

다층간분리된 직교 적층 보-기둥의 자유진동과 좌굴하중

Free Vibrations and Buckling Loads of Axially Loaded Cross-Ply Laminated Composite Beam-Columns with Multiple Delaminations

이 성 희* 김 형 열* 박 기 태** 박 대 효***
Lee, Sunghye Kim, Hyeongyeol Park, Kitae Park, Taehyo
(논문접수일 : 2001년 12월 31일 ; 심사종료일 : 2002년 7월 29일)

요 지

본 논문에서는 축방향 압축하중을 받는 다층간분리된 적층 보-기둥의 자유진동과 좌굴에 대한 해석을 수행하였다. 다층간분리된 적층 보-기둥의 고유진동수와 탄성 좌굴 하중에 대한 층간분리의 영향을 조사하기 위해 층간분리의 양단에서 기울기와 곡률이 일정하다는 가정을 적용하여 일반적인 운동학적 연속 조건을 유도하였다. 전체 다층간분리된 보-기둥을 부분으로 분할하고, 연속조건에 따른 반복관계를 각 하부 보-기둥에 부과함으로써 다층간분리된 보-기둥의 특성방정식을 구하였다. 축방향 증분 압축 하중에 따른 다층간분리된 보-기둥의 고유진동수와 탄성 좌굴 하중을 구하였으며 이는 손상되지 않은 적층 보-기둥의 최대 탄성 좌굴 하중에 한정된다. 연구를 통하여 층간분리의 크기, 위치, 수가 고유진동수와 특히 탄성 좌굴 하중에 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있었다.

핵심용어 : 다층간분리, 적층 보-기둥, 고유진동수, 탄성 좌굴 하중, 특성방정식

Abstract

Free vibration and buckling analysis of multi-delaminated composite beam-columns subjected to axial compressive load is performed in the present study. In order to investigate the effects of multi-delaminations on the natural frequency and the elastic buckling load of multi-delaminated beam-columns, the general kinematic continuity conditions are derived from the assumption of constant slope and curvature at the multi-delamination tip. The characteristic equation of multi-delaminated beam-column is obtained by dividing the global multi-delaminated beam-columns into segments and by imposing recurrence relation from the continuity conditions on each sub-beam-column. The natural frequency and the elastic buckling load of multi-delaminated beam-columns according to the incremental load of axial compression, which is limited to the maximum elastic buckling load of sound laminated beam-column, are obtained. It is found that the sizes, locations and numbers of multi-delaminations have significant effect on natural frequency and elastic buckling load, especially the latter ones.

Keywords : multi-delaminations, laminated composite beam-columns, natural frequency, elastic buckling load, characteristic equation

* 책임저자, 정회원 · 한국생산기술연구원 선임연구원
전화: 032-234-0604; Fax: 032-234-0607
E-mail: birdlee@kitech.re.kr

* 정회원 · 한국건설기술연구원 선임연구원

** 한국건설기술연구원 선임연구원

*** 정회원 · 한양대학교 토목공학과 조교수

• 이 논문에 대한 토론을 2002년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2003년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

층간분리는 적층 복합재료 구조물에서 흔히 발생하는 파손형태이며, 이러한 구조물이 인장하중 조건에 있을 때는 수지의 크랙, 섬유파손이 주요한 파손모드이나, 압축하중에 있을 때는 층간분리가 파손모드에 큰 역할을 한다.¹⁾ 이러한 층간분리부의 존재는 압축강도와 좌굴하중을 급격히 감소시킨다고 알려져 있다.²⁾ 그러므로 층간분리 형태의 결함이 구조물에 존재하면 전체적인 강성과 강도가 저하된다. 또한, 대칭 적층 구조물인 경우 층간분리에 의해 국부적인 비대칭 형태가 발생하여 연계강성(coupling stiffness)이 존재하게 되고 기하학적인 비선형 거동을 유발한다. 이로 인해, 적층 구조물의 좌굴하중이 감소되고 설계하중보다 낮은 하중에서 전체적인 파손이 야기 될 수 있다.

1981년 Chai³⁾ 등은 표면 근처에 층간분리가 있는 적층 구조물의 압축강도를 평가하기 위해 일차원 해석 모델을 개발하였다. 해석을 간단히 하기 위해 균질(homogeneous), 등방성(isotropic), 선형탄성(linear elastic)이라 가정하였으며 베르누이 보 이론(Bernoulli beam theory)과 에너지 해방률(energy release rate)을 기초로 하여 층간분리가 진전되는 것에 중점을 두어 연구하였다. 이러한 연구결과는 후에 많은 연구자에 의해 관심을 가지게 되었고 새로운 층간분리모델을 제시할 수 있는 초석이 되었다. 1985년 Simitises⁴⁾ 등은 간단한 1차원 모델에 대해 층간분리좌굴(delamination buckling)에 대해 연구하였다. 양단 단순지지 조건과 양단 고정 조건에 대해 층간분리된 판의 임계하중을 예측하는데 중점을 두었고 층간분리의 크기, 위치, 두께가 임계하중에 미치는 영향에 대해 연구하였으며, 1988년 Kardomateas와 Schmueser⁵⁾는 1차원 보-판 모델에 대하여 섭동법을 사용하여, 지배방정식을 유도하였고 전단수정계수를 오일러 하중에 추가하는 방법으로 전단변형의 영향을 고려하면서, 좌굴 및 후좌굴거동을 해석하면서 전단변형이 임계하중에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. 1995년 Wang⁶⁾ 등은 국부좌굴이 발생하는 일차원 보의 해석 모델을 제시하였으며, 해석에서 각각의 층간분리부는 접촉이 없는 완전히 분리된 보로 가정하였다. 1999년 Moradi와 Taheri⁷⁾는 일차원 보-판의 좌굴해석을 수행하기 위해 미분구적법(differential quadrature method)을 제시하였다. 전단변형 및 연계강성의 효과를 고려하여 해석을 수행하였다.

한편, 이러한 단일층간분리가 있는 모델의 연구는 좌굴 및 후좌굴⁸⁾ 거동에 대한 연구, 에너지 해방률에 기초한 층간분리부의 진전 및 균열성장^{9),10)}에 관한 연구, 후좌굴된 보-판의 자유 및 강제 진동^{11),12)}에 관한 연구로 계속적으로 관심의 대상이 되었다. 또한 단일층간분리에 대한 연구의 확장으로 다 층간분리가 있는 해석 모델^{13)~17)}에 대한 연구가 활발히 진행되었다. 그러나 이러한 연구결과들은 실제 발생할 수 있는 층간분리형상의 이상화된 해석모델이므로 실제 적층판 내부에 발생할 수 있는 층간분리의 해석을 위해서는 유한요소 해석^{18)~27)}이 필요하였다.

그러나 이러한 층간분리가 있는 구조물의 좌굴 특성 연구들에서는 탄성 좌굴 측면에서의 좌굴하중 및 좌굴 후 균열 진전 등에 대한 후좌굴 거동에 대한 연구가 주류를 이루고 있으며, 좌굴전 하중 증가에 따른 고유진동수 변화에 대한 연구는 거의 전무한 상태이다. 따라서 건설분야에서 적용되고 있는 하중을 지탱하고 있는 구조 부재의 건전성 및 신뢰성을 평가하기 위해서는 본 연구와 같은 해석이 필요하다고 사료되며, 이를 위해 본 연구에서는 직교 적층 보-기둥에 다 층간분리가 종방향과 횡방향으로 발생한 경우에 대해 조직적으로 여러 가지 형태의 층간분리 형상을 모델링하여 진동특성 및 좌굴특성 변화를 함께 조사 하고자 한다.

2. 이론의 정식화

축방향 압축하중을 받는다. 종·횡간 층간분리 보-기둥의 고유진동수 및 탄성 좌굴 하중을 평가하기 위하여 Fig. 1과 같은 다 종·횡간 층간분리 모델에 대한 진동해석을 수행한다. 본 해석에서 고려되는 다 종·횡간 층간분리부 모델은 두께 방향에 대해 항상 일정한 크기이며, 종 및 횡방향으로의 개수의 제한은 없다고 가정한다. 해석을 위한 기하학적 모델의 형상은 Fig. 1에서와 같다. 적층 보-기둥 내부의 다 종·횡간 층간분리로 인해 전체모델은 다수의 요소, 즉, 양단과 내부 그리고 층간분리부가 존재하는 부분과 존재하지 않는 부분으로 분할된다. 양단 영역에서는 좌표축이 양 끝단에 위치하며, 내부 영역에서는 중앙에 위치한다. 그림에서 P_{Ext} 는 외부하중, L 은 각 영역의 길이, h 는 각 보의 두께, L_0 는 전체보의 길이, T_0 는 전체보의 두께, N_T 는 길이방향으로 수직 분할된 전체 영역의 개수를

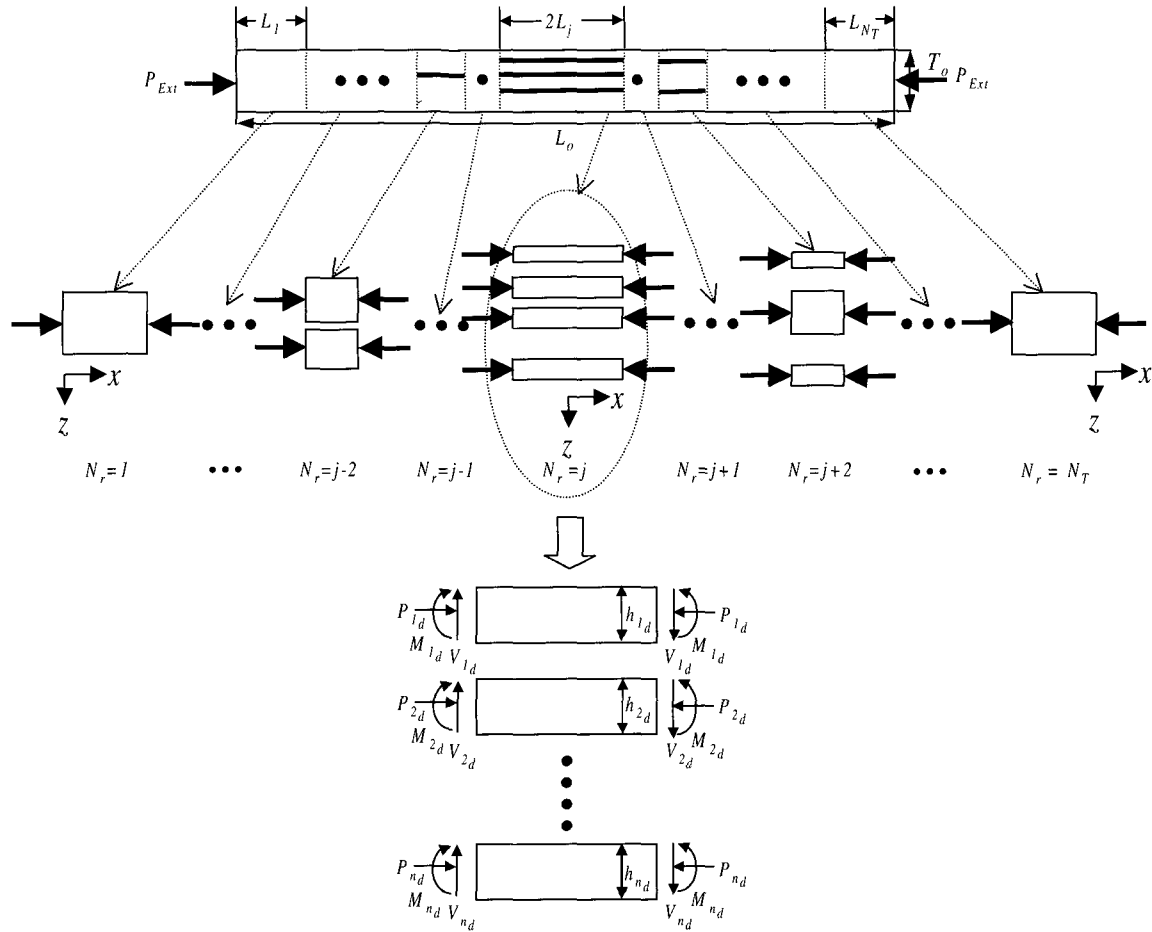


Fig. 1 Geometry and sign conventions of the multi-delaminated beam-columns subjected to axial compression

의미하며, 각 영역 (\$N_r=1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, N_r\$)은 각각 \$n_d (\ge 1)\$개의 적층 보-기둥로 구성된다. 또한 \$P, M, V\$는 각 적층보-기둥에 작용하는 축하중, 모멘트 및 전단력을 의미한다. 다 중·횡간 층간분리된 각 적층 분리보-기둥의 운동방정식은 다음과 같다.²⁸⁾

$$D_i \frac{d^4 w_i}{dx_i^4} + P_{xi} \frac{d^2 w_i}{dx_i^2} + m_i \frac{d^2 w_i}{dt^2} = q_i, \quad (i=1, 2, \dots, N_{TE}) \quad (1)$$

여기서, 아래첨자 \$i\$는 각 분할 적층보-기둥의 번호, \$D_i\$는 각 적층보-기둥의 굽힘강성, \$w_i\$는 각 적층보-기둥의 횡변위, \$P_{xi}\$는 축방향하중성분, \$m_i\$는 단위길이당의 질량, \$q_i\$는 수직분포하중을 의미한다. 그리고 \$N_{TE}\$는

전체 보-기둥의 개수를 의미한다. 자유진동해석에서 수직 분포하중은 무시될 수 있으므로, 식(1)은 다음과 같이 표현된다. 물론 층간분리가 있는 경우 층간분리 경계면에서 상하 인접 적층보-기둥간의 접촉에 의한 법선방향의 압력이 발생될 수 있으며, 이로 인하여 구속모드(constrained mode)가 발생될 수 있다. 하지만, 본 연구에서는 자유모드(free mode)에 대해서만 고려하기로 한다.

$$D_i \frac{d^4 w_i}{dx_i^4} + P_{Ext} \frac{d^2 w_i}{dx_i^2} + m_i \frac{d^2 w_i}{dt^2} = 0 \quad (2)$$

식(2)의 일반해는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 w_i(x_i) &= \Gamma_{1i} f_{1i}(x_i) + \Gamma_{2i} f_{2i}(x_i) + \Gamma_{3i} f_{3i}(x_i) + \Gamma_{4i} f_{4i}(x_i) \\
 f_{1i}(x_i) &= \sin \lambda_i x_i, \quad f_{2i}(x_i) = \cos \lambda_i x_i, \quad f_{3i}(x_i) \\
 &= \sinh \bar{\lambda}_i x_i, \quad f_{4i}(x_i) = \cosh \bar{\lambda}_i x_i \\
 \lambda_i &= \sqrt{P_i / 2D_i + \sqrt{(P_i / 2D_i)^2 + (m_i / D_i) \omega}}, \quad \bar{\lambda}_i \\
 &= \sqrt{-P_i / 2D_i + \sqrt{(P_i / 2D_i)^2 + (m_i / D_i) \omega}} \quad (3)
 \end{aligned}$$

여기서 r_{ki} , ($k=1, 2, 3, 4$)는 경계조건으로부터 결정되는 미지수를 의미하며, λ_i , $\bar{\lambda}_i$ 는 진동수 파라미터를 의미한다. 한편, 다 층·횡간 층간분리보의 횡진동시에 상응하여 각 층간분리보는 외부압축하중 외에 변형에 의한 인장과 압축하중이 주기적으로 작용하게되므로 각 적층보-기둥에 대한 종진동이 고려되어야 한다. 적층보-기둥의 종진동 운동방정식의 일반해는 다음과 같은 형태의 해를 갖는다.²⁹⁾

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 u_i}{dx_i^2} + \frac{\rho h_i}{A_i} \omega^2 u_i &= 0 \quad i=1, 2, \dots, N_{TE} \\
 u_i(x_i) &= H_{1i} g_{1i}(x_i) + H_{2i} g_{2i}(x_i), \\
 g_{1i}(x_i) &= \sin \eta_i^2 x_i, \quad g_{2i}(x_i) = \cos \eta_i^2 x_i, \\
 \eta_i^2 &= \sqrt{(m_i / A_i) \omega^2} \quad (4)
 \end{aligned}$$

여기서 u_i 는 각 적층보-기둥의 종변위, A_i 는 각 적층보-기둥의 신장강성, H_{1i} , H_{2i} 는 경계조건으로부터 결정되는 미지수이다. 일정한 크기의 다 횡간 층간분리가 있는 각 영역에서 적층보-기둥들 사이의 횡방향 변위에 대한 기하학적 연속조건은 다음과 같다.

$$w_{1d} = w_{2d} = \dots = w_{nd} \quad (5a)$$

$$\frac{dw_{1d}}{dx_{1d}} = \frac{dw_{2d}}{dx_{2d}} = \dots = \frac{dw_{nd}}{dx_{nd}} \quad (5b)$$

식(5a)와 식(5b)는 각각 다층분리부의 양단에서의 횡방향 변위 및 기울기의 연속조건을 의미한다. 층간분리가 있는 내부영역의 양단경계에서 식(5a)와 식(5b)의 연속조건을 적용하면, 분리 적층 보-기둥들 사이의 횡방향 변위에 대한 계수간의 관계식은 다음과 같다.

$$\mathbf{E}_{i_d} \mathbf{\Gamma}_{i_d} = \mathbf{E}_{n_d} \mathbf{\Gamma}_{n_d} \quad (6)$$

$$\mathbf{E}_{i_d} = \begin{bmatrix} f_1(-L_j) & f_2(-L_j) & f_3(-L_j) & f_4(-L_j) \\ f_{1,x}(-L_j) & f_{2,x}(-L_j) & f_{3,x}(-L_j) & f_{4,x}(-L_j) \\ f_1(+L_j) & f_2(+L_j) & f_3(+L_j) & f_4(+L_j) \\ f_{1,x}(+L_j) & f_{2,x}(+L_j) & f_{3,x}(+L_j) & f_{4,x}(+L_j) \end{bmatrix}_{i_d}$$

여기서 (), x 는 x 에 대한 미분을 의미한다. 식(6)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{\Gamma}_{i_d} = \mathbf{T} \mathbf{\Gamma}_{n_d}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{E}_{i_d}^{-1} \mathbf{E}_{n_d} \quad (7)$$

여기서 행렬 \mathbf{T} 는 항상 4×4 이다. 또한, 다 층간 분리된 적층보-기둥의 횡진동시 다 층간 분리된 각 보-기둥에서는 전체 보-기둥의 중립축을 기준으로 위치에 따라 인장과 압축 변위가 주기적으로 발생되는데 이러한 주기적인 변위는 각 적층보-기둥에 인장과 압축하중으로 작용하게 된다. 따라서 이러한 인장 혹은 압축하중에 따른 모멘트 성분을 고려하기 위해서는 다 층간 분리된 각 보-기둥의 종변위간의 관계식 및 횡변위와의 관계식이 요구된다. 우선 횡진동에 따른 다 층간분리된 각 적층보-기둥의 종변위간의 관계식을 구하기 위해서는 다층간 분리 영역에서 다음과 같은 역학적인 힘의 평형이 고려된다.

$$N_{1d}^a + N_{2d}^a + \dots + N_{nd}^a = 0 \quad (8)$$

여기서 N 은 각 적층보-기둥의 힘합력(force resultants)을 의미하며, 상첨자 a 는 힘합력이 횡진동에 의해 발생되었음을 의미한다. 한편 식(8)에 적층판의 구성방정식을 적용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{i_d=1}^{n_d} \left[A_{i_d} \left(\frac{du}{dx} \right)_{i_d} - B_{i_d} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{i_d} \right] \Bigg|_{x=\pm L_j} = 0 \quad (9)$$

식(9)에서 곡률은 양단 경계에서 일정하다는 가정을 적용하면 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$\sum_{i_d=1}^{n_d} A_{i_d} \left(\frac{du}{dx} \right)_{i_d} \Bigg|_{x=\pm L_j} = 0 \quad (10)$$

또한 다 층간분리부의 양단경계에서 횡진동에 의한 각 층간분리보-기둥 사이에는 기하학적인 거동 측면에서 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$\frac{du_i}{dx_i} = \frac{z_i}{z_j} \frac{du_j}{dx_j}, \quad i, j = 1_d, 2_d, \dots, n_d \quad (11)$$

즉, 각 층간분리보-기둥의 횡진동에 의한 종방향변위 간의 관계는 각 층간분리보-기둥의 전체보-기둥 중립축으로 부터의 거리 z 의 비와 같다. 따라서 이러한 비를 나타내는 식(11)을 식(10)에 대입하고 다 층간분리영역에서 맨 아래의 하부보-기둥에 대해 정리하면 다음과 같은 일반화된 식을 구할 수 있다.

$$\frac{du_{n_d}}{dx_{n_d}} = \beta \frac{du_{i_d}}{dx_{i_d}}, \quad \beta = - \sum_{k_d=1}^{n_d-1} \left(\frac{z_{k_d}}{z_{i_d}} \right) \left(\frac{A_{k_d}}{A_{n_d}} \right) \quad (12)$$

식(12)는 기하학적 관계 및 역학적 관계를 만족시키는 층간분리보-기둥사이의 종방향변위 사이의 관계식을 의미한다. 식(12)를 다 층간분리영역의 양단경계에서 적용시키고 행렬의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{J}_{n_d} \mathbf{H}_{n_d} = \beta \mathbf{J}_{i_d} \mathbf{H}_{i_d} \quad (13)$$

여기서

$$\mathbf{J}_{i_d} = \begin{bmatrix} g_{1,x}(-L_j) & g_{2,x}(-L_j) \\ g_{1,x}(+L_j) & g_{2,x}(+L_j) \end{bmatrix}_{i_d}$$

식(13)을 다 층간분리 영역의 맨 아래 보-기둥의 종방향 계수에 대한 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{H}_{n_d} = \mathbf{S} \mathbf{H}_{i_d}, \quad \mathbf{S} = \beta \mathbf{J}_{n_d}^{-1} \mathbf{J}_{i_d} \quad (14)$$

여기서 종방향 계수간의 관계를 나타내는 식(14)의 행렬 \mathbf{S} 는 항상 2×2 이다. 다 층간분리 영역에서 각 층간분리보-기둥사이의 종방향 변위와 횡방향 변위간의 기하학적 관계식을 다음과 같다.

$$u_{i_d} = u_{n_d} - \hat{e}_{in} \frac{dw_{n_d}}{dx_{n_d}} \quad (15)$$

여기서 \hat{e}_{in} 은 i_d 번째 적층보-기둥과 n_d 번째 적층 보-기둥사이의 중립축간의 거리를 의미한다. 식(15)를 다 층간분리영역의 양단경계에서 적용시키고 행렬의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{R}_{i_d} \mathbf{H}_{i_d} = \mathbf{R}_{n_d} \mathbf{H}_{n_d} - \hat{e}_{in} \mathbf{K}_{n_d} \mathbf{\Gamma}_{n_d} \quad (16)$$

$$\mathbf{R}_{i_d} = \begin{bmatrix} g_1(-L_j) & g_2(-L_j) \\ g_1(+L_j) & g_2(+L_j) \end{bmatrix}_{i_d}$$

$$\mathbf{K}_{i_d} = \begin{bmatrix} f_{1,x}(-L_j) & f_{2,x}(-L_j) & f_{3,x}(-L_j) & f_{4,x}(-L_j) \\ f_{1,x}(+L_j) & f_{2,x}(+L_j) & f_{3,x}(+L_j) & f_{4,x}(+L_j) \end{bmatrix}_{i_d}$$

식(16)을 다 층간분리 영역의 맨 아래 보-기둥의 종방향 계수에 대한 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{H}_{i_d} = \mathbf{L} \mathbf{\Gamma}_{n_d} \quad (17)$$

$$\mathbf{L} = -\hat{e}_{in} (\mathbf{R}_{i_d} - \mathbf{R}_{n_d} \mathbf{S})^{-1} \mathbf{K}_{n_d}$$

식(17)은 다 층간분리영역에서 횡진동에 의한 종방향 변위와의 관계를 나타내며, 영역간의 연속조건식에서 축방향 변위로부터 유도되는 모멘트 부분에 사용된다. 진동수 방정식을 구하기 위해서는 다 층간분리보-기둥의 일반화된 N_r 번째와 $(N_r + 1)$ 번째 영역간에 다음과 같은 연속조건식이 만족되어야 한다.

$$\begin{Bmatrix} w \\ w_x \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{x=+L_j}^{N_r} = \begin{Bmatrix} w \\ w_x \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{x=-L_j}^{N_r+1} \quad (18)$$

여기서 M 과 V 는 각각 굽힘 모멘트와 전단력을 의미하며, 층간분리가 없는 영역에서는 다음과 같이 표현된다.

$$M_{N_r} = D_i \frac{d^2 w_i}{dx_i^2} \quad (19)$$

$$V_{N_r} = D_i \frac{d^3 w_i}{dx_i^3} + P_{Ext} \frac{dw_i}{dx_i} \quad (20)$$

또한 다 층간분리부가 있는 영역에서는 각 적층보-기둥에 작용되는 모멘트와 전단력 성분이 고려되어야 하며, 다음과 같이 표현된다.

$$M_{N_r} = \sum_{i=1_d}^{n_d} M_i + \sum_{i=1_d}^{n_d-1} z_i N_i$$

$$= \sum_{i=1_d}^{n_d} \left\{ D_i \frac{d^2 w_i}{dx_i^2} \right\} + \sum_{i=1_d}^{n_d-1} \left\{ z_i A_i \frac{du_i}{dx_i} \right\} \quad (21)$$

$$V_{N_r} = \sum_{i=1_d}^{n_d} \left\{ V_i + P_i \frac{dw_i}{dx_i} \right\} = \sum_{i=1_d}^{n_d} \left\{ D_i \frac{d^3 w_i}{dx_i^3} \right\} + P_{Ext} \frac{dw_{n_d}}{dx_{n_d}} \quad (22)$$

식(3)과 식(4)를 각각 식(21)과 식(22)에 대입하고 벡터의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$M_{N_r} = \sum_{i=1_d}^{n_d} \left\{ D_i \frac{d^2 \mathbf{F}_i^T}{dx_i^2} \boldsymbol{\Gamma}_i \right\} + \sum_{i=1_d}^{n_d-1} \left\{ z_i A_i \frac{d\mathbf{G}_i^T}{dx_i} \mathbf{H}_i \right\} \quad (23)$$

$$V_{N_r} = \sum_{i=1_d}^{n_d} \left\{ D_i \frac{d^3 \mathbf{F}_i^T}{dx_i^3} \boldsymbol{\Gamma}_i \right\} + P_{Ext} \left\{ \frac{d\mathbf{F}_{n_d}^T}{dx_{n_d}} \boldsymbol{\Gamma}_{n_d} \right\} \quad (24)$$

식(23)은 $(n_d \times 4)$ 개의 횡방향 변위에 관계되는 미지수와 $(n_d-1 \times 2)$ 개의 종방향 변위에 관계되는 미지수를 가지고 있으며, 식(24)는 $(n_d \times 4)$ 개의 횡방향 변위에 관계되는 미지수를 포함하고 있다. 하지만 식(7)과 식(17)을 대입하여 정리하면 다 층간분리영역에서의 맨 아래의 적층보-기둥의 횡진동에 관계하는 4개의 미지수로 표현 가능하게 된다. 마지막으로 진동수 방정식을 얻기 위해서는 식(18)을 각 영역의 경계에 적용함으로써 구할 수 있으며, 우선 내부영역 $(N_r=2, 3, \dots, N_T-1)$ 에 적용시키면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 = ({}^+ \mathbf{Y}_2^{-1}) ({}^- \mathbf{Y}_3) \boldsymbol{\Gamma}_3$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_3 = ({}^+ \mathbf{Y}_3^{-1}) ({}^- \mathbf{Y}_4) \boldsymbol{\Gamma}_4$$

$$\dots$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{N_r} = ({}^+ \mathbf{Y}_{N_r}^{-1}) ({}^- \mathbf{Y}_{N_r+1}) \boldsymbol{\Gamma}_{N_r+1} \quad (25)$$

여기서 상첨자 ±는 내부영역을 기준으로 오른쪽과 왼

쪽 경계를 의미하며, 행렬 \mathbf{Y} 에 대한 설명은 부록에 제시하였다. 식(25)의 순환관계를 정리하면 다음과 같이 간단한 형태로 표현된다.

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 = ({}^+ \mathbf{Y}_2^{-1}) ({}^- \mathbf{Y}_3) ({}^+ \mathbf{Y}_3^{-1}) ({}^- \mathbf{Y}_4)$$

$$\dots ({}^+ \mathbf{Y}_{N_r}^{-1}) ({}^- \mathbf{Y}_{N_r-1}) \boldsymbol{\Gamma}_{N_r-1} \quad (26)$$

한편 양단 영역의 경계에서는 경계조건에 따라 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 = ({}^- \mathbf{Y}_2^{-1}) ({}^+ \mathbf{B}_1) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 \\ \boldsymbol{\Gamma}_2 \end{Bmatrix}_{N_r=1} \quad \text{for } N_r=1 \text{ and } 2 \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{N_r-1} = ({}^+ \mathbf{Y}_{N_r-1}^{-1}) ({}^- \mathbf{B}_{N_r}) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 \\ \boldsymbol{\Gamma}_2 \end{Bmatrix}_{N_r=N_T}$$

$$\text{for } N_r = N_T - 1 \text{ and } N_T \quad (28)$$

여기서 $\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_2$ 는 경계조건에 따라 결정되는 미지수이며, 행렬 \mathbf{B} 에 대한 자세한 설명은 부록에 제시하였다. 식(28)을 식(26)에 대입하고, 그 결과를 식(27)과 등가시키면 다음과 같은 4개의 선형연립방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{N_r=1} & \dots & \mathbf{Q}_{N_r=N_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 \\ \boldsymbol{\Gamma}_2 \end{Bmatrix}_{N_r=1} \\ \dots \\ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 \\ \boldsymbol{\Gamma}_2 \end{Bmatrix}_{N_r=N_T} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{N_r=1} = ({}^- \mathbf{Y}_2^{-1}) ({}^+ \mathbf{B}_1)$$

$$\mathbf{Q}_{N_r=N_r} = ({}^+ \mathbf{Y}_2^{-1}) ({}^- \mathbf{Y}_3) ({}^+ \mathbf{Y}_3^{-1}) ({}^- \mathbf{Y}_4)$$

$$\dots ({}^+ \mathbf{Y}_{N_r}^{-1}) ({}^- \mathbf{Y}_{N_r-1}) ({}^+ \mathbf{Y}_{N_r-1}^{-1}) ({}^- \mathbf{B}_{N_r}) \quad (29)$$

진동수 방정식은 식(29)의 계수 행렬의 행렬식을 영으로 함으로써 구할 수 있으며, 특성치는 수치해석적 방법으로 구할 수 있다. 본 연구에서는 다 층간분리보-기둥의 고유진동수 및 탄성좌굴하중을 구하기 위해 먼저 다층간분리부가 없는 경우의 탄성좌굴하중을 구한 후 하중을 영에서 층간분리부가 없는 경우의 탄성좌굴

하중까지 여러 하중구간으로 분할 후 각 하중 증가에 따른 고유진동수를 계산한다.

3. 수치결과 및 고찰

축 하중을 받고있는 적층보-기둥의 동적해석 결과의 신뢰성을 검증하기 위해 기존에 발표된 정적해석^{4),5)}에 의한 결과와 비교하였으며, 그 결과를 Fig. 2에서 보여주고 있다. 해석에 사용된 모델은 단일 층간분리가 있는 양단고정보-기둥이다. 층간분리부는 일정 두께 방향위치에서 길이방향으로 보-기둥의 중앙에서 양단 경계조건으로 확장된다. 해석 결과에서 η 는 층간분리부 상부보-기둥의 두께를 전체보-기둥 두께로, δ 는 층간분리부의 길이를 전체보-기둥 길이로, χ 는 보-기둥의 왼쪽 경계부터 층간분리부 중심까지의 길이를 전체보-기둥 길이로 무차원화 된 값을 의미한다. 진동해석을 통하여 얻어지는 고유진동수 및 탄성좌굴하중은 층간분리가 없는 적층보-기둥의 고유진동수 및 탄성좌굴하중으로 각각 무차원화되어 표현된다. 그림에서 선들은 정적해석에 의한 결과이고 점들은 본 연구의 동적 이론해석에 의한 결과이다. 그림에서 보듯이 본 연구의 수치해석 결과가 정적해석에 의한 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

다층 층간분리된 복합보-기둥의 진동특성 및 좌굴하중변화를 평가하기 위해 Fig. 3과 같은 층간분리 형상 모델을 선정하였다. 본 연구에서는 양단 고정 경계조건에 대해서만 다루기로 한다. 그 이외의 경계조건에 대해서는 양단 적층보-기둥에서의 변위 함수만 변경함으로써 쉽게 해를 구할 수 있다. 적층보-기둥의 물성치

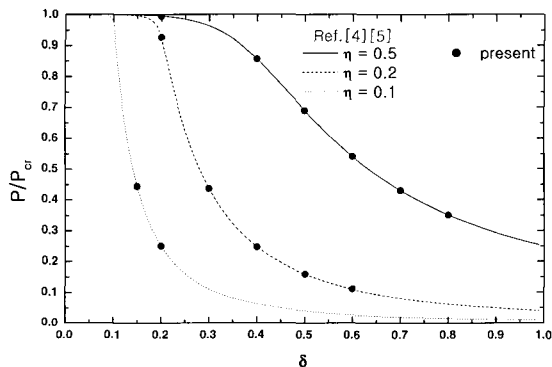


Fig. 2 Comparison of dynamic analysis results with static analysis ones^{4),5)} ($\chi=0.5$)

와 적층순서는 Table 1에 제시하였고, 참고로 각각의 경계조건에 대한 층간분리가 없는 보-기둥의 고유진동수 및 탄성 좌굴 하중은 각각 9.665Hz와 36.180N이며, 앞으로 제시될 모든 고유진동수 및 탄성좌굴하중 결과는 각각 이 값들로 정규화되어 표시된다. 다 층간 층간분리가 적층 보-기둥의 고유진동수 및 좌굴하중에 미치는 영향을 살펴보기 위해 Fig. 3(a)에서와 같은 층간분리 형상을 선정하였다. 즉 동일한 전체 층간분리 크기에 대해 길이방향으로 층간분리가 각각 1개, 2개, 4개인 경우에 대한 모델을 선정하였다. 이때 전체 층간분리부의 중심은 전체보의 중심에 위치시켰으며, 층간분리부를 2개, 4개로 분할시 각 층간분리부 사이의

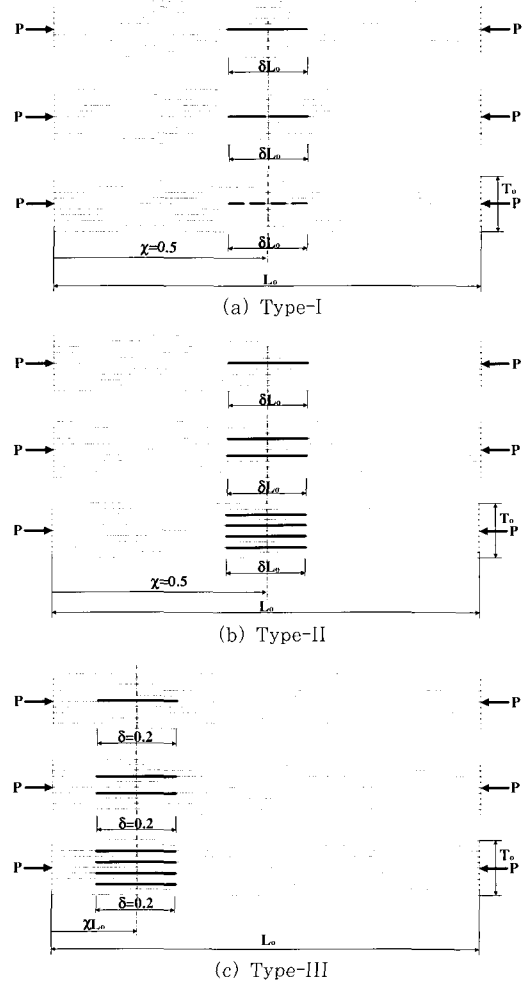


Fig. 3 Multi-delamination types of composite beam-columns(C.C. b.c. for all the models)

Table 1 Material properties, stacking sequence, and geometry of prepreg

Material	Glass-Epoxy		
	Items	Values	Unit
Property	E ₁₁	40.7	GPa
	E ₂₂	9.75	GPa
	G ₁₂	4.65	GPa
	ν_{12}	0.30	
	ρ	1990	kg/m ³
Layup	Cross-ply	{0/90} _{5T}	
Geometry	Length	1000	mm
	Width	25	mm
	Height	2.5	mm(20 plies)
	One ply thickness	0.125	mm

간격은 전체 보-기둥의 0.2%와 0.1% 크기로 상대적으로 작게 부여하였다.

Fig. 3(a)의 각 일정 위치의 층간분리부의 크기 변화에 따른 고유진동수 및 탄성좌굴하중 변화 결과를 Fig. 4에 제시하였다. 그림에서 NOD(number of delaminations)는 층간분리의 개수를 의미하며, 해석 결과에서 보듯이 동일한 층간분리의 크기, 위치 및 개수에 대해 고유진동수 보다는 탄성좌굴하중이 더욱 더 민감한 결과를 보이고 있다. 또한 층간분리부가 1개, 2개 인 경우는 거의 같은 결과를 보이고 있으나, 4개 인 경우는 상대적으로 고유진동수 및 좌굴하중에 덜 민감한 결과를 보이고 있다. 따라서, 층간분리부가 분할

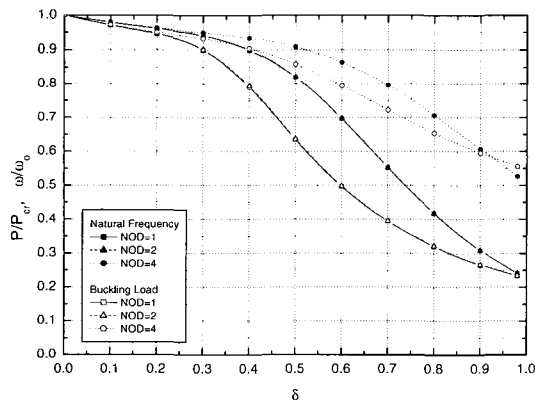


Fig. 4 Natural frequency and buckling load variations vs. delamination length for the type-I (clamped-clamped b.c.)

될수록 고유 진동수 및 탄성좌굴하중 저하 폭은 현저히 줄어들게 된다는 것을 간접적으로 알 수 있다. 그리고 Fig. 2의 결과에서 볼 수 있었던 층간분리부의 크기변화에 대해 좌굴하중이 변하지 않는 임계층간분리길이 Fig. 3(a)의 세가지 층간분리모델에 대해서는 Fig. 4에서 보듯이 고유진동수 및 좌굴하중 모두에 나타나지 않음을 알 수 있다. 또한 층간분리부의 크기가 커지게 되면 고유진동수 및 탄성좌굴하중의 변화 폭은 서로 일정해 짐을 알 수 있다.

이와 동일하게, 다 횡간 층간분리보-기둥에 대한 고유진동수 및 탄성좌굴하중 변화를 고찰하기 위해 Fig. 3(b)와 같은 층간분리 형상을 선정하였다. 즉 동일한 전체 층간분리 크기에 대해 두께방향으로 층간분리가 각각 1개, 2개, 4개인 경우에 대한 모델을 선정하였다. 이때 전체 층간분리부의 중심은 전체보의 중심에 위치시켰다. 이렇게 분할된 층간분리부의 이동에 따른 고유진동수 변화 결과를 Fig. 5에 제시하였다. Fig. 4의 해석 결과와 동일하게 동일한 층간분리의 크기, 위치 및 개수에 대해 고유진동수 보다는 탄성좌굴하중이 더욱 더 민감한 결과를 보이고 있다. 또한 층간분리부의 개수에 따라 Fig. 4의 결과와는 달리 각 경우의 해석 결과의 차이가 크게 발생됨을 알 수 있는데, 이는 고유진동수 및 탄성좌굴하중이 층간분리부의 두께에 더욱 더 직접적인 관계가 있음을 보여준다. 하지만 Fig. 4의 결과와 마찬가지로 층간분리부의 크기가 커지게 되면 고유진동수 및 탄성좌굴하중의 변화 폭은 서로 일정해 짐을 볼 수 있다. 층간분리보-기둥에서 층간분리부의

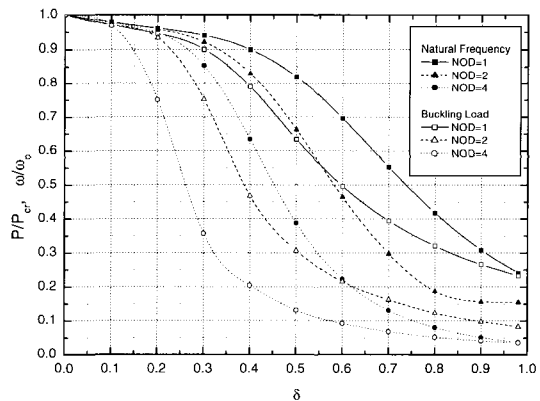


Fig. 5 Natural frequency and buckling load variations vs. delamination length for the type-II (clamped-clamped b.c.)

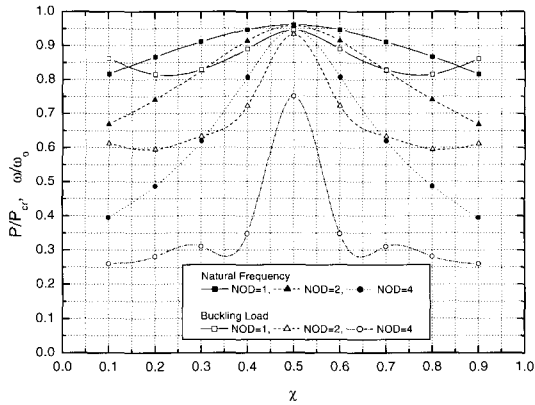
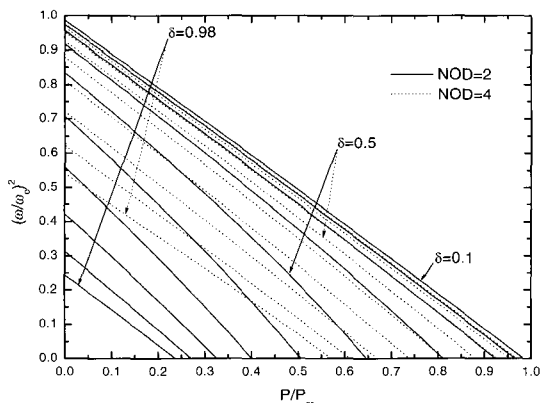


Fig. 6 Natural frequency and buckling load variations vs. delamination length for the type-III (clamped-clamped b.c.)

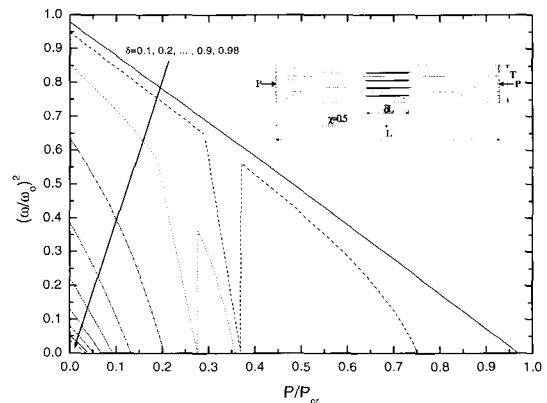
위치 변화에 따른 고유진동수 및 탄성좌굴하중의 변화를 살펴기 위한 형상을 Fig. 3(c)에 제시하였다. 그림에서 보듯이 각 경우의 층간분리부의 길이는 20%로 일정하게 하였으며, 이러한 층간분리부는 좌측에서 우측으로 이동하게 된다. 이때의 해석결과를 Fig. 6에 제시하였다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 층간분리부의 위치 변화 또한 고유진동수 및 좌굴하중에 직접적인 영향이 있음을 알 수 있으며, Fig. 4와 Fig. 5의 경우와 마찬가지로 동일한 크기의 층간분리에 대해 탄성좌굴하중의 저하폭이 큼을 알 수 있다. 또한 모든 경우 층간분리부가 양단 지지점에 근접할수록 최대의 저하를 보이고 있다. 이러한 이유는 경계조건이 양단고정일 경우 고정단에서 최대 모멘트가 발생되므로 결과적으로

층간분리가 고정단 부근에 근접할수록 고유진동수 및 좌굴하중 저하에 미치는 영향이 크게 되기 때문이다.

한편, 하중 증가에 따른 고유진동수의 저하 결과를 Fig. 7에 제시하였다. Fig. 7(a)는 일정크기의 전체 층간분리부가 길이방향에 대해 동일한 크기로 2 및 4개로 나뉜 경우의 각 전체 층간분리크기에 대한 하중대 고유진동수 결과이며, Fig. 7(b)는 두께방향으로 층간분리가 4개인 경우의 각 층간분리크기에 대한 하중대 고유진동수 결과이다. Fig. 7(a)의 해석결과 비교에서 보듯이 일정크기의 전체 층간분리크기에 대해 층간분리가 2개로 나뉜 경우가 4개로 나뉜 경우보다 하중증가에 따른 고유진동수의 상대적으로 급격한 저하를 볼 수 있다. 이는 일정크기의 전체 층간분리길이에 대해 층간분리가 2개로 나뉜 경우가 4개로 나뉜 경우보다 2배의 층간분리크기를 갖기 때문이다. 또한 층간분리가 4개로 나뉜 경우 각 층간분리의 길이는 전체보 길이의 25%를 넘을 수 없게 되고, 이러한 크기는 Fig. 4에서 보듯이 고유진동수 및 좌굴하중이 급격히 변하기 전단계의 크기이다. 그리고 두께방향으로 일정길이의 층간분리가 4개인 경우의 결과를 Fig. 7(b)에서 보여주고 있는데, 그림에서 보듯이 층간분리의 길이가 0.1인 경우는 하중증가에 따른 고유진동수의 감소가 완만한 반면 층간분리의 길이가 0.2, 0.3의 경우는 P/P_{cr} 의 값이 각각 0.4, 0.3인 부근에서 해석결과가 불연속이 발생된다. 이러한 이유는 각 모드가 혼합모드로 변하였기 때문이라고 사료된다. 따라서 층간분리의 길이가 0.4이상의 경우는 각 모드가 국부모드임을 간접적으로 알 수 있다.



(a) Type-I with spanwise 2 & 4 delaminations



(b) Type-II with thicknesswise four delaminations

Fig. 7 Buckling load vs. natural frequency variations with various delamination length

4. 결 론

본 연구에서는 직교 적층보-기둥 내부에 존재하는 다중·횡간 층간분리가 고유진동수 및 탄성 좌굴 하중에 미치는 영향을 고찰하기 위해 일반화된 이론전개식을 유도하였으며, 그 결과를 이용한 해석 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 동일한 층간분리의 형상에 대해 탄성좌굴하중의 감소율이 고유진동수의 감소율 보다 큼을 알 수 있다.
- 2) 정규화된 층간 분리부의 크기가 1에 가까워지면 두 경우 모두 일정한 감소율을 가짐을 알 수 있다.
- 3) 일정 층간분리 크기에 대해 층간분리가 고정단 쪽으로 이동할수록 고유진동수 및 탄성 좌굴 하중을 크게 감소시킴을 볼 수 있다.
- 3) 두께 방향으로 층간분리의 크기가 일정한 경우 층간분리부의 크기 증가에 따른 하중 대 고유진동수 변화 결과에서 $\delta = 0.2, 0.3$ 에서 해석결과의 불연속 현상이 발생하는 데, 이러한 해석 결과로부터 진동모드가 전체모드에서 국부모드로 가는 혼합모드 영역에 있음을 간접적으로 알 수 있다.

참 고 문 헌

1. Pavier J. M., Clarke M. P., "Experimental technique for the investigation of the effects of impact damage on carbon-fiber composites," *Composite Science and Technology*, Vol. 55, 1995, pp.157~169
2. Prichard J. C., Hogg P. J., "The role of impact damage in post-impact compression test," *Composites*, Vol. 21, No. 6, 1990, pp. 503~511
3. Chai, H., Babcock, C. D., and Knauss, W. G., "One Dimensional Modeling of Failure in Laminated Plates by Delamination Buckling," *International Journal of Solid Structures*, Vol. 17, No. 11, 1981, pp.1069~1083
4. Simitzes, G. J., Sallam, S. N., and Yin, W. L., "Effect of Delamination of Axially Loaded Homogeneous Laminated Plates", *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 9, 1985, pp.1437~1444
5. Kardomateas, G. A., Schmueser, D. W., "Buckling and Postbuckling of Delaminated Composites under Compressive Loads Including Transverse Shear Effects", *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 3, 1988, pp.337~342
6. Wang, J. T. S., Cheng, S. H., and Lin, C. C., "Local buckling of delaminated beams and plates using continuous analysis," *Journal of Composite materials*, Vol. 29, No. 10, 1995, pp.1374~1402
7. Moradi, S., and Taheri, F., "Delamination buckling analysis of general laminated composite beams by differential quadrature method," *Composites Part B: engineering*, Vol. 30, No. 5, 1999, pp.503~511
8. Chen, H. P., "Shear Deformation Theory for Compressive Delamination Buckling and Growth," *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 5, 1991, pp.813~819
9. Kyoung, W. M., Kim, C. G., "Delamination buckling and growth of composite laminated plates with transverse shear deformation," *Journal of Composite materials*, Vol. 29, No. 15, 1995, pp.2047~2068
10. Bruno, D., Greco, F., "An asymptotic analysis of delamination buckling and growth in layered plates," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 43, 2000, pp. 6239~6276
11. Chang, T. P., Liang, J. Y., "Vibration of Postbuckled Delaminated Beam-Plate," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 12, 1998, pp.1199~1217
12. Jane, K. C., Chen, C. C., "Postbuckling Deformation and Vibration of a Delaminated Beam-Plate with Arbitrary Delmiantion Location," *Mechanics Research Communications*, Vol. 25, No. 3, 1998, pp.337~351
13. Wang, J. T. S., Lin, C. C., "Engineering analysis of buckling of delaminated beam plates," *Composite Structures*, Vol. 34, No. 4, 1996, pp.397~407

14. Wang, J. T. S., Pu, H. N., Lin, C. C., "Buckling of beam-plates having multiple delamination," *Journal of Composite materials*, Vol. 31, No. 10, 1997, pp.1002~1025
15. Haiying, H., Kardomateas, G. A., "Buckling of orthotropic beam-plates with multiple central delamination," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 13, 1998, pp.1355~1362
16. Shu, D., "Buckling of multiple delaminated beams," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 13, 1998, pp.1451~1465
17. Jane, K. C., Harn, Y. C., "Vibration of delaminated beam-plate with multiple delaminations under axial forces," *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 28, No. 1, 2000, pp.49~64
18. Wang, S. S., Zahlan, N. M., Suemasu, H., "Compressive Stability of Delaminated Random Short-Fiber Composites, Part I : Modeling and Methods of Analysis," *Journal of Composite Materials*, Vol. 19, No. 7, 1985, pp.296~316
19. Wang, S. S., Zahlan, N. M., Suemasu, H., "Compressive Stability of Delaminated Random Short-Fiber Composites, Part II : Experimental and Analytical Result," *Journal of Composite Materials*, Vol. 19, No. 7, 1985, pp.317~333
20. Suemasu H., "Effects of Multiple Delaminations on Compressive Buckling Behaviors of Composite Panels," *Journal of Composite Materials*, Vol. 27, No. 12, 1993, pp.1172~1192
21. Gaudenzi, P., "On delamination buckling of composite laminated under compressive loading," *Composite Structures*, Vol. 39, No. 1-2, 1997, pp.21~30
22. Kim, H. J., "Postbuckling analysis of composite laminates with a delamination," *Computers & Structures*, Vol. 62, No. 6, 1997, pp.975~983
23. Roche, C. H., Accorsi, M. L., "A new finite element for global modeling of delaminations in laminated beams," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 31, 1998, pp.165~177
24. Kyoung, W. M., Kim, C. G., Hong, C. S., "Buckling and postbuckling behavior of composites cross-ply laminates with multiple delaminations," *Composite Structures*, Vol. 43, 1999, pp.257~274
25. Hu, N., Fukunaga, H., Sekine, H., Ali, K. M., "Compressive buckling of laminates with an embedded delamination," *Composites Science and Technology*, Vol. 59, No. 8, 1999, pp.1247~1260
26. Ali, K. M., Sekine, H., "Compressive buckling analysis of rectangular composite laminates containing multiple delaminations," *Composite Structures*, Vol. 50, No. 3, 2000, pp.249~255
27. Hwang, S. F., Liu, G. H., "Buckling behavior of composite laminates with multiple delaminations under uniaxial compression," *Composite Structures*, Vol. 53, 2001, pp.235~243
28. Chen, H. P., "Free vibration of prebuckled and postbuckled plates with delamination," *Composites Science and Technology*, Vol. 51, 1994, pp.451~462
29. WANG, J. T. S., Ltu, Y. Y. GIBBY, J. A., "Vibrations of Split Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, No. 4, 1982, pp.491~502

(부 록)

1. 층간분리가 없는 내부 영역의 경우 Y행렬

$$Y_j(x_j) = \begin{bmatrix} b_{11}(x_j) & b_{12}(x_j) & b_{13}(x_j) & b_{14}(x_j) \\ b_{21}(x_j) & b_{22}(x_j) & b_{23}(x_j) & b_{24}(x_j) \\ b_{31}(x_j) & b_{32}(x_j) & b_{33}(x_j) & b_{34}(x_j) \\ b_{41}(x_j) & b_{42}(x_j) & b_{43}(x_j) & b_{44}(x_j) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_{11}(x_j) &= f_{1j}(x_j), b_{12}(x_j) = f_{2j}(x_j), b_{13}(x_j) = f_{3j}(x_j), b_{14}(x_j) = f_{4j}(x_j), \\ b_{21}(x_j) &= f_{1j,x_j}(x_j), b_{22}(x_j) = f_{2j,x_j}(x_j), b_{23}(x_j) = f_{3j,x_j}(x_j), b_{24}(x_j) = f_{4j,x_j}(x_j), \\ b_{31}(x_j) &= Df_{1j,x_j x_j}(x_j), b_{32}(x_j) = Df_{2j,x_j x_j}(x_j), b_{33}(x_j) = Df_{3j,x_j x_j}(x_j), b_{34}(x_j) = Df_{4j,x_j x_j}(x_j), \\ b_{41}(x_j) &= Df_{1j,x_j x_j x_j}(x_j) + P_{Ext} \cdot b_{21}(x_j), b_{42}(x_j) = Df_{2j,x_j x_j x_j}(x_j) + P_{Ext} \cdot b_{22}(x_j), \\ b_{43}(x_j) &= Df_{3j,x_j x_j x_j}(x_j) + P_{Ext} \cdot b_{23}(x_j), b_{44}(x_j) = Df_{4j,x_j x_j x_j}(x_j) + P_{Ext} \cdot b_{24}(x_j), \\ (N_r &= 2, 3, \dots, N_T - 1, x = \pm L_j, i = 2, 3, \dots, N_{TE} - 1) \end{aligned}$$

2. 다 층간분리가 있는 내부 영역의 경우 Y행렬

$$Y_j(x_n) = \begin{bmatrix} f_{1n}(x_n) & f_{2n}(x_n) & f_{3n}(x_n) & f_{4n}(x_n) \\ f_{1n,x_n}(x_n) & f_{2n,x_n}(x_n) & f_{3n,x_n}(x_n) & f_{4n,x_n}(x_n) \\ m_{1n}(x_n) & m_{2n}(x_n) & m_{3n}(\xi_n) & m_{4n}(x_n) \\ s_{1n}(x_n) & s_{2n}(x_n) & s_{3n}(\xi_n) & s_{4n}(x_n) \end{bmatrix}$$

$$m_{kn} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(D_i \sum_{j=1}^4 \left(\frac{d^2 f_{ji}(x_i)}{dx_i^2} t_{in}(j, k) \right) \right) + D_n \frac{d^2 f_{kn}(x_n)}{dx_n^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(z_{im} A_i \sum_{j=1}^2 \left(\frac{d^2 g_{ji}(x_i)}{dx_i} l_{in}(j, k) \right) \right)$$

$$s_{kn} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(D_i \sum_{j=1}^4 \left(\frac{d^3 f_{ji}(x_i)}{dx_i^3} t_{in}(j, k) \right) \right) + D_n \frac{d^3 f_{kn}(x_n)}{dx_n^3} + P_{Ext} \frac{df_{kn}(x_n)}{dx_n} \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

여기서 $t_{in}(j, k), l_{in}(j, k)$ 는 행렬 T와 L의 j 번째 행과 k 번째 열의 성분을 의미한다.

3. 전체 적층보-기둥의 양단 영역의 B행렬(고정경계조건)

$$B_i(x_i) = \begin{bmatrix} \phi_{1i}(x_i) & \phi_{2i}(x_i) \\ \phi_{1i,x_i}(x_i) & \phi_{2i,x_i}(x_i) \\ D_i \phi_{1i,x_i x_i}(x_i) & D_i \phi_{2i,x_i x_i}(x_i) \\ D_i \phi_{1i,x_i x_i x_i}(x_i) + P_{Ext} \phi_{1i,x_i}(x_i) & D_i \phi_{2i,x_i x_i x_i}(x_i) + P_{Ext} \phi_{2i,x_i}(x_i) \end{bmatrix}$$

$(N_r = 1, N_T, x = L_1, -L_{N_{TE}}, i = 1, N_{TE})$

여기서, $\phi_{1i}(x_i) = f_{3i}(x_i) - (\bar{\lambda}_i / \lambda_i) f_{1i}(x_i), \phi_{2i}(x_i) = f_{4i}(x_i) - f_{2i}(x_i)$ 이다.