경제적 손실을 보다 현실적으로 접근한 유용한 공정평가 척도라 할 수 있다.

참고문헌

- [1] 구철본, 송서일(1992), “다구찌의 손실 함수를 이용한 공정능력지수의 최적화에 관한 연구”, 「한국품질관리학회지」 Vol. 20, No.1
- [2] 구본철, 고수철, 김종수(1997), “손실함수에 의한 기대상대손실과 C_{pm} 의 관련성”, 「공업경영학회지」, Vol.20, No.41
- [3] 김평구, 조중재(1998), “혼합정규공정하에서 손실함수를 이용한 공정능력지수”, 「품질경영학회지」, Vol.26, No.4
- [4] 이상복(1997), “다구찌의 품질손실함수에 대한 분석”, 「품질경영학회지」, 제25권, 제3호
- [5] 정영배(1995), “이차손실함수를 이용한 유동적인 공정수행척도”, 「공업경영학회지」 제18권, 제36호
- [6] Braker, T.B. (1987), “Quality Engineering by Design : Taguchi's Philosophy”, *Quality Assurance*, Vol.13, No.3, pp.72-80
- [7] Boyles, R.A. (1991), “The Taguchi Capability index”, *Journal of Quality Technology*, Vol.23, No.1, pp.17-26
- [8] Chan, L.K., Chung, S.W, Spiring, F.A.

- (1988), "A New Measure of Process Capability : C_{pm} ", *Journal of Quality Technology*, Vol.20, No.3, pp.162-175
- [9] Johnson, T. (1992), "The Relationship of C_{pm} to Squared Error Loss", *Journal of Quality Technology*, Vol.24, No.4, pp.211-215
- [10] Kane, V.E. (1986), "Process Capability Indices", *Journal of Quality Technology*, Vol.18, No.1, pp.41-52
- [11] Pearson, W.L., Kotz, S. and Johnson, N.L. (1992), "Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices", *Journal of Quality Technology*, Vol.24, No.4, pp.216-231
- [12] Spiring, F.A. (1993), "The Reflected Normal Loss Function", *Canadian Journal of Statistics* 21, pp.321-330
- [13] Sun, F., Laramée, J. and Ramberg, J. (1996), "On Spiring's Normal Loss Function", *Canadian Journal of Statistics* 24, pp.241-249
- [14] Spiring, F.A. and Yeung, A.S. (1998), "A General Class of Loss Functions with Industrial Applications", *Journal of Quality Technology*, Vol.30, No.2, pp. 152-162