대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.3, 347-360. Sep 2002

# 피타고라스 정리에 대한 Euclid의 증명이 갖는 교육적 함의

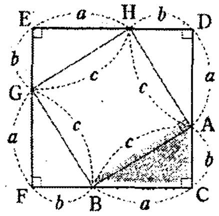
박문환* · 홍진곤**

## Ⅰ. 서론

제 6차 교육과정에 따르면 "기하 문제는 그 해결 방법이 다양하기 때문에 학생으로 하여금 창조적으로 사고하게 하고, 스스로 생각하게 하는데 효과적일 수 있다(교육부, 1994, p.130)"는 점에서 기하교육의 의의를 찾을 수 있다. 그런데 교육과정은 다시, 피타고라스의 정리의 지도와 관련해서 "피타고라스의 정리를 증명하는 방법은 여러 가지가 있으나 가급적 간단한 것으로 하며, 증명 자체보다는 피타고라스 정리의 의미를 파악하게 하는데 주안점을 두고 지도(교육부, 1994, p.149)"하고, 피타고라스의 정리의 활용은 "피타고라스 정리의 기하학적, 대수적 이해를 기초로 하여 평면도형에서의 변의 길이와 좌표평면 위에서의 두 점 사이의 거리, 입체도형에서의 선분의 길이를 구할 수 있게(교육부, 1994, p.149)"해야 한다고 기술하고 있다. 그런데 여기서 피타고라스의 정리에 대하여 증명 자체보다는 정리의 의미 파악 및 그 활용에 중점을 두는 것이, 창조적으로 사고하고 스스로 생각하게 하는 기하교육의 의미를 충분히 살릴 수 있는 방식인가 하는 것에는 재고의 여지가 있는 것으로 보인다.

제 6차 교육과정에 따른 교과서 가운데 김연식 · 김홍기(1998)가 집필한 교과서에서 피타고라스의 정리를 증명하는 부분을 살펴보자.

우선 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $a+b$인 정사각형 EFCD를 그리고, 이 정사각형의 네 꼭지점에서 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 $a, b$인 직각삼각형을 그리면, 이들 네 개의 직각삼각형은 모두 합동(SAS 합동)이다. …중략… 한편, 정사각형 EFCD의 넓이는 정사각형 HGBA와 네 개의 직각삼각형의 넓이의 합과 같으므로,




$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2} ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\therefore\ a^2 + b^2 = c^2$$

이상에서, 직각삼각형의 빗변의 길이의 제곱은 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합과 같음을 알 수 있다(김연식 · 김홍기, 1998, p.179).

대수적 알고리즘을 이용하는 이와 같은 증명 방법은 다른 증명 방법에 비해 상당히 간단한 증명 방법이지만, 이와 같은 접근 방법에는 다음과 같은 문제점이 있다.

첫째, 기하적 상황을 대수적 문제로 환원함으로써, 주로 문자의 계산을 통해 간명하고 정

* 한국교육과정평가원
** 건국대학교

확하게 피타고라스의 정리를 증명할 수 있다는 장점이 있는 반면에, 창조적 사고, 직관적 추론을 가능하게 하는 기하학적 직관이 捨象된다는 문제점이 있다. 즉 "직각삼각형의 빗변의 길이의 제곱은 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합과 같음을 알 수 있다"는 언급에서 '변의 길이' 사이의 관계만을 강조하고 있으며, '길이의 제곱'이 갖는 기하학적인 의미, 즉 면적 사이의 관계를 직관적으로 파악하는 것이 쉽지 않다.[1)]

둘째, 반성적 사고를 하는 것이 가능하지 않다. 대수적 조작에 의한 이와 같은 증명 방법은 완결되어 제시될 뿐, 이 증명이 어떻게 생겨났으며, 그러한 사고 과정을 학생들에게 어떻게 경험시킬 것인지에 대한 분석이 전무한 실정이다. 교과서에서는 '피타고라스의 정리' 자체만을 강조하게 되고, 이를 '피타고라스 정리의 활용'에서 여러 가지 활용의 예를 제시할 뿐이다. 즉 학생들 스스로 피타고라스의 정리를 여러 측면에서 생각해보고 이를 다양한 방면에 활용하도록 유도하고 있지는 않다.

셋째, 수학적 관련성을 학생들이 스스로 파악하기가 쉽지 않다. 피타고라스의 정리는 수학 내적으로 중요한 위치를 차지하고 있다. 예를 들어 고등학교 공통수학에서 다루는 제 2 코사인법칙 등은 피타고라스의 정리와 깊은 관련성을 가지나, 고등학교에서는 이를 피타고라스의 정리와는 다소 동떨어진 제 1 코사인 법칙을 이용하여 증명하고 있다.

물론 피타고라스의 정리에 대한 Euclid 식의 복잡한 증명 방법을 학습자에게 일방적으로 주입하는 것과 같은 교육적 병폐는 극복될 필요가 있으며, 대수적 방법을 사용했을 때의 사고의 간편성 등은 교육적으로 매우 중요하다. 그러나 위와 같은 대수적인 증명 방법에는 기하 교육에서 필수적으로 요구되는 시각적-직관적 파악이 쉽지 않다는 것과, Euclid 식의 증명 방법에 나타나는 장점을 간과하기 쉽다는 것이 문제점으로 지적될 수 있다. 즉, 대수적인 기호의 조작이 강조됨으로써, 기하학적 직관이 배제된 채 무의미하고 기계적인 기호의 단순 조작에 빠질 위험성을 경고할 수 있는 것이다.

본 연구에서는 이와 같은 대수적 증명 방법의 보완을 위해, 피타고라스 정리에 대한 Euclid의 증명을 역사발생적으로 분석하고, 대수적인 증명 방법과 기하적인 증명 방법에 대한 교수학적 의미 등을 분석하여, 이로부터 교육적인 시사점을 이끌어내고자 한다.

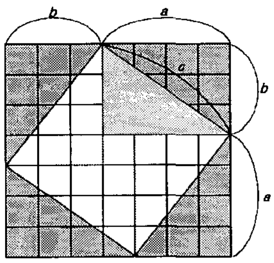
## II. Euclid의 증명에 대한 역사발생적 분석

'피타고라스 정리'란 직각삼각형의 3개의 변을 $a$, $b$, $c$라 하고 $c$에 대한 각이 직각일 때 $a^2+b^2=c^2$이 됨을 뜻하는 것으로서, 고대 그리스의 피타고라스가 처음으로 증명했다고 하여 피타고라스의 정리라고 부르게 되었으나, 그 증명에 대한 기록은 남아있지 않다. 이것은 '삼평방의 정리'라고도 하며, 특별한 경우로서 세 변이 3 : 4 : 5 의 비율인 삼각형이 직각삼각형으로 된다는 것으로, 고대 이집트·바빌로니아·인도·중국 등에서도 알려져 있었다. 중국의 천문학에 관한 옛 수학책 '주비산경(周髀算經)'에는 이 증명을 나타내는 그림이 실려 있어서 주목을 끈다. 영국의 수학자 Zeeman은 고대 중국인의 이 증명법에 대해 "피타고라스의 정리로서는 이 그림이 보여준 아름다운 중국의

1) 대수적 처리에 의해 변 사이의 관계를 증명하는 것과 시각적으로 면적 사이의 관계를 파악하는 것에는 차이가 있다. 이에 대해서는 나중에 다시 논의하겠다.

증명이 가장 마음에 든다(http://www.inue.ac.kr/~shsong/주비산경(피타).htm)"고 격찬하고 있다.

피타고라스가 태어나기 1500년 전에, 이미 이집트에서는 직각을 만들기 위해 단위가 3, 4, 5인 밧줄을 사용했으며, 이러한 목적으로 전문적으로 밧줄을 죄는 사람이 고용되었다고 전해진다. 피타고라스는 이 정리를 이집트의 수학을 통해 알게 되었을 것이기 때문에, 처음에는 피타고라스가 길이의 비가 3 : 4 : 5인 삼각형을 다루었을 것이고 일반적인 직각삼각형에 대한 증명 방법을 독자적으로 발견했다고 보는 것이 타당할 것이다. 이집트 사람들은 $3^2+4^2=5^2$이 성립함을 서기전 2000년 무렵에 이미 알고 있었음에 틀림없지만, 그러나 $a^2+b^2=c^2$을 만족하는 모든 삼각형이 직각삼각형임을 알고 있었다는 증거는 이집트 수학 어디를 보아도 없다고 한다(Heath, 1956, p.352). 즉 길이의 비가 3 : 4 : 5인 삼각형이 직각삼각형이라는 사실은 <그림 1>을 이용하면 쉽게 이해할 수 있으며, 이집트 사람들은 피타고라스 정리의 특수한 경우로서 직각을 만들기 위해 길이의 비가 3 : 4 : 5인 삼각형을 실용적인 측면에서 사용한 것으로 보인다.




<그림 1> 주비산경에 소개된 피타고라스의 증명

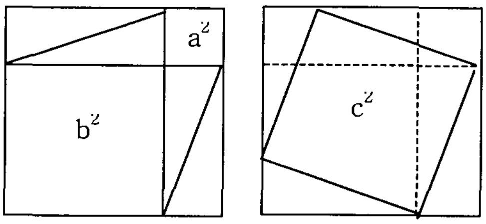
그러므로 피타고라스는 길이의 비가 3 : 4 : 5인 삼각형이 직각삼각형이 된다는 사실을 관찰하고, 일반적으로 모든 직각삼각형이 $a^2+b^2=c^2$을 만족하는지를 조사해 보았을 것이다. 가장 간단한 경우인 직각 이등변삼각형의 경우는 주어진 정사각형의 넓이의 두 배가 되는 넓이를 갖는 정사각형을 구하는 문제를 Socrates가 Menon의 사동에게 대화를 통하여 가르치는 장면에서도 나타난다(김응태 외, 1989, pp.262-269). 피타고라스의 정리에 대한 일반적인 증명은 Euclid의 '원론'에 나타나 있


<그림 2> 피타고라스 정리
(희랍어 사본)

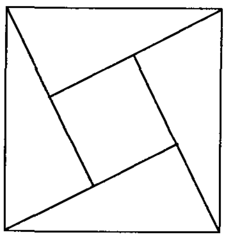
으나, 피타고라스는 '원론'에 나타난 증명 방법을 사용하지는 않았을 것으로 추측된다. 왜냐하면 역사적으로 그리스 수학이 유클리드 원론에서와 같은 공리나 공준에 바탕을 둔 논증적인 학문으로 확립되기 전에는 다분히 직관적이고 경험적인 증명이 시도되었을 것이기 때문이다. 피타고라스가 채택하였다고 생각되는 증명 방법은 크게 두 가지로 나눌 수 있다.

Hankel은 <그림 3>을 이용하여 피타고라스가 증명을 하였을 것이라고 추측하였다(김용운 · 김용국, 1994, p.57). 이 증명은 원론에 비해 다분히 직관적이고 경험적이다. 그러나 피타고라스가 <그림 3>을 이용하였다고 보기에는 다소 석연치 않은 점이 있다. 피타고라스가 이러한 방법으로 증명을 하였다면, Euclid도 이러한 증명 방법을 몰랐을 리는 없을 것이며, 그렇다면

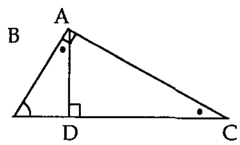
<그림 2>를 이용한 증명 방법보다도 훨씬 직관적인 <그림 3>을 이용한 증명 방법을 '원론'에서 사용하였을 것이다. 또한, 인도 수학자 Bhaskara는 <그림 4>를 제시하면서 증명을 하고 있는데, 이에 비추어 볼 때 <그림 3>을 이용한 증명 방법은 그리스 식의 방법이라기 보다는 오히려 인도의 방법이라는 느낌이 든다 (Heath, 1956, p.355).




<그림 3> Euclid의 증명

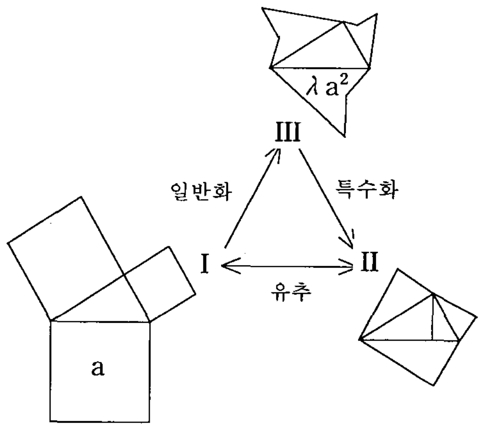


<그림 4> Bhaskara의 증명




<그림 5> 비례식을 이용한 증명

또 다른 추측으로는 피타고라스 자신이 알고 있던 비례식 이론을 써서 증명을 했다는 가설로서, 이것이 가장 그럴 듯하다. 비례식을 써서 증명하는 방법으로는 크게 두 가지가 있다. 한 가지 방법은 닮은 도형의 비례관계를 사용하여 증명하는 방법으로, <그림 5>에서 $BA^2 = BC \cdot BD$, $CA^2 = CB \cdot CD$ 등이 성립함을 이용하는 것이다. 두 번째 방법은 면적관계를 이용하는 것으로 △ABD와 △ACD, △ABC은 서로 닮은 도형이며, △ABD와 △ACD의 면적의 합은 △ABC의 면적과 같다는 사실을 이용한다. 이 방법은 △ABD와 △ACD, △ABC를 세 변 AB, CA, BC에 대하여 각각 대칭이동시키면 직각삼각형 ABC의 각 변에 닮음인 도형을 그린 것과 같으므로, 세 닮은 도형 사이의 면적관계를 도출할 수 있다. 이와 관련하여 Polya는 피타고라스의 정리에 대한 유추를 통한 증명을 <그림 6>을 이용하여 제시하고 있다(우정호, 1998, pp.116-117).

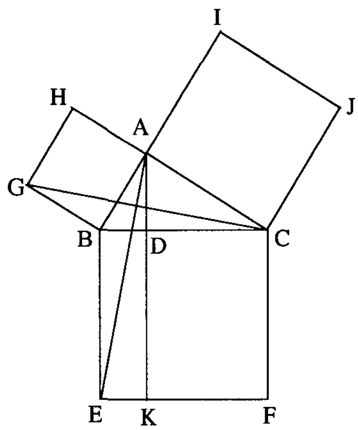



<그림 6> Euclid의 증명

이 두 가지 방법 중 Euclid는 처음 방법에 주목하였을 것으로 생각된다. 식 $BA^2$에서 $BA = BC \cdot BD$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 두 변의 길이가 BC, BD인 직사각형의 넓이와 같다는 것을 알 수 있으며, 이 사실은 <그림 7>을 사용한 증명 방법의 근거가 된다. 즉 <그림 7>에서 정사각형 AHGB와 직사각형 BEKD의 면적이 같다는 사실을 증명하기 위해서는 두 도형과 관련이 있는 합동인 도형을 찾아야 했을 것이다. 비례식을 이용한 방법을 원론의 "명제 47"[2)]과 같은 증명 방법으로 바꾸기 위해,

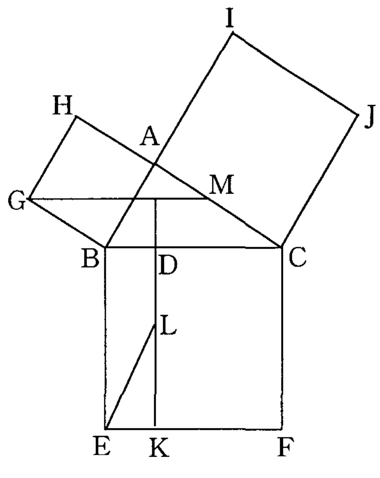
2) <그림 2>에 나타난 내용으로 '피타고라스 정리'에 대한 것이다.

탁월하고 교묘한 작도와 증명을 생각해 냈다는 것은 놀라운 일이다(Heath, 1956, p.353). Euclid가 비례 관계에 의한 증명을 기하학적인 증명으로 바꾸려고 한 근본적인 이유는 통약가능의 문제[3]와 관련된다. 즉 유클리드가 피타고라스의 정리를 증명한 방식은 삼각형의 변의 비를




<그림 7> Euclid의 증명

이용하는 것과는 다른 방법을 택하고 있는데, 그 이유는 통약가능성에 포함된 어려움을 피하기 위해서였다고 한다(Boyer, 1991, p.173). 그리스인에게 무리수의 존재는 골치아픈 문제였으며, 비례 관계에 의한 접근법은 통약불가능의 문제를 피할 수 없다는 문제점이 있었다. 즉 '피타고라스 정리'의 발견으로 인해 $\sqrt{2}$와 같은 무리수가 필연적으로 등장하게 되며, 피타고라스는 이러한 무리수의 존재성을 알고는 있었지만, 무리수의 존재성은 '만물은 數'라는 그들의 믿음체계와는 맞지 않는 것이었다.[4] 그들은 우주의 근본은 수이며 특히 정수와 이들의 비(유리수)로 모든 것을 나타낼 수 있다고 믿었다. 그들은 모든 정수를 척도로 사용하였으며, 다른 종류의 어떤 수라도 정수의 비로 표현이 가능하다고 믿었다. 이러한 수로 이루어진 삶은 잘 정돈된 것이며, 수는 세상을 분명하게 표현할 수 있는 것이었다. 그러나 무리수의 등장으로 인해 만물의 척도로서의 수의 역할은 붕괴되기 시작하였다. 유리수(정수의 비로 나타낼 수 있는 수)를 상식적인 수라고 한다면 무리수는 비상식적인 수로써, 이는 표현할 수 없는,




<그림 8> 등적 변환을 통한 증명

3) '통약가능'이라는 의미는 '같은 단위로 잴 수 있다'는 것이다. 피타고라스가 불완전한 비율 이론을 바탕으로 피타고라스의 정리를 증명하였다면, 피타고라스의 증명 방법은 본질적으로 불완전한 것이며, 그래서 Euclid가 이것을 증명하기 위하여 새로운 증명 방법을 찾아야만 했다는 Proclus의 설명과 일치한다(Heath, 1956, p.353).

4) 이러한 예는 히파수스의 古史에서 찾아볼 수 있다. 히파수스는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 유리수가 아님을 증명하였다. 히파수스의 증명이 있기 전까지 모든 피타고라스 학파 사람들은 정수와 정수의 비로 모든 기하학적인 대상을 표현할 수 있다고 믿고 있었다. 비록 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이를 나타낼 수 있는 분수를 아무도 찾지는 못하였어도, 그들이 아직 찾지 못한 어떤 정수의 비가 존재할 거라는 믿음이 있었다. 피타고라스 학파는 다른 수의 존재의 필요성을 받아들이려 하지 않았다. 따라서 히파수스가 정사각형의 대각선을 표현할 수 있는 어떤 다른 수도 존재하지 않음을 보이자 그들은 혼란에 빠졌고, 히파수스를 처형하기에 이르렀다.

5) '유리수(rational number)'와 '이성적(rational)'의 어원이 'ratio(비)'에서 유래하고 있음은 이를 잘 반영한다.

비율로 나타낼 수 없는 수라는 것이다.[5] 이러한 비상식적인 수를 다루는 데에 가장 큰 문제점은 그 수의 정의가 정확하지 않다는 것이다. 이러한 이유 때문에 기하학의 영역에서 수를 도입하는 것을 금기시하게 되었고, 이에 따라 Euclid는 순수히 기하학적인 관점에서 삼각형의 합동조건을 이용하여 증명을 시도하게 되었을 것이며, 결국 <그림 7>을 이용하여 삼각형의 합동조건 및 삼각형의 넓이를 이용한 증명 방법을 채택하게 되었다고 생각된다. 즉 Euclid는 피타고라스의 증명 방법을 알고 있었으면서도 피타고라스와는 전혀 다른 증명 방법을 발견한 것이다. 그렇지 않다면 Proclus는 Euclid의 증명법이 독창적이라고 강조하지는 않았을 것이다 (Heath, 1956, p.353). 그러므로 <그림 7>을 이용한 증명법은 Euclid가 찾은 것이라고 보아야 한다. 이와 같이 비례식을 이용한 증명 방법을 통하여, 교묘하게 합동을 이용한 기하학적 증명 방법을 찾아낸 것은 Euclid의 탁월하고 놀라운 재주임에 틀림없다.

<그림 8>에서 등적 변환을 이용하면, 정사각형 AHGB의 면적은 평행사변형 CMGB의 면적과 같으며, 직사각형 DBEK의 면적은 평행사변형 ABEL의 면적과 같음을 알 수 있다. 또한 평행사변형 CMGB와 평행사변형 ABEL은 합동이 됨을 직관적으로 알 수 있다.[6] Euclid는 이러한 사실을 우연히 발견하였을 것이며, 이것을 보다 엄밀하게 증명하기 위해 두 평행사변형에서 각각 대각선 AE와 GC를 그은 후, △ABE와 △GBC를 사용하여 삼각형의 합동조건을 이용하였을 것으로 추측된다. Euclid 기하학에서는 변의 길이나 각의 크기가 같음을 보이기 위해 삼각형의 합동이나 닮음을 이용하고 있으며, 이러한 의미에서 Euclid 기하학을 보조선을 이용하는 삼각형 기하학이라고 한다(우정호, 1998, p.77). 또한 그리스 시대에는 도형의 성질을 탐구하기 위해 분석법과 종합법을 병행하였다(우정호, 1998, p.76). 그러므로 위와 같이 <그림 8>을 이용한 추리에서는 정사각형 AHGB와 직사각형 DBEK의 넓이가 같다는 사실로부터 출발하여 분석적으로 접근하고 있으며, 여기서 보조선 AE와 GC를 그려야 하는 이유가 설명된다. 즉 위와 같은 추리는 상당히 개연성을 지니고 있으며, 교육적으로도 활용 가능할 것으로 생각된다.

Euclid 원론은 자연스러운 기하학적 사고의 발생 순서를 뒤집어, 공리적이고 연역적인 전개 양식으로 체계화한 교재로서, Euclid 원론을 그대로 가르치는 것은 자연스러운 기하학적 사고를 방해하고, 오히려 학습에서 장애요인으로 작용할 수 있다는 문제점을 안고 있다. 그러나 Euclid 원론을 통하여 기하학적 사고의 발생 순서를 밝히고, 과거의 수학자들이 경험했을 듯한 과정에 따라 교재를 재배열하고, 이를 교육적으로 활용한다면, 학생들은 자연스러운 사고의 순서에 따라 학습할 수도 있을 것이다. 사실 기존의 기하교육의 문제점은 Euclid 원론 자체를 가르친 데에서 발생되었을 수도 있으며, 피타고라스의 정리도 마찬가지일 수 있다. 오히려 피타고라스의 정리에 대한 Euclid의 증명 방법이 나타나기까지의 과정을 학생들이 경험할 수 있다면, 훨씬 재미있고 활동적이며 의미 있는 학습이 이루어질 수 있을 것이다.

## III. Euclid의 증명이 갖는 수학적 맥락

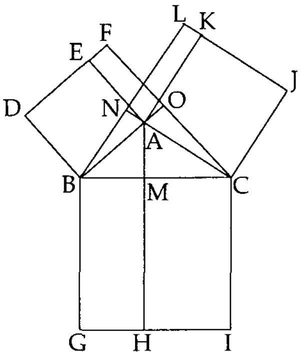
6) 실제로 점 B를 중심으로 회전변환을 하면, 두 도형은 겹쳐진다는 것을 쉽게 확인할 수 있다.

Euclid의 증명 방법이 <그림 5>에서 나타난 바와 같이 기본적으로는 도형의 닮음관계를 이용한 비례식과 관련이 있으며, 또한 등적변환 및 회전변환과 밀접한 관련이 있다는 점에 대해서는 2장에서 기술하였다. 또한 Euclid의 증명 방법을 보다 일반화한 것으로는 Pappus의 정리를 들 수 있다(Heath, 1956, p.366).

여기서는 또 다른 예로, 공통수학에서 제시된 제 2 코사인법칙이 Euclid의 증명 방법과 어떠한 관련성이 있는지에 대해 논의하겠다. 먼저 Euclid 원론 2권 중에 나타난 제 2 코사인법칙과 밀접한 관련이 있는 내용을 살펴 보자. Euclid의 원론에는 각각의 명제가 다음과 같이 문장으로만 기술되어 있어서 내용을 파악하기가 쉽지 않다. 그래서 Euclid 원론의 내용을 먼저 인용하고, 그림을 통해 각 명제가 의미하는 것을 설명하겠다.

<명제 12>
둔각삼각형에서 둔각과 마주보는 변을 한 변으로 하는 정사각형의 면적은 나머지 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 면적의 합보다 크다. 그 차이는 둔각을 끼고 있는 한 변을 길게 늘이고 그 변에 마주보는 점에서 수선을 그었을 때, 그 변과 둔각의 바깥에서 수선에 의해 잘린 선분으로 만든 직사각형의 넓이의 두 배이다.

<명제 13>
예각삼각형에서 예각과 마주보는 변을 한 변으로 하는 정사각형의 면적은 나머지 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 면적의 합보다 작다. 그 차이는 예각을 끼고 있는 한 변 위에, 그 변에 마주보는 점에서 수선을 그었을 때, 그 변과 예각쪽으로 수선에 의해 잘린 선분으로 만든 직사각형의 넓이의 두 배이다.
(Heath, 1956, pp.403-409)



<그림 9> 둔각삼각형에 대한 제이코사인법칙의 증명

<명제 12>는 <그림 9>에서와 같이 ∠A가 둔각인 둔각삼각형 ABC에서, 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형 AEDB를 그리고, AB⊥OF인 선분을 그려서, 직사각형 OFDB를 그리면 직사각형 OFDB의 면적은 직사각형 BGHM의 면적과 같고, 마찬가지 방법으로 선분 AC를 한 변으로 하는 정사각형을 그린 후, 직사각형 CJLN을 그리면, 직사각형 CJLN의 면적은 직사각형 MHIC의 면적과 같다는 것이다. 즉 정사각형 BGIC의 면적은 직사각형 OFDB의 면적과 직사각형 CJLN의 면적의 합과 같다는 것이다. 즉,

(정사각형 BGIC의 면적)=
(정사각형 AEDB의 면적)+(정사각형 CJKA의 면적)+2×(직사각형 AOFE의 면적)

이 성립한다는 것으로 이에 대한 증명은 보조선 AG와 CD를 그은 후 △DBC와 △ABG가 합동임을 보임으로써 가능하다. 여기서 직사각형 AOFE의 면적과 직사각형 AKLN의 면적이 같다는 것은 쉽게 보일 수 있다.[7]

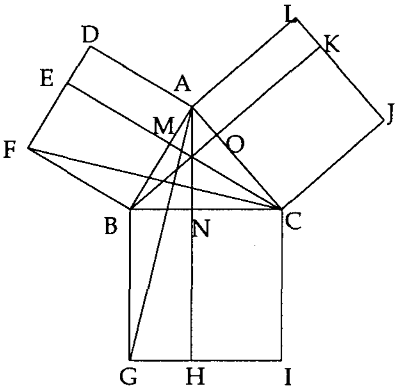
<명제 13>은 예각삼각형 ABC에 대하여 <그

7) Euclid의 원론에서는 △BAK와 △EAC가 합동임을 증명함으로써, 이 사실을 밝히고 있다.

림 10>과 같이 그림을 그렸을 때,

(정사각형 BGIC의 면적)=(정사각형 ADFB의 면적)+(정사각형 CJLA의 면적)−2×(직사각형 ADEM의 면적)

이 된다는 것으로 증명 방법은 본질적으로 둔각삼각형의 경우와 같다. 둔각삼각형과 예각삼각형에서의 증명 과정은 본질적으로 직각삼각형에 대한 피타고라스의 정리를 증명하는 과정과 같으며, 다시 말하면 피타고라스의 정리를 확장한 것이라고 할 수 있다. 또한 <그림 9>와 <그림 10>은 제 2 코사인법칙을 도형을 이용하여 설명하고 있는 것이다.




<그림 10> 예각삼각형에 대한 제이코사인법칙의 증명

물론 이러한 증명과정을 중학교 수학에 직접적으로 도입할 수는 없을 것이나, 학교 수학에서 단순한 기호의 조작보다는 기하학적 직관이 바탕이 되는 풍부한 맥락을 제공하는 피타고라스 정리의 증명 방법을 고려할 필요를 이러한 점에서도 찾아볼 수 있을 것이다.

구체적으로 교과서에서 다루어지는 내용을 살펴보기로 하자. 여기서는 김연식 · 김흥기(1998)의 교과서 내용을 예로 하겠다.

다음의 그림과 같이 꼭지점 A′ 에서 변 BC에 수선 A′ D를 그으면, 직각삼각형 A′ BD에서

$$\overline{A'B}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{A'D}^2$$

$$= (a-x)^2 + y^2 = a^2 - 2ax + x^2 + y^2 \cdots ①$$

한편, 직각삼각형 A′ DC에서

$x^2 + y^2 = b^2 \cdots\cdots\cdots ②$

①, ② 로부터 $\overline{A'B}^2 = a^2 - 2ax + b^2$

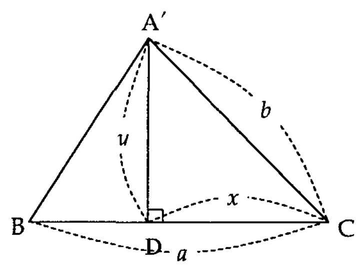
여기서 $ax > 0$ 이므로, $a^2 - 2ax + b^2 < a^2 + b^2$

$\therefore \quad \overline{A'B}^2 < a^2 + b^2$

따라서 $\triangle$A′ BC에서 $\angle$C < 90o 이면

$\overline{A'B}^2 < \overline{BC}^2 + \overline{CA'}^2$

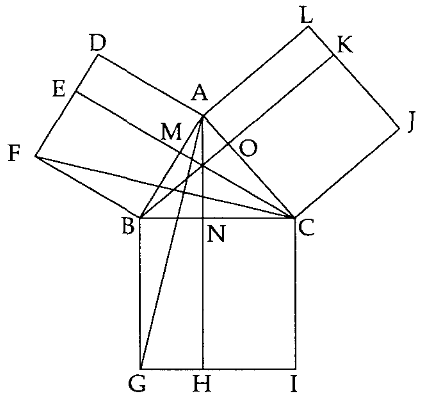
이 성립한다(김연식 · 김흥기, 1998, pp.182-183).




이 증명의 과정에서 $\overline{A'B}^2 = a^2 - 2ax + b^2$ 라는 식을 눈여겨 볼 필요가 있다. 위와 같은 증명의 과정에서는 $a^2$, $b^2$ 이 삼각형에서 BC와 A′C를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이라는 것을 인식한다고 하여도, $2ax$ 라는 식의 의미를 직관적으로 파악하기가 쉽지 않다. 즉 예각삼각형에서 변 사이의 관계가 $\overline{A'B}^2 < \overline{BC}^2 + \overline{CA'}^2$라는 사실을 밝히고는 있지만, 기하학적 의미는 捨象되고 있다.

<그림 11>을 살펴보면 △ABG와 △FBC는 서로 합동이라는 것을 알 수 있다.[8] 여기서 등적변환을 적용하면 직사각형 EFBM과 직사각형 NBGH의 면적은 같고, 또한 마찬가지 방법에 의해 직사각형 ADEM과 직사각형 AOKL의

8) 이에 대한 증명은 피타고라스 정리에 대한 Euclid의 증명 방법을 그대로 적용하면 된다. 또한 회전변환을 이용하면 Euclid 식의 엄밀한 증명을 이용하지 않더라도 합동이라는 사실을 직관적으로 파악할 수 있다.




<그림 11> 예각삼각형에서의 변 사이의 관계

면적이 같음을 알 수 있다. 즉

(정사각형 ADFB의 면적)=(정사각형 BGIC의 면적)−(직사각형 NHIC의 면적)+(정사각형 ACJL의 면적)−(직사각형 OCJK의 면적)

이 되며, 교과서의 증명 과정에서 나타난 $ax$는 바로 직사각형 NHIC의 면적이 된다는 것을 알 수 있다.

그러므로 $\overline{\mathrm{A'B}}^2 = a^2 - 2ax + b^2$ 라는 식에서 $2ax$를 뺀다는 의미는 <그림 11>에서 직사각형 NHIC의 면적의 두 배를 뺀다는 의미와 같고, 이는

(직사각형 NHIC의 면적)=(직사각형 OCJK의 면적)이 된다는 사실과 같다.

실제로

(직사각형 NHIC의 면적) = NH·NC = BC·NC = BC·AC·cos C 이며,
(직사각형 OCJK의 면적) = OC·CJ = OC·AC = BC ·cos C·AC

가 되므로 삼각비를 학습한 상태라면 두 도형의 면적이 같음을 알 수 있고, 또한 교과서의 증명 과정에서 $x$는 $b\cos C$와 같으므로 $\overline{\mathrm{A'B}}^2 = a^2 - 2ax + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 임을 쉽게 알 수 있다.

그러나 고등학교 공통수학에서는 제 2 코사인법칙을 유도하기 위해, 먼저 피타고라스 정리를 사용하여 대수적으로 제 1 코사인법칙을 유도하고, 제 1 코사인법칙을 이용하여 제 2 코사인법칙을 증명하고 있다. 그 결과 학생들은 기하학적 의미와 결부시키지 못하고, 오로지 삼각형의 변 사이의 관계에 대한 공식만을 암기하여 주어진 문제 상황에 적용하는 기교만을 학습하는 현상이 흔히 일어나게 된다.

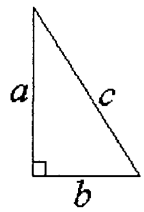
## Ⅳ. 대수적 증명과 기하적 증명의 보완적 관계 - 교수학적 의미

하나의 수학적 개념이 학습되는 상황에는 그 개념과 관련된 다양한 표상의 체계가 구조적으로 존재한다. 이 표상의 체계는 학습자에게 제시되는 외적(external) 표상 체계와, 학습자 개인의 심리적 구성물이라 할 수 있는 내적(internal) 표상 체계로 나누어 생각할 수 있으며, 이 체계들은 구체적인 조작물, 자연 언어, 형식적이고 대수적인 표기, 시각적이고 공간적인 심상 등 여러 가지 형태의 표상들로 이루어진다 (Goldin & Shteingold, 2001). 이러한 표상들이 체계(system)를 이룬다는 것은, 각각의 표상들이 해당 개념의 특정한 의미상의 맥락을 상호 보완적으로 형성하면서 서로 관련되어 있음을 의미한다. 수학 교수의 관점에서 볼 때, 학습자가 하나의 개념에 대한 어떤 표상을 가지고 있다는 것이 그 개념을 완전히 이해하였음을 의미

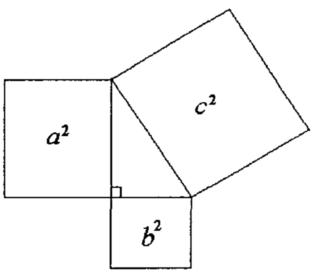
하는 것은 아니겠지만, 그 개념의 의미를 어떤 맥락에서 학습자가 이해하고 있는지를 판단하는 준거로서는 기능할 수 있을 것이다.

이러한 점에 비추어 볼 때, 피타고라스 정리의 수많은 증명 가운데 한 두 가지를 택하여 학습자에게 제시할 수밖에 없는 현실적인 상황에서, 제시되는 증명만이 갖는 특정한 맥락과 그 때 형성될 수 있는 학습자의 표상은 어떠한 것인가 하는 것은, 그 증명이 갖는 간결함과 편의성 이전에 먼저 고려되고 분석되어야 할 교육적인 의미를 가질 수 있다.

무엇보다도 우선, 피타고라스 정리를 나타내는 식 $a^2+b^2=c^2$ 은 직각삼각형이 주어지는 상황에서 의미를 가지며, 이 때의 $a, b, c$는 각각 직각삼각형의 '변의 길이'를 의미한다. 이 경우 <그림 12>와 같은 시각적이고 공간적인 심상이 식 $a^2+b^2=c^2$ 와 관련될 수밖에 없음은 당연하다. 그렇다면 이 때 $a^2, b^2, c^2$은 학습자에게 어떠한 표상을 제공해 줄 것인가? 일단 <그림 12>만으로 볼 때 $a^2, b^2, c^2$은 더 이상 특별한 공간적인 표상을 갖지 않으며, 단순히 대수적인 의미의 "$a$의 제곱, $b$의 제곱, $c$의 제곱"일 뿐이다. 그러나 <그림 13>을 이용하는 Euclid의 증명이 제공되면, 그 증명 과정에서 $a^2, b^2, c^2$은 $a, b, c$를 각각 한 변으로 하는 정사각형의 '넓이'라는 새로운 맥락과 공간적인 표상을 가지게 된다. 이는 $a^2, b^2, c^2$이 그 자체로 기하학적인 의미를 가지게 되었음을 뜻하며, 이후에 직사각형이 아닌 닮은 도형의 넓이의 비와 길이의 비가 갖는 관계와 관련되면서 보다 폭넓은 맥락을 가질 수 있는 토대를 제공하게 된다.



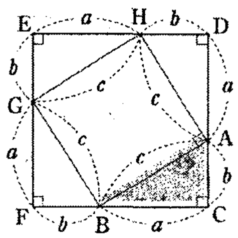
<그림 12>



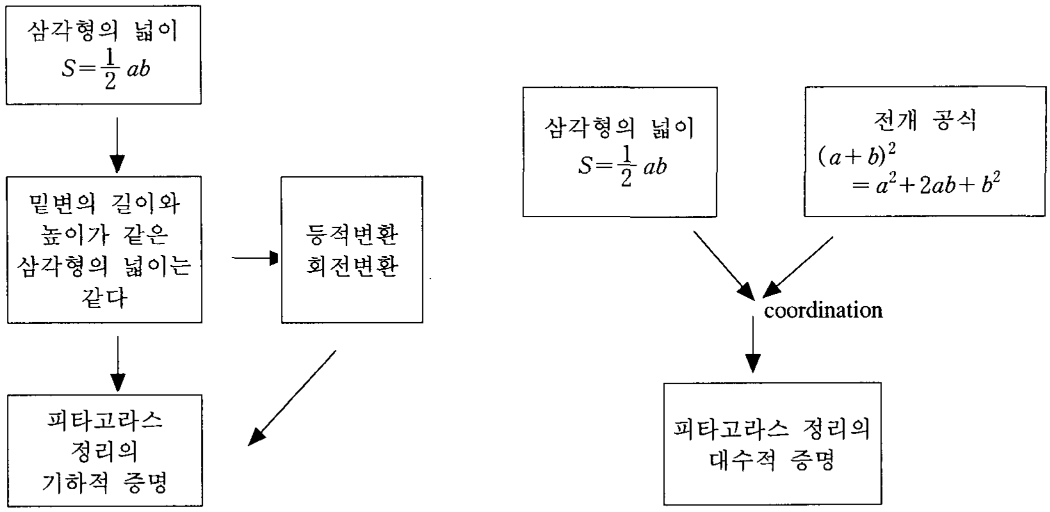
<그림 13> 피타고라스 정리의 기하학적 의미

이와 비교할 때, <그림 14>를 이용하는 증명에서는 $c^2$만 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 나타낼 뿐, $a^2$과 $b^2$은 그 자체로 기하학적인 의미를 가지지 않는다. 오히려 이 증명의 경우, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 이라는 대수적인 알고리즘을 필요로 하며, 이는 Euclid의 증명에서 가질 수 있는 기하학적인 것과는 다른, 대수적인 표상을 학습자가 형성하게 한다. 이러한 맥락에서, 우리는 Euclid의 증명을 '기하적 증명', <그림 14>를 이용하는 증명을 '대수적 증명'이라 부를 수 있을 것이다.

실제로 이 두 증명 방법을 각각 학습자가 이해하기 위하여 필요로 하는 선행 조건들을 분석해 보면, '기하적 방법'은 삼각형의 합동 조건과 넓이 구하는 방법, 두 삼각형이 같은 넓이를 가질 조건 등을 이해하고 있을 것을 요구하며, '대수적 방법'은 삼각형의 넓이를 구하는 방법과 함께 다항식의 전개 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$을 알고 있어야 하고 이 두 가지의 개념적 구조가 통



<그림 14> 피타고라스 정리의 대수적 증명




합, 조정(coordination)될 때 증명을 이해할 수 있다고 말할 수 있다.

여기에 덧붙여서 고려해야 할 것은, '대수적 방법'에서 4개의 직각삼각형이 같은 넓이를 가진다는 것은 그것들의 변의 길이가 모두 같기 때문으로, 이는 합동조건이나 넓이 공식을 기계적으로 적용하면 알 수 있는 것인 반면에, '기하적 방법'에서 같은 넓이를 갖는 삼각형이나 사각형들을 비교하는 활동에는 '등적변환'이나 '회전변환'의 요소가 포함되어 있다는 점이다. 이는 '대수적 방법'이 알고리즘을 적용하는 靜的인 것으로 귀결되기 쉬운 반면에, '기하적 방법'은 그 자체로 動的이고 시각적인 기하학적 직관과 깊이 관련되어 있음을 의미한다.

이같은 내용의 위계를 도식화하면 위와 같다.

이러한 분석을 통하여 피타고라스 정리의 '기하적 증명'과 '대수적 증명'이 각각 다른 지식의 위계를 가지며 전혀 다른 표상을 형성하게 한다는 것을 알 수 있다면, 이들 중 '대수적 증명'만을 학습자에게 제시하였을 경우 놓치게 되는 교육적 의미에 대해서도 논의할 수 있을 것이다. 기하 교육은 결국 기하학적 사고의 개발에 기여해야 하는 것이고, 기하학적 사고는 공간적인 지각적 기능을 위시한 시각적 기능, 정확한 언어 구사 기능, 논리적 사고 기능, 작도 기능, 수학적 모델링 기능 등이 그 중심적인 요소라고 할 수 있다(우정호, 1998, p.299).

그렇다면 피타고라스의 정리를 증명하는 상황이 단순히 '증명을 완성한다'는 그 자체만으로 충분한 교육적 의미를 가진다고는 말하기 어렵다. 수학의 다른 경우에도 흔히 볼 수 있는 일이지만 결국 대수적인 방식의 증명은 증명의 내용을 단순화시켜서 사고를 절약해 주고 결론에 경제적으로 도달하게 하는 장점이 있는 반면에 알고리즘을 기계적으로 적용하여 처리하는 결과로 귀결되기 쉽다는 위험성이 있다. 기하 교육이 견지해야 하는 필수적인 요소는 학습자의 공간적인 직관과 개념적인 사고를 풍부하게 만들어 주어야 한다는 것이며, 이는 대수적인 알고리즘보다는 공간적인 지각의 맥락에서 먼저 시도되어야 하는 것이다.

물론 '대수적 증명'은 그 경제적인 간결함 외에도 그 자체로 갖는 수학적, 교육적 맥락이 있으며 이 역시 무시될 수는 없다. Zeeman의 '아름답다'는 표현에서도 느낄 수 있는 것이지

만, 이 증명은 기하학적인 문제를 대수학적으로 접근하여 해결하는 좋은 예가 될 수 있으며 이는 학습자에게 수학적인 구조를 체험할 수 있는 기회를 제공하는 것이라 생각할 수도 있다. 그러나 기하적인 문제에 대한 대수적인 접근은 기하가 고유하게 가지고 있는 공간적인 지각의 맥락에 대한 개념과 직관이 형성된 이후에 비로소 그 진정한 의미와 아름다움을 파악할 수 있는 것이며, 그 증명 자체로는 드러나지 않는 공간적인 의미를 파악하지 못한 상태에서 증명 과정을 학습하게 된다면 이는 학습자의 사고가 대수적인 알고리즘 자체에 고착될 위험성을 내포하는 상황이 된다는 것은 반드시 고려해야 할 일이다.

## Ⅳ. 결론

본 연구는 현재 학교수학에서 제시되는 피타고라스 정리의 증명을, Euclid의 원론에서 제시되고 있는 증명 방식과 비교하여 그 수학적, 교수학적 맥락을 분석하였다. 현행 교육과정이 피타고라스 정리와 관련하여, 그 '정리의 의미를 파악하게 하는데 주안점을 두어야 한다'면서도 '증명 방법은 가급적 간단한 것으로' 선택할 것을 권하고 있는 까닭에, 교과서에서는 전통적으로 가르쳐 오던 Euclid의 증명 방법 대신에 '가장 간단하게 증명을 끝낼 수 있는' 대수적 증명 방법을 대개 제시하고 있다. 그러나 증명의 '간결성'을 추구하는 것은 증명의 '결과'에 빨리 도달하게 할 수 있다는 장점이 있는 반면에 증명의 '과정'에서 얻을 수 있는 풍부한 기하학적 맥락과 사고의 많은 부분을 놓치게 하는 결과를 가져올 수 있음에 유의할 필요가 있다.

본 연구에서 분석한 바에 따르면, 피타고라스의 정리에 대한 Euclid의 증명은 대수적인 개념을 사용하지 않으면서 공간적인 직관과 기하학적인 사고를 주어진 맥락에서 풍부하게 펼칠 수 있는 증명 방법이며, 대수적인 맥락이 아닌 기하적 맥락에서 제 2 코사인 법칙이나 회전변환, 등적변환 등의 다양한 수학적 개념으로 아이디어를 펼쳐 나갈 수 있는 가능성을 내포하고 있는 증명 방법이다. 이에 비하여, 대수적 증명 방법은 증명을 매우 간결하게 끝낼 수 있으며 또한 대수적인 개념이 기하적인 문제 해결에 어떻게 도움을 줄 수 있는지 보여줄 수 있는 좋은 예가 될 수 있지만, 피타고라스 정리가 가질 수 있는 여러 가지 공간적 표상들을 포함하지 못하고 있어 학습자의 기하적이고 창조적인 사고를 진작시키는데 어느 정도의 한계를 가진다. 이처럼 두 가지 증명 방법은 각각의 장단점과 함께 고유한 맥락을 가지고 있으므로 교수-학습 상황에서 상호 보완적인 역할을 해야 한다고 말할 수 있다.

학교수학에서 논증기하, 특히 '증명'에 관한 내용은 그 학습-지도에서 실로 많은 어려움을 겪는 부분이다. 그러나 증명 교육은 '정당화'라는 목표 이외에도 수학적 내용의 조직화와 체계화, 개념의 이해와 확신, 설명과 의사교환 등의 다양한 의미를 수학 학습 내에서 지닐 수 있다. 학습자는 증명의 언어만을 암기할 수도 있고, 증명의 아이디어를 암기하여 재생할 수도 있으며, 증명을 이해하여 새로운 문제에 적용할 수도 있고, 도형의 성질과 명제를 스스로 탐구하고 추측하여 증명할 수도 있다(우정호, 1998, p.337). 피타고라스 정리에 대한 Euclid의 증명 방식을 도입한다 하더라도, 이해가 결여된 상태에서 증명을 암기하도록 가르치는 형식주의적인 교육이 문제가 되는 것이지 다른 증명 방법에 비해 그 증명 과정이 포함하고 있는 풍부한 수학적, 교육적 맥락은 간과되기 어려

운 것이다. 중요한 것은, 학습자에게 가능한 한 간단한 증명을 찾아서 가르치는 것이 아니라 정리의 의미와 증명의 아이디어를 학습자가 직관적으로 통찰하도록 하는 과정과 주어진 상황에서 풍부한 맥락을 연결시키는 수학화 과정에 있다 할 것이다.

## 참고문헌


교육부(1994). 중학교 수학과 교육과정 해설. 서울: 대한교과서주식회사.

교육부(1999). 중학교 교육과정 해설(III) -수학, 과학, 기술・가정-. 서울: 대한교과서주식회사.

김연식・김홍기(1992). 중학교 수학 3. 서울: 동아출판사.

김연식・김홍기(1998). 중학교 수학 3. 서울: 동아출판사.

김용운・김용국(1994). 수학사대전. 서울: 도서출판 우성.

김응태・박한식・우정호(1989). 증보 수학교육학개론. 서울: 서울대학교 출판부.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2000). *A history of mathematics.* 양영오, 조윤동 (역). 수학의 역사・상. 서울: 경문사. (영어원작은 1991년에 출판).

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001) Systems of representations and the development of mathematical concepts. *The Roles of Representation in School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary vol.1.* New York: Dover Publications, INC.

Loomis, E. S. (1972). *The Pythagorean proposition.* Reston, VA: NCTM.


# Pedagogical implication of Euclid's proof about Pythagorean theorem


Park, Moon Hwan (KICE)

Hong, Jin Kon (Konkuk University)



This study analyzed the mathematical and didactical contexts of the Euclid's proof about Pythagorean theorem and compared with the teaching methods about Pythagorean theorem in school mathematics.

Euclid's proof about Pythagorean theorem which does not use the algebraic methods provide students with the spatial intuition and the geometric thinking in school mathematics. Furthermore, it relates to various mathematical concepts including the cosine rule, the rotation, and the transformation which preserve the area, and so forth. Visual demonstrations can help students

analyze and explain mathematical relationship.

Compared with Euclid's proof, Algebraic proof about Pythagorean theorem is very simple and it supplies the typical example which can give the relationship between algebraic and geometric representation.

However since it does not include various spatial contexts, it forbid many students to understand Pythagorean theorem intuitively.

Since both approaches have positive and negative aspects, reciprocal complementary role is required in pedagogical aspects.