

두꺼운 축대칭 회전셸의 3차원적 진동해석

Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick Shells of Revolution

강재훈†

양근혁*

장경호**

Kang, Jae-Hoon

Yang, Keun-Hyeok

Chang, Kyong-Ho

(논문접수일 : 2001년 2월 13일 ; 심사종료일 : 2002년 7월 15일)

요지

속이 빈 축대칭 회전체인 두꺼운 셸의 정확한 고유진동수와 모우드형상을 결정하기 위해서 3차원적인 해석방법이 사용되었다. 이 축대칭 회전셸의 모선을 직선으로 한정하지 않았으며, 셸의 두께 또한 일정한 것으로 제한하지 않았다. 이 셸의 중앙면은 임의의 곡률을 가지며, 셸의 두께도 임의적으로 변한다. 자오선방향, 두께방향, 원주방향으로의 변위 성분인 u_ϕ , u_z , u_θ 는 시간반응의 정현성(sinusoidal)과 θ 방향으로의 주기성을 지니며, ϕ 와 z 방향으로서는 대수다항식의 형태로 가정되었다. 이 셸의 변형률에너지와 운동에너지를 공식화하였으며, 진동수의 최소화를 통해 상위계치의 진동수를 구하고 다항식의 차수를 증가시켜 엄밀해에 수렴된 진동수를 구할 수 있다. 선형적으로 두께가 변하는 두꺼운 원추형셸과 구형셸에 대한 예를 통하여 하위 다섯 개의 진동수에 대해서 유효 숫자 4자리까지의 정확한 수렴성연구가 이루어졌다. 이 해석 방법은 두께가 매우 두꺼운 셸 뿐만이 아니라 얇은 셸에도 적용이 가능하다.

핵심용어 : 3차원 해석, 축대칭 회전 셸, 두꺼운 셸, 진동, 임의의 곡률, 변두께

Abstract

A three-dimensional method of analysis is presented for determining the free vibration frequencies and mode shapes of hollow bodies of revolution (i.e., thick shells), not limited to straight line generators or constant thickness. The middle surface of the shell may have arbitrary curvatures, and the wall thickness may vary arbitrarily. Displacement components u_ϕ , u_z , u_θ , in the meridional, normal and circumferential directions, respectively, are taken to be sinusoidal in time, periodic in θ , and algebraic polynomials in the ϕ and z directions. Potential(strain) and kinetic energies of the entire body are formulated, and upper bound values of the frequencies are obtained by minimizing the frequencies. As the degrees of the polynomials are increased, frequencies converge to the exact values. Novel numerical results are presented for two types of thick conical shells and thick spherical shell segments having linear thickness variations. Convergence to four digit exactitude is demonstrated for the first five frequencies of both types of shells. The method is applicable to thin shells, as well as thick and very thick ones.

Keywords : three-dimensional analysis, shell of revolution, thick shell, vibration, arbitrary curvature, variable thickness

† 책임저자, 정회원 · 중앙대학교 건축학과 조교수
전화: 02-820-5342; Fax: 02-812-4150
E-mail: jhkang@cau.ac.kr

* 중앙대학교 건축학과 박사과정

** 정회원 · 중앙대학교 건설환경공학과 조교수

• 이 논문에 대한 토론을 2002년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2003년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

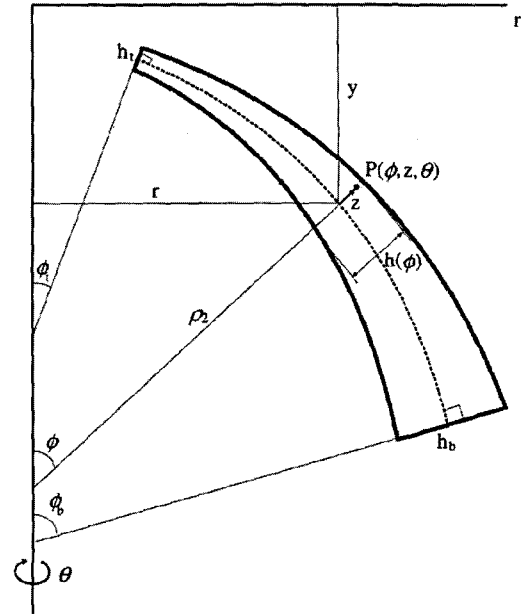
구조요소의 3차원적 진동해석은 구조공학도의 오랜 목표가 되어왔다. 그동안 3차원적 해석이 용이하지 못하여, 구조요소를 1차원적으로(예: 봉, 보) 또는 2차원적인(예: 판, 셸) 수학적 모델로 개발하여 연구하여 왔으나, 이러한 모델은 극히 제한적인 요소와 부정확성을 내재하고 있다. 그러나 컴퓨터 성능의 향상으로 엄밀해에 가까운 매우 정확한 축대칭 회전체의 진동수와 모우드형상을 3차원적 해석으로 구할 수 있게 되었다.

축대칭 회전체는 원주방향 (θ)으로 단혀져 있기 때문에 원주방향 변위 (u_θ)는 주기성을 가지므로 3차원적 해석은 더욱 더 단순화될 수 있다. 이 때 모우드형상은 원주파동수 (n)로 분리되며, 각 n 에 대해서 2차원적인 문제로 단순화된다. 이러한 사실을 이용해서 Gladwell과 Tahbilder¹⁾, Gladwell과 Vijay²⁾, Hutchinson³⁻⁵⁾, Hutchinson과 El-Azhari⁶⁾, Leissa와 So^{7,8)}, Singal과 Williams⁹⁾, So와 Leissa^{10,11)}는 속이 찬 또는 속이 빈 원형기둥의 고유진동수를 구하였다. 최근에 속이 빈 원추형 셸의 진동을 Leissa와 So¹²⁾가 3차원적 해석으로 연구하였다.

위에 열거한 해석은 모두 축대칭 회전체의 모선이 직선이며 셸의 두께가 일정하다는 제한조건을 가지고 있다. 본 연구는 속이 빈 축대칭 회전체(즉, 두꺼운 셸)의 모선을 직선으로 한정하지 않으며, 셸의 두께도 일정하다고 제한을 두지 않음으로서 이러한 문제를 일반화시켰다. 따라서 셸의 중앙면은 임의의 곡률을 가지며, 셸의 두께 또한 임의적으로 변한다. 일반성을 지닌 3차원적 해석방법을 통하여 선형적으로 두께가 변하는 두꺼운 절두 원추형셸과 구형셸의 정확한 진동수를 리츠법을 이용하여 계산하였다.

2. 기하학적 고찰

Fig. 1은 자오선방향 (ϕ)으로 두께 (h)가 변하는 임의의 축대칭 회전체의 단면을 보여주고 있다. 이 셸은 y 축을 중심으로하여 이 단면을 360° 회전시킴으로써 얻어진다. 이 셸의 곡률은 Fig. 1에서 점선으로 표시된 중앙면의 곡률로 표현된다. 셸요소 내부의 임의의 한 점 (P)의 위치는 자오각 (ϕ), 원주각 (θ), 중앙면의 수직선을 따라 측정된 거리 (z)로 결정된다. 따라서 셸의



y(axis of revolution)

Fig. 1 Cross-section of an arbitrary shell of revolution with variable thickness in the meridional direction ϕ and positive Gaussian curvature, and the curvilinear coordinate system (ϕ, z, θ)

내외측 표면은 $z = \pm h/2$ 에 위치하게 된다. ϕ_1 와 ϕ_2 로 결정되는 셸의 최상단과 최하단의 두께는 h_1 와 h_2 이다.

회전을 시키면 셸의 중앙면을 생성하게 되는 자오선(모선)이 Fig. 2에 그려져 있다. 이 모선은 식

$$r = r(y), \tag{1}$$

또는 매개방정식

$$r = r(\phi), \quad y = y(\phi), \tag{2ab}$$

으로 나타낼 수 있는데, 여기서 r 과 y 는 원주좌표계에 서 각각 반지름과 축성분이며, ϕ 는 자오각을 나타낸다.

또한 Fig. 2는 중앙면의 두 개의 주곡률반경 ρ_1 과 ρ_2 를 보여주고 있다. ρ_1 은 자오면($r-y$ 면)에서의 곡률을, ρ_2 는 자오선에 수직한 면에서의 곡률을 나타낸다. ρ_2 는 중앙면에서 회전축(y)까지의 수직거리임을 알 수 있다. 이 주곡률반경은 식(1)로부터 다음과 같이 결정되며,

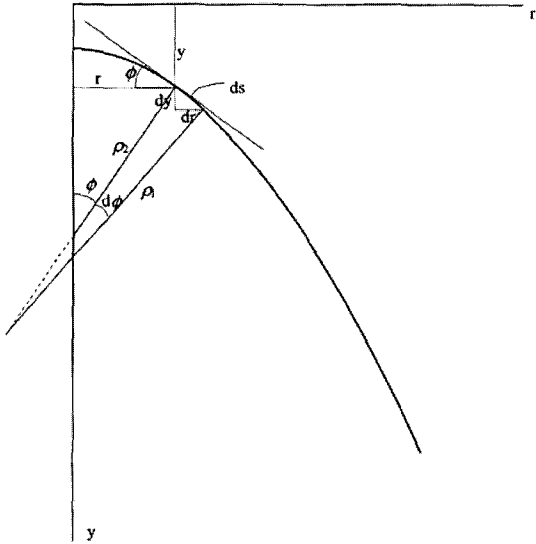


Fig. 2 Meridian of the middle surface of a shell of revolution

$$\rho_1 = [1 + (r')^2]^{3/2} / r', \quad \rho_2 = r [1 + (r')^2]^{1/2} \quad (3a,b)$$

여기서 프라임 (')은 y에 관한 도함수를 의미한다. 이 곡률은 또한 식(2)를 통해서 다음과 같이 구할 수도 있는데,

$$\rho_1 = [(r') + (y')^2]^{3/2} / (r'y' - r'y''), \quad \rho_2 = r [(r')^2 + (y')^2]^{1/2} / y' \quad (4a,b)$$

여기서의 프라임 (')은 phi에 관한 도함수이다. 식(3)과 (4)를 이용하여 다양한 형태를 갖는 쉘의 주곡률반경을 구할 수 있다.^{13),14)}

- (1) 평판 : $\rho_1 = \rho_2 = \infty$
- (2) 구형셸 : $\rho_1 = \rho_2 = a$, 여기서 a는 중앙면의 반지름을 나타낸다.
- (3) 원주형셸 : $\rho_1 = \infty, \rho_2 = a$, 여기서 a는 중앙면의 반지름을 나타낸다.
- (4) 원추형셸 : $\rho_1 = \infty, \rho_2 = r / \sin \phi_0$, 여기서 phi는 상수값 phi_0를 가진다.
- (5) 원환형셸 : $\rho_1 = a, \rho_2 = a + b / \sin \phi$, 여기서 a는 원형 단면의 반지름을, b는 원환면의 회전반경을 나타낸다.

- (6) 포물형셸 : $\rho_1 = 2a / \cos^3 \phi, \rho_2 = 2a / \cos \phi$, 여기서 a는 자오선의 초점거리이다.
- (7) 타원형셸(단축이 회전축과 만나는) : $\rho_1 = a^2 b^2 / (a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{3/2}, \rho_2 = a^2 / (a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/2}$, 여기서 a와 b는 각각 장축과 단축길이의 반을 나타낸다.
- (8) 쌍곡형셸 : $\rho_1 = -a^2 b^2 / (a^2 \sin^2 \phi - b^2 \cos^2 \phi)^{3/2}, \rho_2 = a^2 / (a^2 \sin^2 \phi - b^2 \cos^2 \phi)^{1/2}$, 여기서 a와 b는 각각 횡축과 켈레축 길이의 반을 나타낸다.

중앙면의 주곡률은 $\chi_1 \equiv 1/\rho_1$ 과 $\chi_2 \equiv 1/\rho_2$ 으로, 가우시언곡률은 $\chi \equiv \chi_1 \chi_2$ 로 정의된다. Fig. 1과 2에는 양의 x를 가지는 쉘이 그려져 있지만, 음의 x를 가진(예: 쌍곡형 셸) 또는 양과 음의 x를 동시에 가지는(예: 원환형 셸) 셸 또한 해석이 가능하다.

3. 에너지 범함수

두꺼운 축대칭 회전셸의 자유진동을 해석하기 위해 운동에너지(T)와 변형률에너지(V)를 변위성분 u_ϕ, u_z, u_θ 으로 표현한다. 이 변위성분은 각기 phi, z, theta가 증가하는 방향을 양의 성분으로 한다.(Fig. 1)

운동에너지는

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{u}_\phi^2 + \dot{u}_z^2 + \dot{u}_\theta^2) \rho_2 r_z d\phi dz d\theta \quad (5)$$

이다. 여기서 rho는 질량밀도를, (.)는 시간도함수를 나타내며, 적분은 쉘의 정의역(Omega)에 대해서 수행되며, r_z 과 ρ_z 는 다음 식으로 정의된다.

$$r_z(\phi, z) = [\rho_2(\phi) + z] \sin \phi, \quad \rho_z(\phi, z) = \rho_1(\phi) + z \quad (6a,b)$$

응력(σ_{ij})과 변형률(ϵ_{ij})로 표현된 변형률에너지는

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{\phi\phi} \epsilon_{\phi\phi} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta} + 2\sigma_{\phi z} \epsilon_{\phi z} + 2\sigma_{\phi\theta} \epsilon_{\phi\theta} + 2\sigma_{z\theta} \epsilon_{z\theta}) \rho_2 r_z d\phi dz d\theta \quad (7)$$

이다. 선형 탄성적인 등방성재료의 응력-변형률 관계는

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (8)$$

이다. G 와 λ 는 Lamé 상수로 영계수(E)와 프와송비(ν)로 표현하면 $G = E/2(1+\nu)$ 와 $\lambda = E\nu/(1+\nu)(1-2\nu)$ 이며, $\varepsilon \equiv \varepsilon_{\phi\phi} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}$ 이고, δ_{ij} 는 크로네커 델타이다.

텐서해석을 이용해서 임의의 곡률반경 ρ_1, ρ_2 를 가진 셸의 3차원 변형률과 변위와의 관계식을 구하면¹⁵⁾

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{\rho_z}(u_{\phi,\phi} + u_z), \quad \varepsilon_{zz} = u_{z,z} \quad (9a,b)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r_z}(u_{\theta,\theta} + u_\phi \cos \phi + u_z \sin \phi),$$

$$\varepsilon_{\phi z} = \frac{1}{2} \left[u_{\phi,z} - \frac{1}{\rho_z}(u_\phi - u_{z,\phi}) \right] \quad (9c,d)$$

$$\varepsilon_{\phi\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r_z}(u_{\phi,\theta} - u_\theta \cos \phi) + \frac{u_{\theta,\phi}}{\rho_z} \right],$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r_z}(u_{z,\theta} - u_\theta \sin \phi) + u_{\theta,z} \right] \quad (9e,f)$$

이다.

식(8)과 (9)를 식(7)에 대입하면 변위성분으로 표현된 변형률에너지

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \lambda (x_1 + x_2 + x_3)^2 + G [2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2] \} \rho_z r_z d\phi dz d\theta \quad (10)$$

을 구할 수 있다. 여기서

$$x_1 \equiv \frac{u_\phi \cos \phi + u_z \sin \phi + u_{\theta,\theta}}{r_z},$$

$$x_2 \equiv \frac{u_z + u_{\phi,\phi}}{\rho_z}, \quad x_3 \equiv u_{z,z} \quad (11a-c)$$

$$x_4 \equiv \frac{u_\phi - u_{z,\phi}}{\rho_z} - u_{\phi z}, \quad x_5 \equiv \frac{u_{z,\theta} - u_\theta \sin \phi}{r_z} + u_{\theta,z},$$

$$x_6 \equiv \frac{u_{\phi,\theta} - u_\theta \cos \phi}{r_z} + \frac{u_{\theta,\phi}}{\rho_z} \quad (11d-f)$$

이다.

4. 진동수와 모우드형상의 결정

어떤 정규모우드로 자유롭게 진동하고 있는 두꺼운 셸의 변위는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$u_\phi(\phi, z, \theta, t) = U_\phi(\phi, z) \cos n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (12a)$$

$$u_z(\phi, z, \theta, t) = U_z(\phi, z) \cos n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (12b)$$

$$u_\theta(\phi, z, \theta, t) = U_\theta(\phi, z) \sin n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (12c)$$

여기서 ω 는 진동수이며, α 는 초기조건에 의해서 결정되는 위상각이다. θ 방향으로 닫힌 셸($0 \leq \theta \leq 360^\circ$)의 주기성을 보장하기 위해 원주파동수(n)는 정수로 취한다($n=0,1,2,3,\dots$). 이 때 식(12)는 비틀림모우드를 제외한 모든 자유진동모우드를 표현할 수 있다. 이러한 모우드는 식(12)에서 $\cos n\theta$ 과 $\sin n\theta$ 이 서로 교체된 변위를 통해서도 얻을 수 있다. $n > 0$ 일 때 이 변형된 변위는 식(12)와 똑 같은 진동수와 모우드형상을 준다. 다만 이 때 모우드형상의 대칭축은 θ 방향으로 $\pi/2n$ 만큼 회전된다. 그러나 $n=0$ 일 때 이 변형된 변위함수는 $u_\phi = u_z = 0, u_\theta = U_\theta^*(\phi, z) \sin(\omega t + \alpha)$ 이 되며 이것은 비틀림모우드에 해당한다. 이 변위는 원주모우드수 n 과는 분리가 되며, ϕ 와 z 좌표와 관계를 맺는다.

변위함수는 다음 식으로 가정되고

$$U_\phi(\phi, z) = \eta_\phi(\phi, z) \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^L A_{ij} \phi^i z^j \quad (13a)$$

$$U_z(\phi, z) = \eta_z(\phi, z) \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L B_{kl} \phi^k z^l \quad (13b)$$

$$U_\theta(\phi, z) = \eta_\theta(\phi, z) \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{mn} \phi^m z^n \quad (13c)$$

U_θ^* 도 유사한 방법으로 가정된다. 여기서 A_{ij}, B_{kl}, C_{mn} 는 임의의 미정계수이고, η 는 기하학적 경계조건에 따라서 결정되는 함수이다. 예를 들면,

- (1) 자유경계조건일 때 : $\eta_\phi = \eta_z = \eta_\theta = 1$
- (2) 상단 ($\phi = \phi_i$)은 고정되고 나머지 경계는 자유일 때 : $\eta_\phi = \eta_z = \eta_\theta = \phi - \phi_i$
- (3) 상하단 모두 고정되고 나머지 경계는 자유일 때 : $\eta_\phi = \eta_z = \eta_\theta = (\phi - \phi_i)(\phi - \phi_b)$
- (4) 내측표면 ($z = -h/2$)은 고정되고 나머지 경계는 자유일 때 : $\eta_\phi = \eta_z = \eta_\theta = z + h/2$
- (5) 외측표면 ($z = h/2$)은 수직방향으로 고정되고 나머지 경계는 자유일 때 : $\eta_z = z - h/2, \eta_\phi = \eta_\theta = 1$ 이다. 식(13)의 함수 $\eta_\phi, \eta_z, \eta_\theta$ 에는 기하학적 구속만이 부과된다. 식(13)의 대수다항식과 함께 이 함수는 수학적으로 완비되었다.¹⁶⁾ 지표 I, J, \dots, N 이 증가함에 따라 정확도가 증가하면서 물체의 그 어떤 3차원 운동도 표현할 수 있게 된다. 충분한 항의 수를 택했을 때, 중국에 가서는 모든 내부의 운동학적 구속은 사라지고 식(13)은 엄밀해에 근접하게 된다.

고유치 문제는 임의의 계수에 대한 자유진동수의 최소화를 통해서 내부의 구속효과를 최소화시킨다. 이런 최소화를 수식으로 나타내면 다음과 같다.¹⁷⁾

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}}(V_{\max} - T_{\max}) = 0, \quad (i=0, 1, 2, \dots, I; j=0, 1, 2, \dots, J), \quad (14a)$$

$$\frac{\partial}{\partial B_{kl}}(V_{\max} - T_{\max}) = 0, \quad (k=0, 1, 2, \dots, K; l=0, 1, 2, \dots, L), \quad (14b)$$

$$\frac{\partial}{\partial C_{mn}}(V_{\max} - T_{\max}) = 0, \quad (m=0, 1, 2, \dots, M; n=0, 1, 2, \dots, N) \quad (14a)$$

V_{\max} 과 T_{\max} 는 진동의 한 주기에서 발생하는 최대 변형을 및 운동에너지이다. 이들은 식(12)를 식(5)와 (10) 대입한 후 $\sin^2(\omega t + a)$ 과 $\cos^2(\omega t + a)$ 을 1로 대체함으로써 얻을 수 있다.

식(14)는 미지수 A_{ij}, B_{ij}, C_{mn} 이 포함된 $(I+1)(J+1) + (K+1)(L+1) + (M+1)(N+1)$ 개의 선형, 동차, 대수방정식을 생성한다. 비자명해를 구하기 위해서 계수

행렬의 행렬식을 0으로 놓으면 진동수(고유치)를 계산할 수 있다. 이 진동수는 엄밀해의 상위경계값을 가지며, I, J, \dots, N 을 증가시키면 엄밀해에 단조수렴한다. 각 진동수에 대응하는 모우드형상(고유함수)은 ω 을 일련의 대수방정식에 대입하고 계수비를 계산하여 얻을 수 있다.

5. 원추형셸

한 가지 예로서 Fig. 3에 그려진 단면으로 표현되는 선형적으로 두께가 변하는 완전자유, 절두 원추형셸을 고려해 보자. R_{ii} 는 원추형 셸의 윗 모서리의 내측 반경을 나타낸다. 윗 모서리가 서로 겹치는 것을 방지하기 위해 R_{ii} 는 반드시 양의 값을 가져야 한다.

Table 1은 두께 변분이 크고 ($h_i/h_b = 1/3$), 상부에 작은 개구부 ($R_{ii}/L = 0.25$)를 가지고, 선단각이 30° ($\phi_0 = 60^\circ$)인 두꺼운 셸 ($h_i/L = 0.125, h_b/L = 0.375$)의 고유진동수에 대한 수렴연구를 보여주고 있으며, 이 셸의 형태는 Fig. 3에 그려져 있다. 프와송비(ν)는 0.3으로 하였다. Table 1은 원주파동수(n)가 2인 모

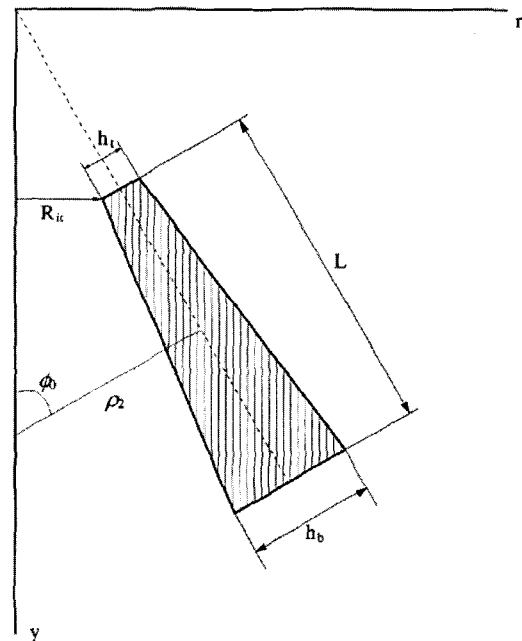


Fig. 3 Cross-section of a truncated conical shell with linearly varying thickness

Table 1 Convergence of frequencies $\omega L \sqrt{\rho/G}$ of a completely free, truncated hollow conical shell with linearly varying thickness ($h_i/h_b = 1/3$) for the five lowest modes for $n=2$ with $\phi_0=60^\circ$, $R_{ii}/L=0.25$, $h_i/L=0.125$, and $\nu=0.3$

TZ	TP	DET	1	2	3	4	5
2	2	12	0.8686	1.641	3.668	4.759	7.721
2	4	24	0.8062	1.491	3.277	4.025	4.925
2	6	36	0.8019	1.481	3.263	3.907	4.830
2	8	48	0.8018	1.480	3.261	3.897	4.824
2	10	60	0.8018	1.479	3.261	3.896	4.823
3	2	18	0.8205	1.606	3.633	4.755	7.637
3	4	36	0.7792	1.442	3.228	3.945	4.883
3	6	54	0.7762	1.435	3.217	3.801	4.796
3	8	72	0.7761	1.434	3.216	3.790	4.791
3	10	90	0.7761	1.433	3.216	3.789	4.791
4	2	24	0.8028	1.597	3.619	4.746	7.610
4	4	48	0.7650	1.427	3.213	3.918	4.870
4	6	72	0.7623	1.420	3.203	3.760	4.783
4	8	96	0.7623	1.418	3.202	3.751	4.779
4	10	120	0.7622	1.418	3.202	3.750	4.778
5	2	30	0.8022	1.595	3.616	4.746	7.603
5	4	60	0.7644	1.427	3.213	3.916	4.869
5	6	90	0.7618	1.419	3.202	3.757	4.782
5	8	120	0.7617	1.418	3.202	3.749	4.778
5	10	150	0.7617	1.417	3.201	3.748	4.778
6	2	36	0.8014	1.590	3.612	4.746	7.602
6	4	72	0.7639	1.426	3.212	3.913	4.868
6	6	108	0.7618	1.419	3.202	3.756	4.782
6	8	144	0.7617	1.418	3.201	3.749	4.778
6	9	162	0.7617	1.417	3.201	3.748	4.778

Note : **TZ**=Total number of polynomial terms used in the z or ζ direction
TP=Total number of polynomial terms used in the s or ϕ direction
DET=Determinant order

우드형상의 하위 5개의 무차원 진동수 $\omega L \sqrt{\rho/G}$ 를 보여주고 있다. 두께방향(z)으로 다항식의 항수는 $TZ=J+1=L+1=N+1$ 이고, 자오선방향(ϕ)으로 항수는 $TP=I+1=K+1=M+1$ 으로 하였다. Table 1에서 **DET**는 진동수 행렬식의 차수를 의미한다.

Table 1은 진동수가 4자리의 유효숫자까지 단조수렴함을 보여주고 있으며, 상술한 이유로 이 진동수는 유효숫자 4자리까지 정확하다. 굵고 밑줄이 쳐진 진동수는 최소의 행렬식 차수를 가지고 얻어진 수렴치를 나타낸다. 하위 5개 진동수가 유효숫자 4자리까지 수렴하기 위해서는 120에서 150까지의 행렬식 차수가 필

요하다. **TZ**=6일 때, **TP**의 최대값을 10대신 9를 택한 이유는 수치적 불량조건(ill-condition)에 직면하기 전의 최대의 **TP**를 택하였기 때문이다.

Table 1에서 **TZ**=2이고 **TP**=10일 때의 진동수(0.8018)는 **TZ**≥3에서 수렴된 값과 비교했을 때 부정확하지만, 이 값은 고전적인 얇은 셸이론에 의한 것보다는 정확하며, 1계의 전단변형이론에 의한 것보다도 정확하다. 1계의 전단변형이론은 $J=N=2$ 이고 두 계신장변위를 피하기 위해 $L=1$ 에 해당한다. 고전적인 셸이론은 1계의 전단변형이론보다 더 U_ϕ, U_θ, U_z 사이에 부가적인 운동학적 구속을 가지고 있다. 유효숫자 3자리의 정확도를 가지기 위해서도 최소한 **TZ**=4이어야 한다.

Table 2는 세종류의 두께변분 $h_i/h_b=1, 1/3, 0$ 에 대한 진동수를 보여주고 있으며, 다른 매개변수는 Table 1에서 사용한 것과 같다($\phi_0=60^\circ, R_{ii}/L=0.25, h_m/L=0.25, \nu=0.3$, 여기서 $h_m=(h_i+h_b)/2$ 은 평균두께이다). 진동수는 비틀림모우드($n=0$), 축대칭모우드($n=0$), $n=1,2,3,4$ 모우드에 대한 것이다. 3가지의 원추형 셸은 모두 하위 2개의 진동수가 $n=2$ 일 때 발생하였으며, 첫 번째 비틀림진동수는 최소한 12번째 진동수로 나타난다. 두께가 얇은 원추형셸의 고유진동수는 높은 원주파동수에서 발생하며, 두께가 두꺼워질수록 그 파동수는 $n=2$ 까지 감소하게 된다. 특히 양단이 자유경계를 가질 때 이러한 현상은 극명하게 나타난다.¹⁸⁾ 원추형셸에 대해서는 이러한 현상이 명확하게 입증되지는 않았지만, Table 2의 두꺼운 원추형셸의 3차원적인 결과는 이러한 경향과 일치하고 있다.

3개의 셸은 모두 길이에 대한 평균 두께비가 동일하지만($h_m/L=0.25$), 두께비(h_i/h_b)가 1에서 0으로 감소할 때, 하위 5개의 진동수 중에서 두 번째 진동수를 제외한 다른 진동수는 모두 증가한다.

6. 구형셸

두 번째 예로, 자오선 방향으로 곡률을 가지는, 선형적으로 두께가 변하는 구형셸을 계산하였다. 이 것은 Fig. 1에서 상수의 구형반경인 $\rho_2=a$ 를 가지는 셸이다.

Table 3에서는 $h_i/h_b=1/3, \phi_i=30^\circ, \phi_b=90^\circ, h_i/a=0.1$ (Fig. 4), $\nu=0.3$ 인 구형셸의 $n=1$ 일 때의

Table 2 Nondimensional frequencies $\omega L \sqrt{\rho/G}$ of completely free, truncated hollow conical shells with linearly varying thickness for $\phi_0=60^\circ$, $R_a/L=0.25$, $h_t/L=0.125$, and $\nu=0.3$

n	Mode	h_t/h_b		
		1	1/3	0
0(T)	1	3.523	3.915	4.590
	2	6.497	6.748	7.531
	3	9.569	9.615	7.806
	4	12.67	9.738	10.55
	5	12.80	12.80	12.38
0(A)	1	1.928(4)	2.081(4)	2.261(3)
	2	2.956	2.993	3.023
	3	3.650	4.117	4.648
	4	5.518	5.643	6.160
	5	5.661	6.051	6.831
1	1	2.158(5)	2.330(5)	2.536(5)
	2	2.965	3.064	3.234
	3	3.476	3.679	4.154
	4	5.168	5.409	6.045
	5	5.348	5.783	6.275
2	1	0.6184(1)	0.7617(1)	0.9728(1)
	2	1.468(2)	1.417(2)	1.360(2)
	3	3.004	3.201	3.440
	4	3.696	3.748	4.051
	5	4.613	4.778	4.895
3	1	1.496(3)	1.878(3)	2.312(4)
	2	3.095	3.090	3.049
	3	4.224	4.419	4.413
	4	4.791	4.979	5.139
	5	6.137	6.473	6.495
4	1	2.508	3.127	3.693
	2	4.448	4.554	4.683
	3	5.439	5.799	5.772
	4	6.497	6.579	6.569
	5	7.572	8.143	7.789

Note : T=Torsional mode

A=Axisymmetric mode

Numbers in parentheses identify frequency sequences.

하위 5개의 진동수에 대한 수렴연구가 이루어졌다. 수렴률은 Table 1에서 보여준 원추형셸과 거의 흡사하며, 하위 5개의 진동수가 유효숫자 4자리까지 수렴된 값을 얻기 위해서는 96에서 150 차수의 진동수 행렬식이 필요하다. TZ=2로 표현되는 2차원적인 두꺼운 셸이론은 3차원 이론과는 상당히 다른 결과치를 준다. n=0(축대칭과 비틀림모우드)과 n=2일 때의 모우드에 대한 수렴률도 이와 매우 흡사하다.¹⁵⁾

Table 3 Convergence of frequencies $\omega a \sqrt{\rho/G}$ of a completely free, spherical shell segment with linearly varying thickness($h_t/h_b=1/3$) for the five lowest modes for n=1 with $\phi_t=30^\circ$, $\phi_b=90^\circ$, $h_t/a=1/10$, and $\nu=0.3$

TZ	TP	DET	1	2	3	4	5
2	2	12	2.478	2.897	5.024	6.664	13.54
2	4	24	2.022	2.447	2.073	4.510	5.658
2	6	36	2.011	2.441	2.914	4.464	5.186
2	8	48	2.010	2.441	2.912	4.456	5.085
2	10	60	2.009	2.441	2.911	4.456	5.081
3	2	18	2.476	2.887	5.015	6.611	13.06
3	4	36	2.001	2.435	2.903	4.499	5.623
3	6	54	1.989	2.429	2.848	4.422	4.963
3	8	72	1.987	2.429	2.846	4.404	4.872
3	10	90	1.987	2.429	2.845	4.403	4.869
4	2	24	2.475	2.885	5.014	6.603	12.43
4	4	48	1.997	2.434	2.895	4.494	5.614
4	6	72	1.985	2.428	2.840	4.410	4.918
4	8	96	1.983	<u>2.427</u>	2.838	4.388	4.832
4	10	120	<u>1.982</u>	2.427	<u>2.837</u>	4.387	4.829
5	2	30	2.474	2.882	5.013	6.597	12.43
5	4	60	1.997	2.433	2.894	4.494	5.611
5	6	90	1.984	2.428	2.839	4.409	4.914
5	8	120	1.983	2.427	2.837	4.387	4.830
5	10	150	1.982	2.427	2.837	<u>4.386</u>	<u>4.827</u>
6	2	36	2.474	2.881	5.013	6.594	12.42
6	4	72	1.996	2.433	2.893	4.493	5.609
6	6	108	1.984	2.428	2.839	4.408	4.912
6	8	144	1.982	2.427	2.837	4.387	4.829
6	9	162	1.982	2.427	2.837	4.386	4.827

Note : TZ=Total number of polynomial terms used in the z or ζ direction

TP=Total number of polynomial terms used in the s or φ direction

DET=Determinant order

Table 4에서는 세 개의 다른 두께비($h_t/h_b=1, 1/3, 0$)를 갖는 셸에 대한 진동수를 보여 주고 있으며, 이 셸은 동일한 원형셸의 반경에 대한 평균두께비($h_m/a=0.2$)를 가지고 있다. 이 세개의 셸은 Fig. 4에 그려져 있다. 하위 2개의 진동수가 n=2일 때 발생하는 원추형 셸의 진동수(Table 2)와는 달리, 구형셸에서는 상위의 원주모우드수(n=3과 4)에서 나타난다. 최소한 5개의 하위 모우드를 Table 4에 나타내기 위해서 n=5까지 확장하였다. 원추형셸과는 달리 구형셸에서는 하위 5개의 진동수 중 그 어느 것도 n=2일 때 발생하지 않는다.

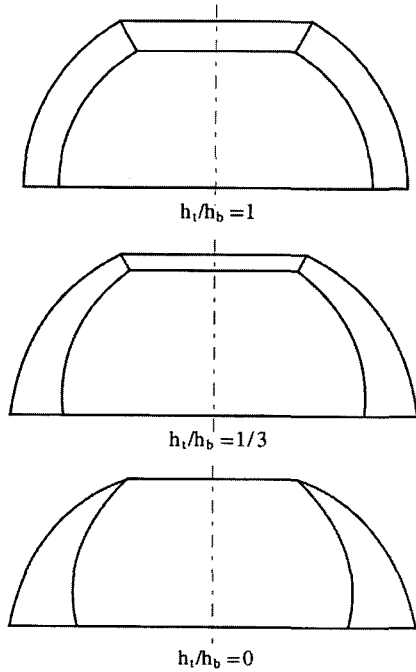


Fig. 4 Cross-sections of spherical shell segments corresponding to Table 4 ($h_m/a=0.2$, $\phi_i=30^\circ$, $\phi_f=90^\circ$)

7. 결 론

원주방향으로 닫힌, 속이 빈 축대칭 회전체(두꺼운 셸)의 정확한 고유진동수와 모우드형상을 결정하기 위해 3차원적인 해석방법이 사용되었다. 이 방법은 열린 회전체에도 적용될 수 있지만, 모우드의 원주방향으로의 주기성을 상실하게 되므로 식(12)에 있는 변위에서 $\sin n\theta$ 와 $\cos n\theta$ 는 대수 다항식으로 대체되어야 한다. 이 때의 수치계산은 훨씬 복잡해진다.

본 연구에서는 3차원적 해석방법을 임의적으로 변하는 곡률반경 (ρ_1, ρ_2)과 두께변분을 가지는 두꺼운 셸에 적용하였다. 수치결과로는 선형적으로 두께가 변하는 절두 원추형셸과 구형셸에 대한 두가지 종류의 셸에 대한 진동수가 주어졌다. 포물형셸, 쌍곡형셸, 타원형셸 등과 같이 보다 더 복잡한 곡률을 지닌 축대칭 회전셸에 대한 적용은 차후에 발표될 기회가 있으리라 믿는다.

이 해석 방법은 두께가 얇은 셸 뿐만이 아니라, 2차원적인 기존의 셸이론으로는 정확하게 해석할 수 없는 매우 두꺼운 셸에도 적용이 가능하다. 본 해석방법은 비교적 간단하지만 엄밀해에 매우 근접한 진동수와 모

Table 4 Nondimensional frequencies $\omega a \sqrt{\rho/G}$ of completely free, spherical shell segments with linearly varying thickness for $\phi_i=30^\circ$, $\phi_b=90^\circ$, $h_m/a=0.2$, and $\nu=0.3$.

n	Mode	h_i/h_b		
		1	1/3	0
0(T)	1	3.448	3.668	4.142
	2	6.241	6.385	7.003
	3	9.115	9.200	9.526
	4	12.03	11.91	9.973
	5	14.97	12.11	12.65
0(A)	1	1.879(3)	1.809(3)	1.647(4)
	2	2.132	2.163(5)	2.267
	3	2.727	2.688	2.737
	4	4.708	4.617	4.529
	5	5.520	5.700	6.163
1	1	2.064(5)	1.982(4)	1.996(5)
	2	2.357	2.427	2.487
	3	2.919	2.837	2.837
	4	4.310	4.386	4.456
	5	4.886	4.827	4.887
2	1	2.608	2.380	2.281
	2	2.815	2.916	3.017
	3	3.799	3.707	3.639
	4	4.987	4.903	4.674
	5	5.285	5.403	5.986
3	1	1.539(2)	1.060(1)	0.7130(1)
	2	3.304	2.896	2.580
	3	3.333	3.464	3.518
	4	4.880	4.880	4.787
	5	5.487	5.355	5.078
4	1	0.8948(1)	1.250(2)	1.188(2)
	2	2.739	2.273	1.580(3)
	3	4.102	3.590	3.065
	4	4.195	4.220	4.145
	5	5.766	5.925	5.362
5	1	1.901(4)	2.274	2.342
	2	3.723	3.389	2.498
	3	4.970	4.458	3.721
	4	5.326	5.114	4.842
	5	6.706	6.668	5.949

Note : **T**=Torsional mode
A=Axisymmetric mode
 Numbers in parentheses identify frequency sequences.
 h_m is the average shell thickness, defined by $(h_i + h_b)/2$

우드형상을 계산해 낼 수 있어서, 타방법(유한요소법, 유한차분법, 갤러킨법 등)에 의한 결과와 비교될 수 있는 기준이 될 수 있다.

참고 문헌

1. Gladwell, G. M. L. and Tahbildar, U. C., "Finite Element Analysis of the Axisymmetric Vibrations of Cylinders," *J. Sound Vib.*, Vol. 22, 1972, pp.143~157
2. Gladwell, G. M. L. and Vijay, D. K., "Natural Frequencies of Free Finite Length Circular Cylinders," *J. Sound Vib.*, Vol. 42, 1975, pp. 387~397
3. Hutchinson, J. R., "Axisymmetric Vibrations of a Free Finite Length Rod," *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 51, 1972, pp.233~240
4. Hutchinson, J. R., "Axisymmetric Flexural Vibrations of a Thick Free Circular Plate," *J. Appl. Mech.*, Vol. 46, 1979, pp.139~144
5. Hutchinson, J. R., "Vibrations of Solid Cylinders," *J. Appl. Mech.*, Vol. 47, 1980, pp. 901~907
6. Hutchinson, J. R. and El-Azhari, "Vibrations of Free Hollow Circular Cylinders," *J. Appl. Mech.*, Vol. 53, 1986, pp.641~446
7. Leissa, A. W. and So, J., "Comparisons of Vibrational Frequencies for Rods and Beams from One-Dimensional and Three-Dimensional Analysis," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 98, 1995, pp.2122~2135
8. Leissa, A. W. and So, J., "Accurate Vibration Frequencies of Circular Cylinders from Three-Dimensional Analysis," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 98, 1995, pp.2136~2141
9. Singal, R. K. and Williams, K., "A Theoretical and Experimental Study of Vibrations of Thick Circular Cylindrical Shells and Rings," *J. Vib. Acoust., Stress, and Reliability in Design*, Vol. 110, 1988, pp.533~537
10. So, J. and Leissa, A.W., "Free Vibration of Thick Hollow Circular Cylinders from Three-Dimensional Analysis," *Journal of Vibrations and Acoustics*, Vol. 119, 1995, pp.89~95
11. So, J. and Leissa, A. W., "Three-Dimensional Vibrations of Thick Circular and Annular Plates," *J. Sound Vib.*, Vol. 209, 1998, pp. 15~41
12. Leissa, A. W. and So, J., "Three-Dimensional Vibration of Truncated Hollow Cones," *J. Vib. Control*, Vol. 1, 1995, pp.145~158
13. Flügge, W., *Stresses in Shells*, 2nd Ed., Springer-Verlag, 1973, p.525
14. Tsui, E. Y. W., *Stresses in Shells of Revolution*, Pacific Coast Publishers, 1968
15. Kang, J. H., "Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick Shells of Revolution with Arbitrary Curvature and Variable Thickness," Ph.D. Dissertation, The Ohio State University, 1997, p.212
16. Kantorovich, L. V. and Krylov, V. I., *Approximate Methods in Higher Analysis*, Noordhoff, Groningen, 1958, pp.266~268
17. Ritz, W., "Über eine Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik," *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, Vol. 135, 1909, pp.1~61
18. Leissa, A. W. *Vibrations of Shells*, U.S. Government Printing Office, Washington D.C., 1973, Reprinted by The Acoustical Society of America, 1993, p.428