

인장과 굽힘을 받는 반무한 평판내의 분기균열 해석

Analysis of a Branched Crack in a Semi-Infinite Plate Under Tension and Bending Moment

김 유 환*

범 현 규†

박 치 용**

Kim, Yu Hwan

Beom, Hyeon Gyu

Park, Chi Yong

(논문접수일 : 2001년 5월 23일 ; 심사종료일 : 2002년 7월 13일)

요 지

본 연구에서는 균일한 인장과 굽힘을 받는 반무한 평판내의 분기균열에 대하여 해석하였다. 중첩의 원리를 이용하여 인장과 굽힘을 받는 분기균열에 대하여 응력 및 모멘트 확대계수를 해석하였다. 응력확대계수는 유한요소법과 J 기저 상호매개적분을 이용하여 해석하였고, 모멘트확대계수는 균열선단의 모멘트로부터 모멘트외삽을 이용하여 계산하였다. 무차원화된 응력확대계수와 모멘트확대계수에 대한 수치해석 결과는 분기균열 길이와 주균열의 비, 그리고 분기균열 각의 함수로 나타내었다.

핵심용어 : 분기균열, 응력확대계수, 유한요소법, J 기저상호매개적분, 외삽법

Abstract

A branched crack in a semi-infinite plate under uniform tension and bending moment is considered in this study. By using the superposition, the stress and moment intensity factors for the branched crack subjected to uniform tension and bending moment are evaluated. The stress intensity factors are obtained by using the finite element method and the J -based mutual integral. The moment intensity factors are calculated by extrapolating the values of the moment near the crack tip. Numerical results for the normalized stress and moment intensity factors are shown as functions of the ratio of branched crack length to main crack length and the branching angle.

Keywords : branched crack, stress intensity factor, finite element method, J -based mutual integral, extrapolation

1. 서 론

터빈, 가압기, 펌프 베인 등 산업 설비는 고온, 고압 상태에서 충격 및 반복하중을 받으면서 운전된다. 이러한 영향으로 산업 설비 내에서 균열이 발생하고, 성장 및 진전하게 된다. 균열은 산업 설비의 강도를 급격하

게 감소시키기 때문에 안전성을 확보해야만 하는 산업 설비에 치명적인 영향을 준다. 따라서 산업 설비의 신뢰성을 확보하기 위해서는 균열의 성장 시점 및 균열의 진전 속도를 정량적으로 측정하고, 이를 설비의 수명 및 강도평가에 활용하여야 한다. 이를 위해 균열의 거동을 규정하는 파괴매개변수에 관한 연구가 필수적이다.

† 책임저자, 전남대학교 기계공학과 부교수
전화: 062-530-1682; Fax: 062-530-1689
E-mail: hgbeom@chonnam.ac.kr

* 전남대학교 기계공학과 석사과정

** 한국전력공사 전력연구원 원자력연구실

• 이 논문에 대한 토론을 2002년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2003년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

무한 평판 내의 분기균열에 대하여 Kitagawa등¹⁾은 등각 사상법(conformal mapping method)을 이용하여 응력확대계수를 구하였고, Isida와 Noguchi²⁾는 체적력법(body force method)을 이용하여 무한평판 내의 분기균열에 대한 응력확대계수를 계산하였다. 또한 분기 균열 각이 45°인 경우에 대하여 반무한 평판내의 분기균열의 응력확대계수를 해석하였다. 윤영필 등³⁾은 제한된 p-version 유한요소모델을 인장 모드 상태에 있는 중앙 균열판과 혼합모드(mixed mode) 상태에 있는 중앙 경사 균열판(centrally oblique cracked panel)에 적용하여 응력확대계수를 해석하였다. 그러나 반무한 평판내의 분기균열에 대하여 분기 균열각과 분기 균열의 길이에 대한 응력확대계수는 아직까지 연구되지 않았다.

탄소성 파괴역학(elastic plastic fracture mechanics)의 파괴매개변수인 J 적분은 Rice⁴⁾에 의해 제안되어 응력확대계수 해석에 많이 적용되어 왔다. 특히 선형탄성파괴(linear elastic fracture)일 경우, J 적분과 응력확대계수와의 관계식이 잘 알려져 있어 J 적분으로부터 응력확대계수를 쉽게 구할 수 있다. 그러나 분기균열과 같이 혼합모드가 작용하는 균열문제의 경우에 대해서는 J 적분을 이용해서 혼합모드를 분리할 수 없다. 그래서 Chen과 Shield⁵⁾는 상호보존적분을 제안하여 혼합모드하의 응력확대계수를 해석하였다. 상호보존적분은 응력확대계수를 얻기 위하여 몇몇 연구자들^{6)~9)}에 의해 적용되었다.

본 연구의 목적은 인장과 굽힘을 받는 반무한 평판내의 분기균열에 대한 응력확대계수와 모멘트확대계수를 해석하고자 한다. 중첩의 원리에 의하여 인장과 굽힘을 받는 문제로 분리하여 응력확대계수와 모멘트확대계수를 해석한다. 먼저, 인장을 받는 반무한 평판내의 분기균열에 대한 응력확대계수는 유한요소법을 이용하여 분기균열선단의 응력장과 변위장을 구한다. 그리고 영역적분에 의해 변환된 J 기저 상호매개적분에 응력장과 변위장을 적용하여 모드 I과 모드 II의 응력확대계수를 구한다. 그리고, 굽힘을 받는 반무한 평판내의 분기균열에 대한 모멘트확대계수는 유한요소법을 이용하여 분기균열 선단의 모멘트를 구하고, 이를 이용하여 모멘트의삼을 수행하므로써 모멘트확대계수를 계산한다. 무차원화된 응력확대계수와 모멘트확대계수의 해석결과는 분기균열과 주균열의 길이 그리고, 분기균열 각의 함수로 나타낸다.

2. 반무한 평판내의 분기균열

인장과 굽힘을 받는 반무한 평판내의 분기균열에 대한 형상을 Fig. 1에 나타내었다. 평판은 선형탄성(linear elastic)재료로 가정하였다. Fig. 1에서 e 와 d 는 각각 주균열의 길이와 분기 균열의 길이를 나타내고, h 는 평판의 두께이다. 그리고 θ 는 분기균열 각을 나타내고, σ_0 와 M_0 는 인장 응력과 굽힘 모멘트를 나타낸다. 주균열로부터 길이가 같은 분기균열이 뿔어 있으며 분기 균열은 주균열의 진전방향에 대하여 대칭이다. 균일한 인장응력이 주균열의 방향에 수직으로 작용하고, 굽힘 모멘트는 주균열의 방향과 일치한다. 분기균열의 방향이 인장응력과 굽힘모멘트가 가해지는 방향과 각을 이루므로 혼합모드가 작용하는 균열문제가 된다.

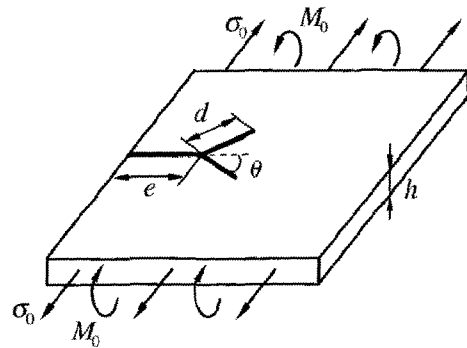


Fig. 1 A branched crack in a semi-infinite plate

3. 응력확대계수

응력확대계수를 해석하기 위하여 J 기저 상호매개적분은 폐경로에 대하여 보존법칙(conservation law)과 경로독립성(path independence)을 만족하고 다음과 같이 정의된다.^{5),6)}

$$I_j^{(A,B)} = \int_{\Gamma_0} (W^{(A,B)} n_1 - t_i^{(A)} u_{i,1}^{(B)} - t_i^{(B)} u_{i,1}^{(A)}) ds \tag{1}$$

여기서 $I_j^{(A,B)}$ 는 물리적으로 상태 (A)와 상태 (B) 사이의 상호 작용을 나타낸다. 식(1)에서 W 는 변형률 에너지 밀도(strain energy density), $t_i = \sigma_{ij} n_j$ 는 표면력 벡터(surface traction vector)의 성분, u_i 는 변위 벡터의 성분이다. Γ_0 는 적분경로이고, n_i 는 적분

경로에 대한 수직단위벡터, 그리고 ds 는 적분경로상의 미소길이를 나타낸다. 하첨자 콤마(.)는 Cartesian 좌표 x_1 과 x_2 에 대한 편미분을 나타낸다. 하나의 항에서 로마 하첨자의 반복은 첨자의 범위 1과 2까지의 합을 나타낸다. 상호매개 변형률 에너지 밀도(mutual strain energy density) $W^{(A,B)}$ 는 다음과 같다.

$$W^{(A,B)} = \sigma_{ij}^{(A)} u_{i,j}^{(B)} = \sigma_{ij}^{(B)} u_{i,j}^{(A)} \quad (2)$$

선형탄성파괴(linear elastic fracture)의 경우, J 기저 상호매개적분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$I_J^{(A,B)} = \frac{2}{E'} (K_I^{(A)} K_I^{(B)} + K_{II}^{(A)} K_{II}^{(B)}) \quad (3)$$

여기서 K_I 과 K_{II} 는 각각 모드 I과 모드 II의 응력확대계수를 나타낸다. E' 은 평면응력(plane stress) 상태 일때는 $E' = E$ 이고, 평면변형률(plane strain) 일때는 $E' = E/(1-\nu^2)$ 이다. 여기서 E 는 Young 계수이고 ν 는 Poisson 비를 나타낸다.

Cho 등⁶⁾이 사용한 계면 균열 선단에서의 잘 알려진 Williams¹⁰⁾의 해를 식(3)에 대입하고, 보조장(auxiliary field) (B) 를 다음과 같이 선택한다.

$$\begin{aligned} K_I^{(B_1)} &= 1, & K_{II}^{(B_1)} &= 0 \\ K_I^{(B_2)} &= 0, & K_{II}^{(B_2)} &= 1 \end{aligned} \quad (4)$$

위 식에서 선택한 보조장 (B) 를 식(3)에 대입하면 J 기저 상호매개적분과 응력확대계수의 관계식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} I_J^{(A, B_1)} &= \frac{2}{E'} K_I^{(A)} \\ I_J^{(A, B_2)} &= \frac{2}{E'} K_{II}^{(A)} \end{aligned} \quad (5)$$

위 식에서 J 기저 상호매개적분 $I_J^{(A, B_1)}$ 와 $I_J^{(A, B_2)}$ 을 구하면 해석하고자 하는 균열선단의 응력확대계수 $K_I^{(A)}$ 와 $K_{II}^{(A)}$ 를 구할 수 있다. J 기저 상호매개적분을 계산하기 위하여 식(1)의 선적분을 영역적분(domain integral)으로 변환하면 다음과 같다.

$$I_J^{(A,B)} = \int_{\Omega} \{ W^{(A,B)} \delta_{1k} - \sigma_{ik}^{(A)} u_{i,1}^{(B)} - \sigma_{ik}^{(B)} u_{i,1}^{(A)} \} q_{,k} dA \quad (6)$$

여기서 δ_{1k} 는 Kronecker delta이고, q 는 다음 조건을 만족하는 임의의 연속함수이다.

$$q = \begin{cases} 0, & r = \Gamma_i \\ 1, & r = \Gamma_o \end{cases} \quad (7)$$

여기서 Γ_i 와 Γ_o 는 균열을 감싸고 있는 내부 적분경로와 외부 적분경로를 나타낸다. 식(6)에서 Ω 는 경로 $\Gamma_o, \Gamma_c^+, \Gamma_i, \Gamma_c^-$ 로 둘러싸여 있는 영역적분 경로이며 Fig. 2에 나타내었다. 영역적분 형태의 J 기저 상호매개적분은 Gauss 적분법을 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$I_J^{(A,B)} = \sum_{\text{element}} \sum_{n=1}^{NG} \{ W^{(A,B)} \delta_{1k} - \sigma_{ik}^{(A)} u_{i,1}^{(B)} - \sigma_{ik}^{(B)} u_{i,1}^{(A)} \}_n q_{,k}^n \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right|_n w_n \quad (8)$$

여기서 하첨자 n 은 Gauss 적분점의 수치를 나타내고, $\left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right|_n$ 은 Jacobian의 행렬식이며, w_n 은 가중계수(weighting factor)이다. 식(8)을 계산하여 식(5)에 대입하면 응력확대계수를 구할 수 있다.

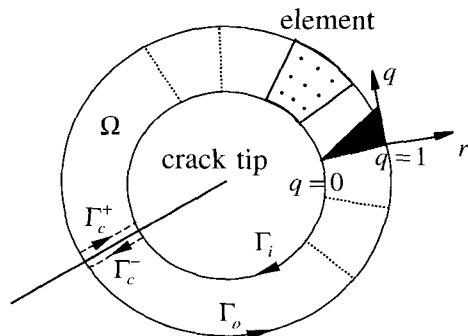


Fig. 2 Domain integral

4. 모멘트확대계수

모멘트확대계수를 계산하기 위하여 Reissner의 평

판이론⁽¹¹⁾으로부터 얻어진 균열 선단장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \frac{K_1^M}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{pmatrix} + \frac{K_2^M}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (9)$$

여기서 K_1^M 과 K_2^M 은 각각 굽힘과 비틀림에 의한 모멘트확대계수이고, 모멘트, $M_{ij}(i,j=1,2)$ 는 $M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz$ 로 정의된다. 균열선단으로부터 거리 $r \rightarrow 0$ 이면 균열선단에서 모멘트확대계수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} K_1^M &= \lim_{r \rightarrow 0} M_{22} \sqrt{2\pi r} \\ K_2^M &= \lim_{r \rightarrow 0} M_{12} \sqrt{2\pi r} \end{aligned} \quad (10)$$

유한요소해석으로부터 얻어진 균열선단의 모멘트를 식(10)의 정의에 의하여 모멘트외삽을 수행하면 모멘트확대계수를 구할 수 있다. 식(10)에 의하여 구한 모멘트확대계수는 평판의 모멘트와 응력과의 관계식에 의하여 다음과 같이 응력확대계수로 변환할 수 있다.

$$K_m = \frac{12z}{h^3} K_n^M \quad (11)$$

여기서 하첨자 $m(=I, II)$ 은 응력확대계수, $n(=1, 2)$ 은 모멘트확대계수의 파괴모드를 각각 나타낸다. h 는 평판의 두께이고, z 는 평판의 두께방향 좌표를 나타낸다. 일반적으로 평판의 모멘트확대계수는 평판의 두께에 따라 변한다. 본 연구에서는 주균열의 길이에 대한 평판 두께의 비 h/e 가 0.1과 10인 경우에 대하여 각각 해석하였다. 주균열의 길이가 평판의 두께보다 상당히 큰 경우는 균열이 상당히 진전한 평면응력이라고 생각할 수 있고, 주균열의 길이가 평판의 두께보다 작은

경우는 물리적으로 초기 균열이 발생하는 평면변형을 상태로 가정할 수 있다.

5. 유한요소해석

응력확대계수와 모멘트확대계수를 구하기 위하여 인장과 굽힘을 받는 반무한 평판내의 분기균열에 대하여 유한요소해석을 각각 수행한다. 반무한 평판내의 분기균열을 균열의 길이와 각에 따라 450개의 유한요소 모델로 만들었다. 요소는 균열선단에서 응력 특이성(stress singularity)을 가지도록 특이 요소(singular element)를 사용하였고, 인장과 굽힘 문제에 따라 각각 8절점 2차 4변형요소(8-node biquadratic element)와 8절점 쉘요소(8-node shell element)를 사용하였다. 요소 수는 모델에 따라 대략 2,000~3,000개이고, 절점(node)의 수는 6,400~7,100개 정도이다. 분기균열은 주균열의 방향에 대하여 완전하게 대칭(symmetry)이므로 1/2 모델에 대하여 유한요소해석을 수행하였다. 유한요소해석은 상용 유한요소 해석 프로그램인 ABAQUS⁽¹²⁾를 이용하였다. 유한요소해석을 이용하여 인장을 받는 문제의 경우, 균열선단의 응력과 변위를 구하였고, 굽힘을 받는 문제에서는 균열선단에서 모멘트를 계산하였다. 반 무한 평판내의 분기균열이 균일한 인장을 받는 경우, 균열선단의 면내 변위에 대한 유한요소해석 결과를 Fig. 3에 나타내었다.

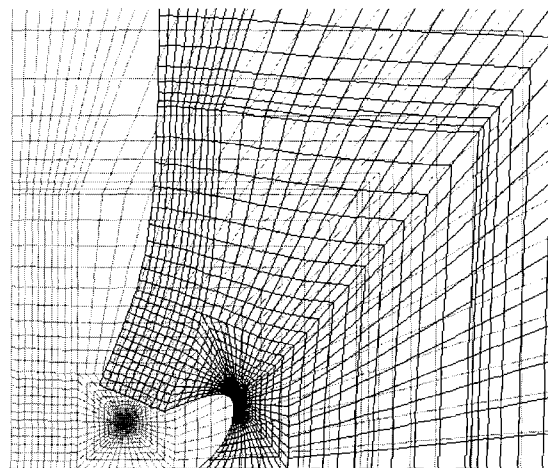


Fig. 3 Mesh for a branched crack and the deformed shape under uniform tension

6. 결과 및 토론

3장에서 J 기저 상호매개적분을 이용하여 인장을 받는 반무한 평판내의 분기균열 선단의 응력확대계수를 나타내었고, 4장에서는 굽힘을 받는 분기 균열에 대하여 식(10)에 모멘트 외삽법을 적용하여 모멘트확대계수를 나타내었다.

응력 및 모멘트확대계수를 분기 균열각(θ)과 분기 균열의 길이와 주균열의 길이에 대한 비(d/e)의 함수로서 무차원화 시키면 다음과 같다.

$$F_m\left(\theta, \frac{d}{e}\right) = \frac{K_m}{\sigma_0\sqrt{\pi c}}$$

$$F_n^M\left(\theta, \frac{d}{e}\right) = \frac{K_n^M}{M_0\sqrt{\pi c}} \quad (12)$$

여기서 F_m ($m=I, II$)과 F_n^M ($n=1, 2$)는 파괴모드에 따른 응력 및 모멘트확대계수를 나타내고, $c(=d+e/\cos\theta)$ 는 분기균열의 길이 d 와 주균열의 길이 e , 그리고 분기균열 각 θ 로 표현되는 특성길이(characteristic length)이다. σ_0 와 M_0 는 균일한 인장 응력과 굽힘 모멘트이다.

본 연구에서 사용한 J 기저 상호매개적분의 타당성을 검토하기 위하여 Isida와 Noguchi⁽²⁾가 채적력법으로 해석한 반무한 평판의 45° 분기균열 문제를 선택하였다. 식(12)에서 모드 I과 II에 따라 무차원화된 응력확대계수 F_I 와 F_{II} 를 J 기저 상호매개적분을 이용한 본 연구에서 해석한 결과와 Isida와 Noguchi⁽²⁾의 해석

결과를 Fig. 4에 각각 나타내었다. 두 해석 결과에 대한 무차원화된 응력확대계수 F_I 와 F_{II} 는 오차가 2% 이내에서 서로 일치하였다. 따라서 본 연구 방법이 타당하다는 것을 알 수 있었다.

인장을 받는 반무한 평판내의 분기균열에 대하여 무차원화된 응력확대계수 F_I 를 θ 와 d/e 의 함수로서 Fig. 5에 나타내었다. Fig. 5(a)에서 특정한 분기 균열각 10°~20°에 대하여 응력확대계수는 최대값을 나타내고, 분기 균열각이 커지면서 감소한다. 또한, 분기균열의 길이와 주균열의 길이에 대한 비(d/e)에 따라서 응력확대계수를 Fig. 5(b)에 나타내었다. 응력확대계수는 각각의 분기 균열각에 대하여 기하학적 형상비(d/e)에 거의 의존하지 않음을 보여주고 있다. Fig. 6은 모드 II에 대한 무차원화된 응력확대계수를 θ 와 d/e 의 함수로 나타내었다. 모드 II에 대한 응력확대계수는 55°~65°를 갖는 분기 균열각에서 최대를 나타내고, d/e 에는 거의 의존하지 않는다.

굽힘을 받는 반무한 평판내의 분기균열에 대하여 주균열의 길이에 대한 평판 두께의 비(h/e)가 0.1인 경우에 무차원화된 모멘트확대계수 F_1^M 과 F_2^M 를 각각의 기하학적 형상비(d/e)에 따라 θ 의 함수로 Fig. 7에 나타내었다. 모드 I과 II에 대한 모멘트확대계수는 모드 I과 II에 대한 응력확대계수의 결과와 유사한 경향을 보여주고 있다. 특정한 분기 균열각에 대하여 모드 I에 대하여는 10°~20°, 모드 II에 대하여는 55°~65°에서 모멘트확대계수는 최대값을 나타낼을 알 수 있다. 모멘트확대계수는 기하학적 형상비(d/e)에 거의 의존하지 않음을 보여주고 있다.

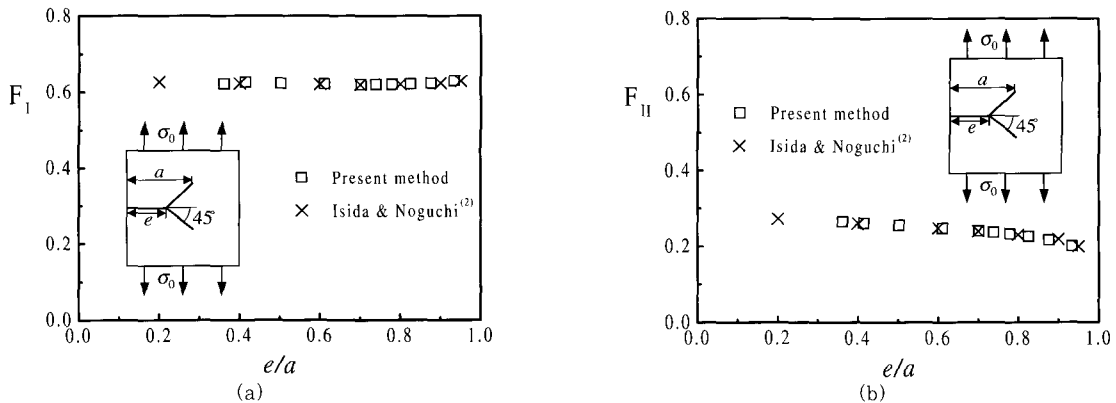


Fig. 4 Comparisons of normalized stress intensity factors as a function of e/a

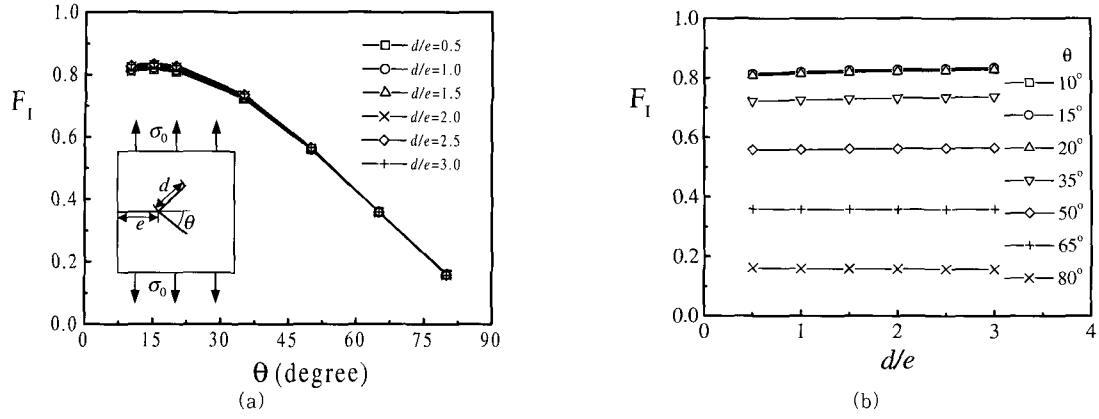


Fig. 5 Normalized stress intensity factor for mode I as a function of θ and d/e

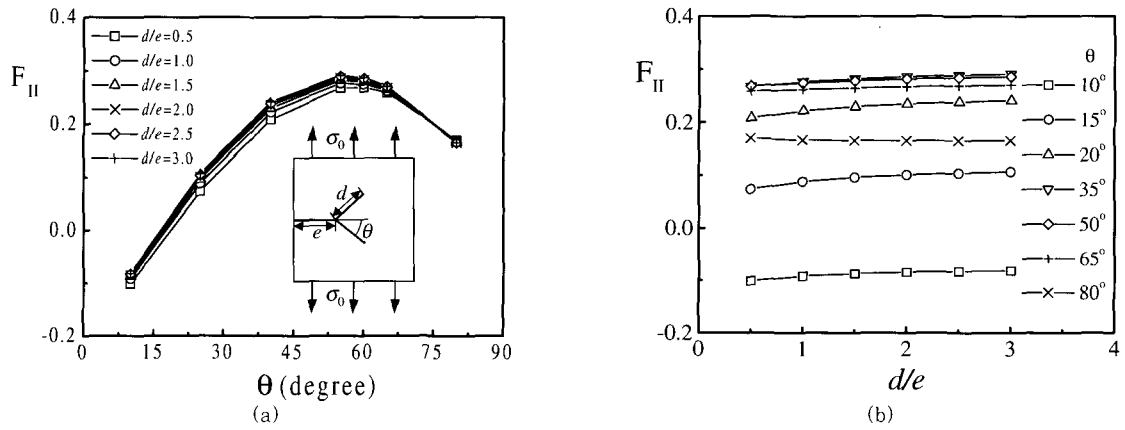


Fig. 6 Normalized stress intensity factor for mode II as a function of θ and d/e

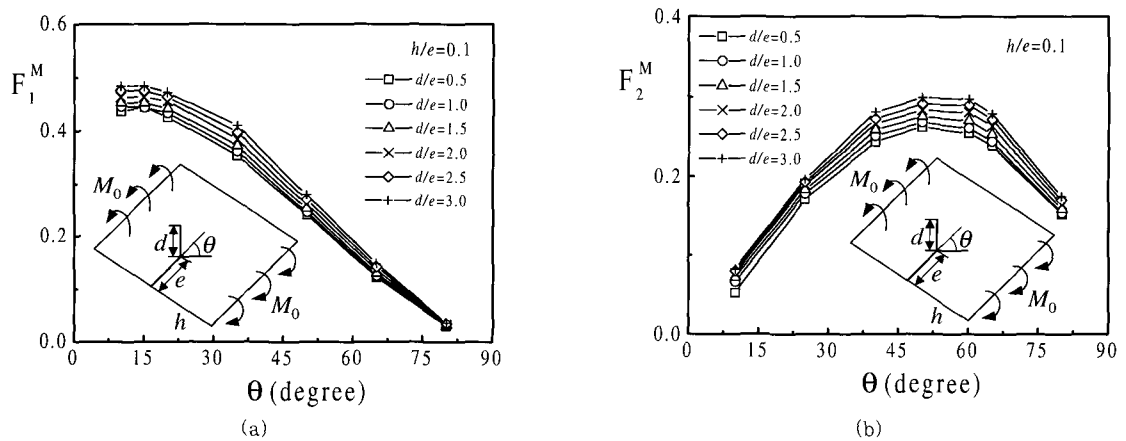


Fig. 7 Normalized moment intensity factors for $h/e=0.1$ as a function of θ

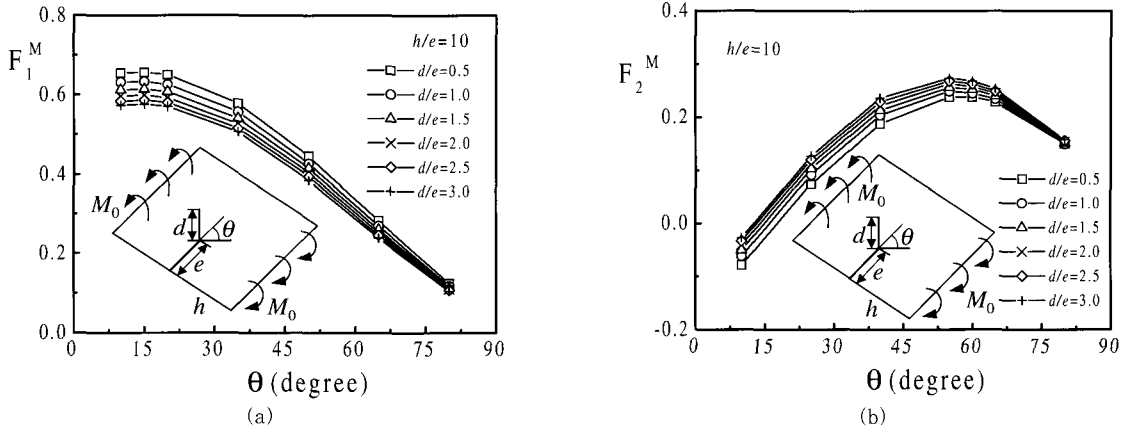


Fig. 8 Normalized moment intensity factors for $h/e=10$ as a function of θ

굽힘 문제에 대하여 주균열의 길이에 대한 평판두께의 비(h/e)가 10인 경우에 대하여 모드 I과 II의 모멘트확대계수 F_1^M 과 F_2^M 를 θ 에 따라 Fig. 8에 나타내었다. $h/e=0.1$ 인 경우의 해석결과와 거의 유사한 결과를 보여주고 있다. Figs. 7과 8에서 분기균열의 길이와 주균열의 길이에 대한 비(d/e)에 따라서 모드 I에서 $h/e=10$ 인 경우의 모멘트확대계수 값이 더 크고, 모드 II에서는 거의 비슷한 값을 갖는다. 즉, 굽힘을 받는 반무한 평판내의 분기균열에 대하여 모드 I에 대한 모멘트확대계수는 평판의 두께에 영향을 받는다는 것을 알 수 있다.

7. 결 론

산업설비에서 발생하는 분기균열을 인장과 굽힘을 받는 반무한 평판내의 분기균열로 이상화하여 해석하였다. 중첩의 원리에 의하여 인장과 굽힘 문제로 나누어 응력확대계수와 모멘트확대계수를 해석하였다. 인장 하중을 받는 반무한 평판내의 분기균열에 대한 응력확대계수는 유한요소법과 J 기저 상호매개적분을 이용하여 해석하였다. 굽힘을 받는 반무한 평판내의 분기균열에 대한 모멘트확대계수는 유한요소해석을 수행한 후에 해석된 분기균열선단의 모멘트로부터 모멘트의삽을 수행하여 해석하였다. 해석 결과에서 응력 및 모멘트확대계수는 특정한 분기 균열각에서 최대값에 도달한다. 모드 I에 해당하는 확대계수는 $10^\circ \sim 20^\circ$ 에서 최대값에 도달하며, 그 이유는 분기균열 각이 커짐에 따라서 균열 면에 작용하는 수직 응력이 감소하기 때문

이다. 또한, 모드 II에 대한 확대계수는 $55^\circ \sim 65^\circ$ 에서 최대값에 도달하는데, 이는 재료가 일축인장 하중을 받는 경우 45° 전단응력이 최대값에 도달하는 경우와 같이 이해할 수 있다.

후 기

본 연구는 한국전력공사의 전력기술기초연구(99-지정-08)의 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

1. Kitagawa, H., Yuuki, R. and Ohira, T., "Crack Morphological Aspects in Fracture Mechanics," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 47, 1975, pp.515~529
2. Isida, M. and Noguchi, H., "Formulae of Stress Intensity Factors of Branched Cracks in Plane Problems," *Transaction of Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 49, 1983, pp. 469~479
3. 윤영필, 이채규, 우광성, "혼합모우드를 받는 균열 판의 응력확대계수 산정을 위한 p-Version 유한요소 모델," 전산구조공학논문집, 제9권, 제2호, 1996, pp.133~142
4. Rice, J. R., "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain

- Concentration by Notches and Cracks," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, 1968, pp.379~386
5. Chen, F. H. K. and Shield, R. T., "Conservation Laws of Elasticity of the J-integral type," *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 28, 1977, pp.1~22
 6. Cho, Y. J., Beom, H. G. and Earmme, Y. Y., "Application of a Conservation Integral to a Interface Crack Interacting with Singularities," *International Journal of Fracture*, Vol. 65, 1994, pp.63~73
 7. Choi, S. Y., Beom, H. G. and Earmme, Y. Y., "A New Conservation Integral for an Arbitrarily Curved Kinked Interfacial Crack," *International Journal of Fracture*, Vol. 80, 1996, pp.45~57
 8. Pahn, L. O. and Earmme, Y. Y., "Analysis of a Short Interfacial Crack from the Corner of a Rectangular Inclusion," *International Journal of Fracture*, Vol. 106, 2000, pp.341~356
 9. Jeon, I. and Im, S., "The Role of Higher Order Eigenfields in Elastic-Plastic Cracks," *Journal of the Mechanical and Physics of Solids*, Vol. 49, 2001, pp.2789~2818
 10. Williams, M. L., "The Stress around a Fault or Crack in Dissimilar Media," *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 49, 1959, pp.199~204
 11. Reissner, E., "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, 1945, pp.69~77
 12. Hibbit, H. D., Karlsson, B. and Sorensen, E. P., *ABAQUS User's Manual*, 5.8, HKS Inc., Providence RI, 1998