

균일하게 탄성지지된 보-기둥요소의 엄밀한 동적강성행렬 유도

Derivation of Exact Dynamic Stiffness Matrix of a Beam-Column Element on Elastic Foundation

김 문 영† 윤 희 택* 곽 태 영**
Kim, Moon-Young Yun, Hee-Taek Kwak, Tae-Young
(논문접수일 : 2001년 9월 11일 ; 심사종료일 : 2002년 8월 21일)

요 지

탄성지반 위에 놓인 보-기둥 요소의 총포텐셜 에너지로부터 변분원리를 적용하여 지배방정식과 힘-변위 관계식을 유도하였다. 4계 상미분방정식 형태의 지배방정식을 4개의 변위 파라메타를 도입하여 1계 연립미분방정식 형태의 선형 고유치 문제로 전환하고, 힘-변위 관계식을 적용하여 엄밀한 정적, 동적 요소강성행렬을 유도하였다. 직접강성법을 이용하여 구조물 강성행렬을 구하고, 2차원 보-기둥구조의 엄밀한 좌굴하중과 고유진동수를 구하고, 결과를 유한요소해와 비교함으로써 본 연구의 타당성을 검증하였다. 이러한 엄밀한 해석방법은 Hermitian 다항식을 형상함수로 도입하여 요소의 강성행렬을 산정하는 유한요소법과 비교할 때, 요소의 수를 대폭 줄일 수 있는 장점이 있다.

핵심용어 : 보-기둥, 고유치문제, 좌굴하중, 고유진동수, 동적강성행렬

Abstract

The governing equation and force-displacement relations of a beam-column element on elastic foundation are derived based on variational approach of total potential energy. An exact static and dynamic 4×4 element stiffness matrix of the beam-column element is established via a generalized linear eigenvalue problem by introducing 4 displacement parameters and a system of linear algebraic equations with complex matrices. The structure stiffness matrix is established by the conventional direct stiffness method. In addition the F. E. procedure is presented by using Hermitian polynomials as shape function and evaluating the corresponding elastic and geometric stiffness and the mass matrix. In order to verify the efficiency and accuracy of the beam-column element using exact dynamic stiffness matrix, buckling loads and natural frequencies are calculated for the continuous beam structures and the results are compared with F. E. solutions.

Keywords : beam-column, elastic foundation, buckling load, natural frequency, dynamic stiffness matrix

† 책임저자, 정회원 · 성균관대학교 토목환경공학과 교수
전화: 031-290-7514; Fax: 031-290-7548
E-mail: kmye@skku.ac.kr

* 한국철도기술연구원 선임연구원

** 성균관대학교 토목환경공학과 석사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2002년 12월 31일까지 본 학회에
보내주시면 2003년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

유연한 적용성과 해석과정의 단순함으로 인하여 보-기둥 부재는 구조해석 분야에서 가장 널리 사용되고 있는 구조 요소이다. 특히 I형, 채널, 앵글단면 형태를 가지는 박벽보(thin-walled beam) 구조는 단위중량에 대한 강성이 매우 높아 실무에서 활발히 적용되고 있다. 그러나 박벽보 요소는 구조적 거동이 복잡하여 단순한 경계조건이 주어지지 않는 한, 고유진동수와 진동모우드 등의 동적 특성과 좌굴하중과 같은 정적 특성에 대한 엄밀한 해석이 매우 어렵다. 이러한 이유로 박벽 보 요소의 안정성 및 자유진동 해석에 관한 연구는 1960년대에 Vlasov¹⁾와 Timoshenko 등²⁾에 의해 시작된 이후, 최근까지도 국내외에서 많은 발전이 이루어지고 있다.

그러나 박벽보의 지배방정식은 복잡한 연립 상미분방정식의 형태를 보이기 때문에 엄밀한 해를 구하기 어렵다. 따라서 이전의 대부분의 연구들은 Hermitian 다항식 또는 isoparametric 보간함수를 형상함수로 사용하여 강성행렬 및 질량행렬을 산정하는 근사적인 유한요소법^{3)~5)}을 사용하였다. 최근에 Friberg⁶⁾는 새로운 해석법을 개발하여 박벽보의 엄밀한 동적강성행렬을 유도하였다. 그러나 그의 방법은 임의의 미분방정식의 해를 구할 수 있을 만큼 충분히 일반적인 방법은 아니라고 판단된다. 또한 Banerjee와 Williams⁷⁾ 그리고 Banerjee 등⁸⁾은 각각 구속된 뒹(warping)효과를 무시한 경우와 이를 고려한 경우에 축하중을 받는 Timoshenko 보요소의 휨-비틀림 동적강성행렬을 얻었다. 그러나 동적강성행렬에 대한 기존의 연구들은 대칭 또는 일축대칭 단면을 갖는 경우에 동적강성행렬을 유도하거나, 유도과정이 일반적이지 못하여 복잡하게 연계된 연립미분방정식 해를 구하기 곤란한 경우가 발생할 수 있을 것으로 판단된다.

본 연구에서는 탄성지반 위에 놓인 보-기둥 구조의 안정성 및 자유진동 해석을 위하여 경계조건의 제약을 받지 않으며, 엄밀한 해를 얻을 수 있는 일관된 정식화 기법을 제안한다. 보-기둥 요소에 대한 총포텐셜 에너지로부터 변분원리를 도입하여 지배방정식과 힘-변위 관계식을 유도하였으며, 지배방정식을 1계 연립미분방정식 형태의 선형 고유치 문제로 전환하고, 힘-변위 관계를 도입하여 엄밀한 정적 및 동적 강성행렬(static and dynamic stiffness matrix)을 산정하였다. 이러한 요소 강성행렬은 형상함수를 사용하지 않은 엄밀

해이므로 보-기둥 구조의 해석시 요소의 수를 획기적으로 줄일 수 있으며 동시에 보다 정확한 해를 구할 수 있다는 장점이 있다. 엄밀한 강성행렬을 사용하는 본 연구의 방법과 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하는 유한요소법을 각각 적용하여 연속보 형태의 보-기둥 구조에 대한 좌굴하중과 고유진동수를 산정하고 그 결과들을 비교, 검토함으로써 엄밀한 요소강성행렬의 효율성 및 타당성을 검증한다.

2. 보-기둥 요소의 지배방정식과 힘-변위관계식의 유도

탄성지반 위의 보-기둥의 지배방정식과 힘-변위 관계는 총포텐셜에너지(Π)에 변분원리를 도입하여 구할 수 있다. 균일한 탄성지반위에서 축하중을 받는 보-기둥(그림 1) 및 요소의 절점력 및 절점변위(그림 2)를 참고하면, 보-기둥 요소의 총포텐셜에너지는 식(1)로 나타낼 수 있다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \{EI v''^2 - P v'^2 + (k - m \omega^2)v^2\} dx - \{U\}^T \{F\} \quad (1a)$$

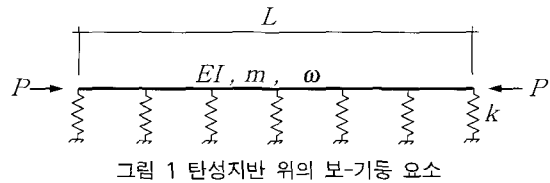


그림 1 탄성지반 위의 보-기둥 요소

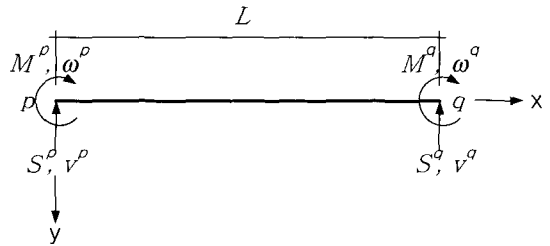


그림 2 보-기둥요소의 절점력 및 절점변위

여기서

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} S^b \\ M^b \\ S^a \\ M^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -S(0) \\ -M(0) \\ S(L) \\ M(L) \end{Bmatrix}, \{U\} = \begin{Bmatrix} v^b \\ \omega^b \\ v^a \\ \omega^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ v(L) \\ v'(L) \end{Bmatrix} \quad (1b,c)$$

L 은 요소의 길이, EI 는 휨강성, P 는 축방향력, k 는 지반의 탄성계수(t/m), m 과 ω 는 각각 보-기둥 요소의 단위길이당 질량과 고유진동수를 나타낸다. v, v' 은 각각 y 방향의 처짐 및 처짐각을 나타낸다. 또한 M, S 는 휨모멘트와 전단력, 그리고 p 와 q 는 각각 요소의 양단 ($x=0, x=L$)을 의미한다.

총포텐셜에너지 식(1)에 변분원리를 도입하면, 다음과 같이 보-기둥 요소의 지배방정식과 경계조건을 구할 수 있다.

$$\int_0^L \{EIv'''' + Pv'' + (k - m\omega^2)v\} \delta v dx = 0 \quad (2)$$

그리고

$$\{EIv''(L) - M^q\} \delta\omega^q - \{EIv''(0) + M^p\} \delta\omega^p = 0 \quad (3a)$$

$$\{EIv'''(L) - Pv'(L) - S^q\} \delta v^q - \{EIv'''(0) - Pv'(0) + S^p\} \delta v^p = 0 \quad (3b)$$

식(2)와 식(3)을 참고하면 탄성지반 위에 놓인 보-기둥 요소의 지배방정식은 다음과 같다.

$$EIv'''' + Pv'' + (k - m\omega^2)v = 0 \quad (4)$$

그리고, 경계 조건 및 힘-변형 관계식을 얻을 수 있다.

$$\delta v^p = 0 \text{ 또는 } S^p = -S(0) = EIv'''(0) + Pv'(0) \quad (5a,b)$$

$$\delta\omega^p = 0 \text{ 또는 } M^p = -M(0) = -EIv''(0) \quad (5c,d)$$

$$\delta v^q = 0 \text{ 또는 } S^q = S(L) = -EIv'''(L) - Pv'(L) \quad (5e,f)$$

$$\delta\omega^q = 0 \text{ 또는 } M^q = M(L) = EIv''(L) \quad (5g,h)$$

$$S = -EIv''' + Pv' \quad (5i)$$

$$M = EIv'' \quad (5j)$$

3. 엄밀한 요소강성행렬의 유도

식(4)와 같이 4계 미분방정식 형태로 표현되는 지배방정식을 선형 연립미분방정식 형태의 고유치 문제로 전환하기 위하여 네 개의 변위 파라미터로 구성된 변위벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$\{d\}^T = \{d_1, d_2, d_3, d_4\} = \{v, v', v'', v'''\} \quad (6)$$

여기서 오른쪽 윗첨자 T는 전치행렬을 나타낸다.

식(6)을 탄성지반 위의 보-기둥 요소에 대한 지배방정식(4)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$(d_4)' = -\frac{P}{EI} d_3 - \frac{k - m\omega^2}{EI} d_1 \quad (7a)$$

이 외에 나머지 변위 파라메타들의 관계는 다음과 같다.

$$d_3' = d_4 \quad (7b)$$

$$d_2' = d_3 \quad (7c)$$

$$d_1' = d_2 \quad (7d)$$

식(7)은 아래와 같이 매트릭스 $[A]$, $[B]$ 의 요소가 모두 상수인 일차 연립미분방정식 형태로 다시 쓸 수 있다.

$$[A]\{d\}' = [B]\{d\} \quad (8)$$

여기서

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k + m\omega^2}{EI} & 0 & -\frac{P}{EI} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{d\}' = \begin{bmatrix} v'(x) \\ v''(x) \\ v'''(x) \\ v''''(x) \end{bmatrix} \quad (9a-c)$$

이제 미분방정식(8)의 일반해는 다음과 같이 복소 지수함수의 형태로 가정할 수 있다.

$$\{d(x)\} = \{Z\} e^{\lambda x} \quad (10)$$

식(10)을 (8)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 비대칭행렬로 구성된 일반적인 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$\lambda[A]\{Z\} = [B]\{Z\} \quad (11)$$

이와 같은 고유치 문제로부터 복소수 값을 허용하는 4개의 고유치 λ_i 와 대응하는 고유벡터 $\{Z\}_i$ 를 구할 수 있다. 여기서 고유치 해석은 IMSL subroutine DCVCRG⁹⁾를 이용하였다.

식(11)의 고유치해석 결과를 이용하여 변위벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{d(x)\} = \sum_{i=1}^4 a_i \{Z\}_i e^{\lambda_i x} \quad (12a)$$

$$\{Z\}_i^T = \{z_{1i}, z_{2i}, z_{3i}, z_{4i}\} \quad (12b)$$

또는

$$\{d(x)\} = [X(x)]\{a\} \quad (13)$$

여기서 $[X]$ 는 각 요소가 x 에 관한 복소지수함수로 구성된 4×4 행렬이다. 이를 구체적으로 표시하면 다음과 같다.

$$[X] = \begin{bmatrix} z_{11}e^{\lambda_1 x} & z_{12}e^{\lambda_2 x} & z_{13}e^{\lambda_3 x} & z_{14}e^{\lambda_4 x} \\ z_{21}e^{\lambda_1 x} & z_{22}e^{\lambda_2 x} & z_{23}e^{\lambda_3 x} & z_{24}e^{\lambda_4 x} \\ z_{31}e^{\lambda_1 x} & z_{32}e^{\lambda_2 x} & z_{33}e^{\lambda_3 x} & z_{34}e^{\lambda_4 x} \\ z_{41}e^{\lambda_1 x} & z_{42}e^{\lambda_2 x} & z_{43}e^{\lambda_3 x} & z_{44}e^{\lambda_4 x} \end{bmatrix} \quad (14)$$

이제 복소계수벡터 $\{a\}$ 를 보-기둥 요소의 절점변위 벡터 $\{U\}$ 로 나타낼 필요가 있다.

$$\{U\} = [Y]\{a\} \quad (15a)$$

여기서

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} d_1(0) \\ d_2(0) \\ d_1(L) \\ d_2(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v^p \\ \omega^p \\ v^q \\ \omega^q \end{Bmatrix}$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{11}e^{\lambda_1 L} & z_{12}e^{\lambda_2 L} & z_{13}e^{\lambda_3 L} & z_{14}e^{\lambda_4 L} \\ z_{21}e^{\lambda_1 L} & z_{22}e^{\lambda_2 L} & z_{23}e^{\lambda_3 L} & z_{24}e^{\lambda_4 L} \end{bmatrix} \quad (15b)$$

이로부터 계수벡터 $\{a\}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다. 여기서 역행렬은 IMSL의 subroutine DLINCG⁹⁾를 이용하였다.

$$\{a\} = [Y]^{-1}\{U\} \quad (16)$$

결국, 식(16)을 식(13)에 대입하면 변위벡터를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{d(x)\} = [X(x)][Y]^{-1}\{U\} \quad (17)$$

여기서 변위벡터는 절점변위 형태의 기하학적 경계 조건을 갖는 식(8)의 엄밀해를 나타낸다.

한편, 요소 강성행렬을 구하기 위하여 탄성지반 위의 보-기둥 요소에 대한 힘-변위 관계를 도입해야 한다. 이를 위하여 힘-변위 관계식(5)에 식(6)과 같은 4개의 변위벡터성분을 도입하여 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$\{f(x)\} = [R]\{d(x)\} \quad (18a)$$

여기서

$$\{f(x)\} = \begin{Bmatrix} S(x) \\ M(x) \end{Bmatrix}, [S] = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & -EI \\ 0 & 0 & EI & 0 \end{bmatrix} \quad (18b)$$

식(17)을 식(18)에 대입하면, 다음과 같이 임의의 x 에서 보-기둥 요소의 단면력과 절점변위와의 관계식을 구할 수 있다.

$$\{f(x)\} = [S][X(x)][Y]^{-1}\{U\} \quad (19)$$

최종적으로 보-기둥 요소의 절점력과 절점변위 관계식을 얻기위하여 절점력에 대한 정의식이 필요한데 이는 식(1b)에 이미 나타내었다. 결국, 식(19), 식(20)을 고려하면 보-기둥 요소의 절점력과 절점변위 관계식과 엄밀한 강성행렬 $[K]$ 는 각각 다음과 같이 얻어진다.

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad (20a)$$

$$\text{여기서 } [K] = \begin{bmatrix} -[S][X(0)][Y]^{-1} \\ [S][X(L)][Y]^{-1} \end{bmatrix} \quad (20b)$$

4. Hermitian 다항식을 이용한 보-기둥 유한요소

3장에서 제시한 엄밀한 동적강성행렬의 정확도와 효율성을 입증하기 위하여, 본 장에서는 Hermitian 3차 다항식을 형상함수로 사용하는 유한요소법을 생각한다.

$$v = h_1 v^p + h_2 L \omega^p + h_3 v^q + h_4 L \omega^q \quad (21)$$

여기서

$$h_1 = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad h_2 = (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) \quad (22a-d)$$

$$h_3 = -2\xi^3 + 3\xi^2, \quad h_4 = (\xi^3 - \xi^2), \quad \xi = x_1 / L$$

그리고 h_i 는 3차 Hermitian 다항식을 나타낸다.

이제 식(21)을 총포텐셜 에너지에 대입하여 적분을 행하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}\{U\}^T (EI[K]_e + P[K]_g + k[M] \\ & - m\omega^2[M])\{U\} - \{U\}^T\{F\} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 $[K]_e$, $[K]_g$ 그리고 $[M]$ 은 각각 탄성 및 기하학적 강성행렬과 질량행렬을 나타낸다.

최종적으로 아래와 같이 보-기둥 요소의 절점력과 절점변위 관계식과 근사적인 강성행렬 $[K]_{app}$ 을 얻는다.

$$\{F\} = [K]_{app}\{U\} \quad (24a)$$

여기서

$$[K]_{app} = EI[K]_e + P[K]_g + k[M] - m\omega^2[M] \quad (24b)$$

5. 수치해석

지금까지 탄성지반 위의 보-기둥 요소의 지배방정식을 1계 연립미분방정식 형태의 고유치 문제로 전환하여 엄밀한 요소강성행렬을 유도하였다. 이렇게 구한 직선 보-기둥 요소의 엄밀한 강성행렬은 해석해라 할 수 있으므로, 보-기둥 구조를 모델링할 경우에 요소의 수를 최소로 줄이면서 정확한 해석결과를 얻을 수 있다. 이러한 요소강성행렬의 정확성을 검증하기 위하여 직접 강성법을 이용하여 아래와 같은 두 가지 형태의 2차원 뼈대구조에 대한 구조물 강성행렬을 산정하고, 이로부터 각각 좌굴하중과 고유진동수를 구한다. 또한 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하는 유한요소법에 의한 결과와 비교, 검토한다.

5.1 균일하게 분포하는 탄성지반 위의 2경간 연속보의 좌굴해석

탄성지반위의 보 요소에 대하여 엄밀한 정적 강성행렬을 구하고, 이로부터 직접강성법으로 그림과 같은 2차원 연속보의 좌굴하중을 산정하였다. 지금까지 이러한 형태의 보 구조는 유한요소법이나 BEF(Beam on Elastic Foundation)방법을 이용하여 해석하였다. 그러나 본 연구에서는 지금까지 구한 엄밀한 정적 요소강성행렬로부터 직접강성법을 이용하여 구조물 강성행렬을 산정하고, 이로부터 그림과 같은 2경간 연속 보 구조에 대한 고유진동수를 구하였으며 해석결과는 다음과 같다.

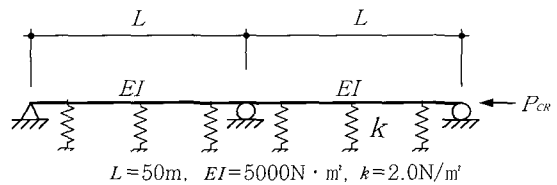


그림 3 탄성지반위의 2경간 연속보

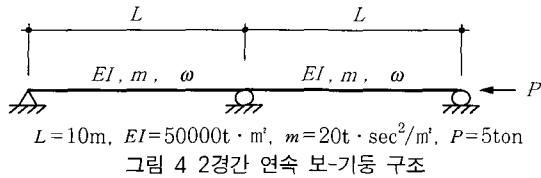
5.2 축하중을 받는 2경간 연속보의 자유진동해석

지금까지 구한 축방향력 P를 받는 보-기둥 요소의 엄밀한 동적 요소강성행렬로부터 직접강성법을 이용하

표 1 탄성지반 위 2경간 연속보의 좌굴하중(N)

mode	Present study (element 2)	F.E. solution			
		(element 20)	(element 12)	(element 8)	(element 4)
1	205.61	205.62	205.73	206.15	221.000
2	217.36	217.43	217.86	219.63	246.52
3	234.95	234.13	235.26	239.63	310.42

여 아래와 같은 2경간 연속 보 구조에 대한 전체 강성행렬을 산정하였다. 이로부터 구조물의 고유진동수를 구하고, 해석해와 비교하였다.



6. 결 론

본 연구의 요약 및 결론은 다음과 같다.

1. 탄성지반 위의 보-기둥 요소에 대한 총포텐셜에너지로부터 변분원리를 이용하여 지배방정식과 힘-변위 관계식을 유도하였다.
2. 4계 상미분방정식의 형태로 표현되는 보 요소의 지배방정식을 1계 연립미분방정식 형태의 선형 고유치 문제로 전환하고, 보-기둥 요소의 힘-변위 관계식을 이용하여 엄밀한 정적, 동적 요소강성행렬을 산정하는 수치해석 기법을 개발하였다.
3. Hermitian 다항식과 같은 형상함수를 도입하여 구한 요소강성행렬과는 달리, 본 연구에서 산정한 이러한 엄밀한 요소강성행렬은 보-기둥 구조를 해석

할 경우에 요소의 수를 대폭 감소시킬 수 있다는 장점이 있다.

4. 이러한 요소강성행렬로부터 2차원 연속 보-기둥 구조의 좌굴하중과 고유진동수를 구하고, 해석해와 비교함으로써 본 연구의 정확성을 검증하였다.

감사의 글

본 논문은 1998년도 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 연구되었으며(1998-001-E01894), 이에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. Vlasov, V. Z., *Thin Walled Elastic Beams*, 2nd ed., Israel Program for Scientific Transactions, Jerusalem, 1961
2. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961
3. Barsoum, R. W. and Gallagher, R. H. "Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems", *Int. J. Num. Meth Eng.* Vol. 2, 1970, pp.335~352

표 2 2경간 연속 보-기둥 구조의 고유진동수(Hz)

mode	Present study (element 2)	F. E. solution			
		(element 20)	(element 12)	(element 8)	(element 4)
1	4.938	4.937	4.938	4.939	4.957
2	7.711	7.711	7.712	7.716	7.782
3	19.742	19.944	19.785	19.820	21.911
4	24.985	24.989	24.989	25.140	29.205
5	44.416	44.439	44.591	45.227	55.072
6	52.127	52.164	52.407	53.301	77.822

4. Chen, W. F. and Atsuta, T., *Theory of Beam-Columns, Vol. 2, Space Behavior and Design*, McGraw-Hill, New York, 1977
5. Kim, S. B. and Kim, M. Y., "Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames", *Engng. Struct.* Vol. 22, No. 5, 2000, pp.446~458
6. Friberg, P. O., "Beam element matrices derived from Vlasov's theory of open thin-walled elastic beams", *Int. J. Numer. Methods Eng.* Vol. 21, 1985, pp.1205~1228
7. Banerjee, J. R. and Williams, F. W., "Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix of an axially loaded Timoshenko beam element", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 31, No. 6, 1994, pp.749~762
8. Banerjee, J. R., Guo, S., and Howson, W. P., "Exact dynamic stiffness matrix of a bending-torsion coupled beam including warping", *Computers and Structures*, Vol. 59, No. 4, 1996, pp.613~621
9. IMSL. Library, *Problem-solving software system for mathematical and statistical FORTRAN programming*, IMSL Inc., Houston, 1984