

동전모양 균열이 존재하는 이상복합체의 에너지해방율 산정

Determination of Energy Release Rate of Penny-shaped Interface Crack on Bimaterial Cylinder

양 성 철†

서 영 찬*

박 종 원**

Yang, Sungchul

Seo, Young Chan

Park, Jong Won

(논문접수일 : 2000년 12월 11일 ; 심사종료일 : 2002년 9월 11일)

요 지

동전모양의 균열이 이상복합 실린더 계면에 존재하는 혼합모드 조건(I, II)에 대해 유한요소법을 사용하여 에너지해방율을 구하였다. 두재료의 탄성비와 노치율을 변화시켜 상업용 FEM 프로그램인 ABAQUS로부터 얻은 결과를 가상 균열법과 J 적분법에 적용하였으며 에너지해방율을 구하여 무차원함수로 표현하였다. 모드 II의 무차원 에너지해방율($\sqrt{G_{II}E^*}/p\sqrt{\pi a}$)은 균열길이가 탄성비가 증가되면서 그 값이 증가됨을 알수 있었다. 반면, 모드 I의 무차원 에너지해방율($\sqrt{G_I E^*}/p\sqrt{\pi a}$)은 탄성비가 증가하면서 그 값이 감소하며, 두재료의 탄성비가 3 이상인 경우에 균열길이가 증가되면서 무차원 에너지해방율이 감소하다가 다시 증가하게 나타났다. 또한 수치해석된 결과치를 무한관 실린더의 응력확대계수에 대한 정해와 비교하여 본 해석의 신뢰성을 확보하였다.

핵심용어 : 동전모양 균열, 이상복합체, 파괴역학, 유한요소법

Abstract

The mixed mode problem (I and II) of a penny-shaped interface cracks in remote tension loading on a bi-material cylinder is studied using finite element method. The energy release rates for the tip of the crack in the interface were calibrated for several different moduli combinations and crack ratios using the modified crack closure integral technique and J-integral method, with numerical results obtained from a commercial finite element program. Numerical results show that non-dimensional value of $\sqrt{G_{II}E^*}/p\sqrt{\pi a}$ increases as the crack size or moduli ratio increases. Meanwhile, non-dimensional value of $\sqrt{G_I E^*}/p\sqrt{\pi a}$ decreases as the moduli ratio increases, but above the moduli ratio of 3 its value decreases then increases again as the crack size increases. Reliability of the numerical analysis in this study was acquired with comparison to an analytical solution for the penny-shaped interface crack in an infinite medium.

Keywords : penny-shape crack, bi-material, fracture mechanics, finite element method

† 책임저자, 정회원 · 홍익대학교 건축공학과 조교수
전화: 041-860-2561; Fax: 041-867-0754
E-mail: scyang@hongik.ac.kr

* 한양대학교 교통공학부 건설교통공학부 부교수

** 홍익대학교 건축공학과 부교수

• 이 논문에 대한 토론을 2002년 12월 31일까지 본 학회에
보내주시면 2003년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

대부분의 구조물은 2개 이상의 상이한 재료로 접합되어 있지만 하중이 재하될때 하나의 시스템으로 거동하도록 요구되어지며, 계면을 통해 한 재료에서 다른 재료로 응력 및 변위가 전달된다. 이러한 구조물의 어느 한 부분이나, 특히 계면에 균열이나 결함이 존재하는 경우 큰 응력이 주변에 발생되며 이러한 균열이 일정한 길이 이상으로 전진할 때 구조물은 파괴에 이르게 된다. 따라서, 이러한 균열과 관련하여 이상복합체(bi-material) 계면의 균열선단 주변에 발생하는 응력 및 변위를 파악하는 것이 매우 중요하다.

단일재료의 모드 I 파괴에서는 최대주응력의 수직방향으로 균열이 진전된다. 반면, 단일재료와는 달리 이상복합체 계면에서의 파괴모드는 두재료의 물성치가 상이함으로 인해 하중의 형태에 상관없이 모드 I과 모드 II가 결합된 혼합모드가 된다. 이상복합체의 계면에 내재하고 있는 균열에 대한 연구의 기원은 Williams¹⁾로 거슬러 올라간다. 균열선단 주변에서 응력 σ 는 실린더 좌표상의 균열선단으로부터의 거리 r , $\lambda = n - 1/2 + i\epsilon$, n =정수, ϵ =두재료의 특성화계수를 사용하여 $\sigma \sim r^{-\lambda}$ 로 표현되며 λ 의 특성에 의해 압축응력과 인장응력이 변화되면서 존재함을 증명하였다.

Williams이후에 이상복합체의 계면에서의 파괴특성치를 구하는 연구가 많이 수행되어 왔다. 다양한 형태의 시편으로부터 계면파괴인성치를 구하는 실험이 실시되었는데, Charalambides 등²⁾은 두재료가 수평적으로 설치된 휨시편을 이용하여 4점 휨실험을 수행하여 계면파괴인성치를 산정하였고, Suo와 Hutchinson,³⁾ Lee와 Buyukozturk⁴⁾는 박편의 재료를 사이에 둔 샌드위치 시편을 사용하여 계면에서의 파괴인성치를 산정하였다. 또한 O'Dowd 등⁵⁾은 동일한 크기의 두재료를 수직하게 접합된 4점 휨 시편과 할렬인장 시편에 대한 실험연구와 더불어 2차원 평면 탄성 유한요소 해석을 통해 계면에서의 파괴인성치를 구하였다.

임원균 등⁶⁾은 다영역 경계요소법을 사용하여 서로 다른 두 재료의 접합면에 균열이 수직으로 위치하고 있을 때 두 재료의 재료 특성치에 따라 변하는 균열에서의 응력 특이성 차수를 구하는 균열문제를 해석하였다. 이상순 등⁷⁾은 탄성-점탄성 복합 재료의 계면 균열의 거동을 나타내는 응력확대계수에 대한 식을 유도하고 시간 영역 경계 요소법을 이용하여 균열 선단에서의 응

력을 계산한 후 응력확대계수 값을 유도하였다.

수치해석에 의해 응력확대계수나 J 적분값 또는 에너지해방율을 산정하는 방법에는 변위상관법(COD : crack opening displacement method), 가상균열 확장법(VCE : virtual crack extension technique), 균열폐쇄적분법(MCCI : modified crack closure integral method) 등이 있다. 이중 COD 방법과 VCE 방법은 각각 단일재료로 구성된 시편의 응력확대계수나 J 적분값을 제공하지만 모드 I 과 모드 II가 혼합된 이상복합체의 경우 적용할 수 없다. 이러한 경우에는 Raju⁸⁾에 의해 제안된 MCCI 방법을 사용하여 이상복합체의 에너지해방율(I, II)을 구하는 방법이 사용되고 있다.

한편, 동전모양의 균열이 있는 실린더 형태의 이상복합체에 대한 연구는 Kassir와 Sih⁹⁾에 의해 무한판 실린더의 응력확대계수에 대한 정해가 여러 다른 하중조건에 대해 구해졌다. 유한판에 대해서는 Lakshiminarayana 등¹⁰⁾이 MCCI 방법을 사용하여 수치해석으로부터 에너지해방율을 산정하였다.

본 연구에서는 상업용 유한요소 프로그램인 ABAQUS¹¹⁾를 사용하여 MCCI 방법에 의해 혼합모드의 G_I 및 G_{II} 를 구하였고 G_I , G_{II} 가 합산된 G 를 VCE방법에 의해 구한 J 적분값과 비교하였다. 두 재료의 탄성비를 1~50까지 변화시켰고, 노치율을 0.1~0.8까지 변화시키면서 에너지해방율을 구하여 무차원 형태의 에너지해방율로 환산한 후, 이를 두 재료의 탄성비와 균열율의 상관관계로 표현하였다. 또한 본 해석의 결과치를 Kassir와 Sih⁹⁾에 의해 제안된 무한판 실린더의 응력확대계수에 대한 정해와 비교하였다.

2. 에너지해방을 산정방법

본 연구에서는 동전모양의 균열이 이상복합 실린더 계면에 존재하는 경우 균열선단에서의 에너지 해방율을 구하는 방법으로 수치해석에 의한 방법과 정해로 구하는 방법을 사용하였다. 수치해석에 의한 방법은 가상균열 확장방법에 의해 J-적분값(또는 G)을 구하는 방법(Virtual Crack Extension : VCE)과 증분된 균열을 폐쇄하는 방법에 의한 MCCI(Modified Crack Closure Integral)방법이 있다. 수치해석에 의해서는 실린더 크기에 상관없이 유한요소해석으로 구할 수 있지만, 정해로 구하는 방법은 무한판의 실린더내에 유한

크기의 동전모양의 균열이 존재하는 경우에만 3차원으로 해석된 해가 존재한다.

2.1 VCE 방법

유한요소해석에 의해 선형파괴역학의 경우 위치에너지(potential energy) Π_p 는 매트릭스형태로 다음과 같이 표현되어진다.

$$\Pi_p = 1/2 [u]^T [K][u] - [u]^T [F] \quad (1)$$

여기서, $[u]$ 는 변위 매트릭스이며, $[K]$ 는 요소 매트릭스, $[F]$ 는 전체계의 하중 매트릭스이다. 위의 식에 대한 유한요소법에 의한 해는 다음과 같다.

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial [u]} = [K][u] - [F] = 0 \quad (2)$$

균열길이 a 에 대한 에너지해방율은 $-\frac{\partial \Pi_p}{\partial a}$ 이며, Rice에 의해 제안된 J-적분값은 식 (2)를 균열길이 a 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$J = -\frac{\partial \Pi_p}{\partial a} = -\frac{1}{2} [u]^T \frac{\partial [K]}{\partial a} [u] + [u]^T \frac{\partial [F]}{\partial a} - \frac{\partial [u]^T}{\partial a} [K][u] + [F] \frac{\partial [u]^T}{\partial a} \quad (3)$$

식(3)에 식(2)를 대입하면,

$$J = -\frac{1}{2} [u]^T \frac{\partial [K]}{\partial a} [u] + [u]^T \frac{\partial [F]}{\partial a} \quad (4)$$

여기서,

$$\frac{\partial K}{\partial a} = \frac{1}{\Delta a} [K_{a+\Delta a} - K_a] \quad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{1}{\Delta a} [F_{a+\Delta a} - F_a] \quad (6)$$

선형탄성에서는 $G=J$ 가 되어 위의 식(4)~(6)에 의해 에너지해방율을 계산할 수 있어 VCE방법이 현재 균열해석시 많이 사용되고 있으나 상업용 프로그램인 ABAQUS에서는 모드 I과 모드 II를 분리하는 방법이 제시되어있지 않다.

2.2 MCCI 방법

Irwin에 의해 제안된 에너지해방율은 균열길이가 a 에서 $a+\Delta$ 로 미세하게 증가될 경우, 균열길이 증분 Δ 에 대한 원래의 균열길이 a 가 되도록 닫는데 필요한 일의 비를 나타내며, 이때 증가된 균열선단 후면의 절점에서의 변위(Fig. 1)는 원래 균열길이의 균열선단 후면의 변위와 유사하다는 가정하에 다음과 같이 표현된다.

$$G = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_0^{\Delta} v(r) \sigma_y(\Delta - r) dr + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_0^{\Delta} u(r) \tau_{xy}(\Delta - r) dr = G_I + G_{II} \quad (7)$$

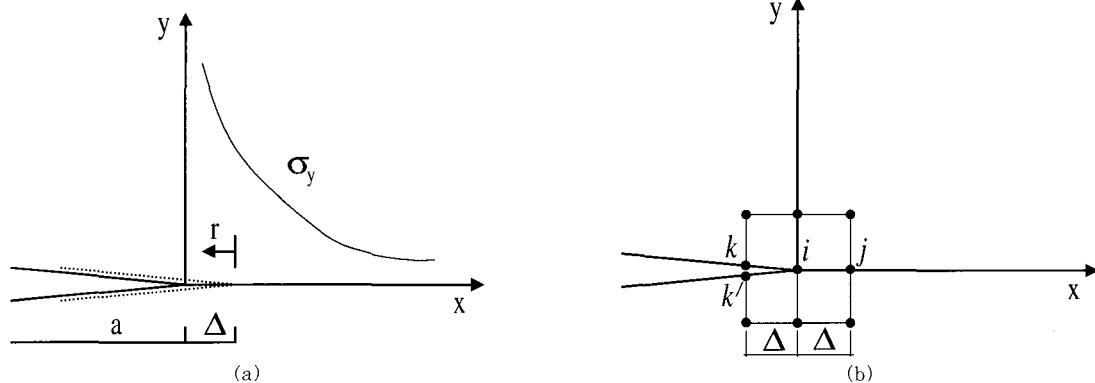


Fig. 1 Irwin's virtual crack-closure method (a) Normal stress(σ_y) distribution ahead of the crack (b) four noded elements at the crack tip

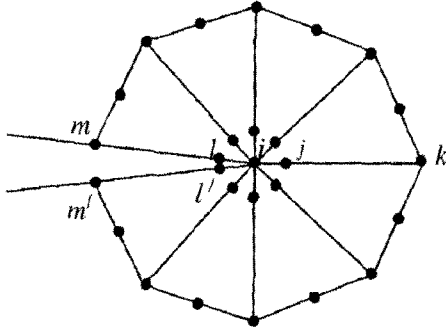


Fig. 2 Finite element mesh details near the crack tip

여기서, $v(r)$, $u(r)$ 은 각각 절점에서의 수직, 수평 방향의 변위이며, σ_y , τ_{xy} 는 수직, 전단방향의 응력을 나타내며, $r = \Delta - x$ 가 된다.

한편, 균열선단 전면의 $y=0$ 선상에서의 수직응력은 다음과 같이 가정하였으며,

$$\sigma_y = \frac{A_1}{\sqrt{x}} + A_2 \quad (8)$$

Fig. 2에서와 같이 1/4절점 특이(singularity) 요소의 내삽함수를 사용하여 변위를 다음과 같이 표현하였다.⁸⁾

$$v(x) = \left\{ 1 - 3\sqrt{\frac{x}{\Delta}} + 2\frac{x}{\Delta} \right\} v_i + \left\{ 4\sqrt{\frac{x}{\Delta}} - 4\frac{x}{\Delta} \right\} v_j + \left\{ -\sqrt{\frac{x}{\Delta}} + 2\frac{x}{\Delta} \right\} v_k \quad (9)$$

위의 식(8)과 식(9)를 식(7)에 대입하여 정리하면, 동전모양의 균열이 있는 이상복합체의 모드 I 및 모드 II에 대한 에너지해방율은 각각 다음과 같다.

$$G_I = \frac{1}{2\Delta} [f_{yi} \{t_{11}(v_m - v_m) + t_{12}(v_l - v_l)\} + f_{yj} \{t_{21}(v_m - v_m) + t_{22}(v_l - v_l)\}] \quad (10)$$

$$G_{II} = \frac{1}{2\Delta} [f_{xi} \{t_{11}(u_m - u_m) + t_{12}(u_l - u_l)\} + f_{xi} \{t_{21}(u_m - u_m) + t_{22}(u_l - u_l)\}] \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} t_{11} &= 6 - \frac{3\pi}{2} & t_{12} &= 6\pi - 20 \\ t_{21} &= \frac{1}{2} & t_{22} &= 1 \\ f_{yi} &= \frac{F_{yi}}{2\pi R_i} & f_{yj} &= \frac{F_{yj}}{2\pi R_j} \\ f_{xi} &= \frac{F_{xi}}{2\pi R_i} & f_{xj} &= \frac{F_{xj}}{2\pi R_j} \end{aligned}$$

MCCI방법은 모드 I과 모드 II의 에너지해방율이 식(10) 및 식(11)에 의해 자동적으로 분리되어 계산되어지는 장점이 있다.

2.3 무한판의 정해

Kassir와 Sih⁹⁾에 의해 무한판의 대칭인 단면의 중앙에 동전모양의 균열이 있고(Fig. 3), 무한판의 양단에 p 의 인장응력이 주어진 경우, 이상복합체의 재료특성치 ϵ 을 사용하여 응력확대계수를 다음과 같이 구하였다.

$$K_I + iK_{II} = 2p\sqrt{\pi a} \frac{\Gamma(2+i\epsilon)}{\Gamma(1/2+i\epsilon)} \quad (12)$$

여기서,

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_1 + \mu_2(3-4\nu_1)}{\mu_2 + \mu_1(3-4\nu_2)} \quad (13)$$

여기서, μ 와 ν 는 전단탄성계수와 푸와송 비를 표시하며 첨자 1, 2는 상부 및 하부재료를 나타낸다. 예를 들

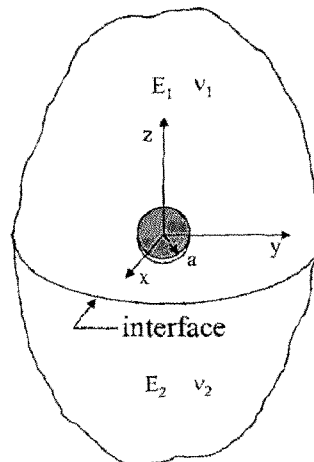


Fig. 3 An interface crack in an infinite medium

Table 1 Normalized stress intensity factors in an infinite bi-material medium in terms of elastic moduli ratios

$\frac{E_1}{E_2}$	$\frac{K_I}{\sigma_N \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{\sigma_N \sqrt{\pi a}}$
1	0.6366	0.0000
2	0.6362	0.0462
3	0.6357	0.0696
5	0.6349	0.0933
10	0.6341	0.1152
20	0.6335	0.1279
50	0.6330	0.1363

어, 두재료가 동일한 경우 $\epsilon=0$, $\Gamma(2)=1$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ 가되며, 위의 식(13)을 식(12)에 대입하고 $K=\sqrt{EG}$ 의 관계식을 이용하면 $\sqrt{EG}/p\sqrt{\pi a}=0.6366$ 이 된다. Mathematica를 사용하여 식(12)의 해를 무차원의 응력확대계수로 표현하여 Table 1에 정리하였고, 이를 Fig. 4에 탄성계수비에 관한 그래프로 도식하였다. 이 경우 모드 I의 무차원 응력확대계수 $K_I/p\sqrt{\pi a}=0.6366 \sim 0.6330$ 의 값을 갖으며 탄성계수비의 변화에 따라 거의 변하지 않음을 보여준다. 반면, 모드 II의 무차원 응력확대계수 $K_{II}/p\sqrt{\pi a}$ 는 탄성계수비의 증가에 따라 증가함을 보여준다.

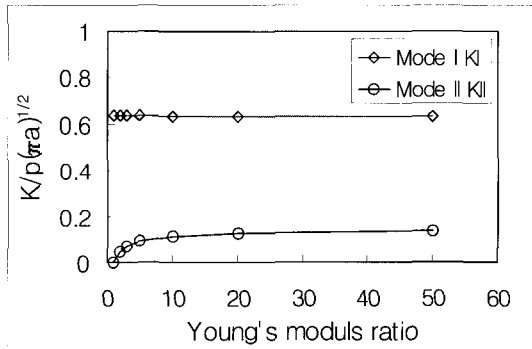


Fig. 4 Variation of normalized K in terms of Young's modulus ratio in an infinite bi-material medium

3. 유한요소 모델링

인장 시편에 대해 본 연구에서는 상업용 FEM 패키지인 ABAQUS¹¹⁾를 사용하였다. 본 모델에서는 실린더 모양의 이상복합체를 평면변형 8절점으로 이루어진 축대칭 요소를 이용하였으며(Fig. 5), 모델이 대칭

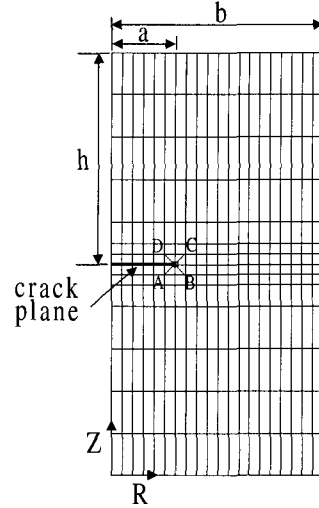


Fig. 5 Finite element discretization, for the penny-shaped crack along the interface in a bi-material cylinder

임을 고려하여 시편의 우측 반만을 고려하였다. 본 모델에서는 계면 두께의 영향은 고려되지 않았다. 균열선단의 응력에 대한 특이점을 확보하기 위해 사변형 2차 요소의 나란한 두변이 하나로 합친후 중간 절점을 균열선단으로 1/4 길이만큼 이동한 특이 요소를 사용하여 Fig. 6과 같이 균열 주위의 세부 요소에 대해 방사형의 요소망을 구성하였다. 이 경우 특이 요소망과 주변의 기타 요소망을 각기 만든 후 각 요소망의 경계상의 절점에서 응력과 변위가 같도록 구속해주는 MPC (multi-point constraint) 기능을 사용하였다. 해석 결과가 요소의 크기나 요소개수에 의해 영향을 받지 않도록 특이 요소의 크기는 $\Delta a=0.0025 a$ (여기서 a =전체 균열길이의 반) 이하가 되도록 하여 수렴된 결과를 도출하였다.¹⁰⁾

두 재료의 푸와송 비는 같아서 $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.3$ 으로 가정하였고, 한쪽 재료의 탄성계수를 10 GPa로 고정하고 탄성계수비에 따라 다른쪽 재료의 탄성계수를 증가시켰다. 수치해석시 균열 노치율 $a/b=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ 로 사용하였고, 두재료의 강성비 $E_1/E_2=1, 2, 3, 5, 10, 20, 50$ 을 변화시켰다.

응력확대계수와 공칭응력 및 균열길이와는 $K \propto p\sqrt{\pi a}$ 의 관계가 성립되고 $K=\sqrt{GE^*}$ 이기에 해석결과를 무차원함수인 $\sqrt{GE^*}/p\sqrt{\pi a}$ 로 표현하였다. 여기서, $p = P/bd$ 이며 E^* 는 두재료 강성의 평균값으로서

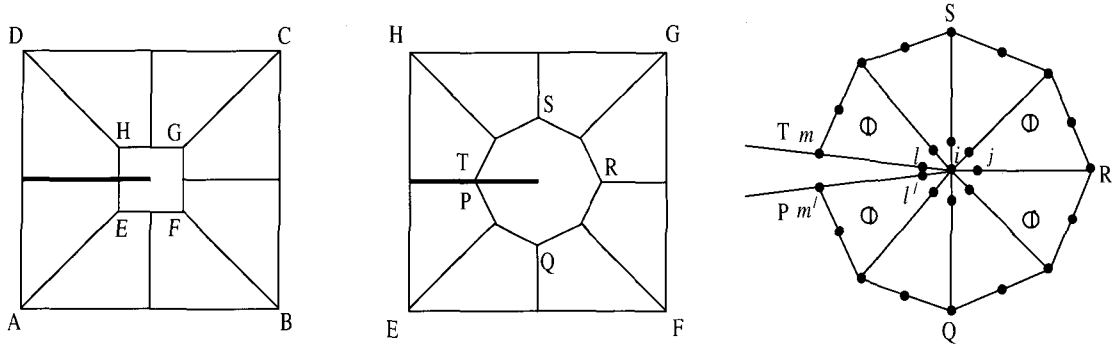


Fig. 6 Finite element discretization. (a) regular and singular elements in the crack tip in zone ABCD, (b) detail of zone EFGH, (c) singular element around the crack tip in zone PQRST

다음과 같이 병렬식의 형태로 표현된다.

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2} \right) \quad (14)$$

한편, 위의 식 (10)과 식(11)에 포함된 절점 i 및 j 에서의 수직, 수평방향의 힘 $F_{xi}, F_{xj}, F_{yi}, F_{yj}$ 는 Fig. 7과 같이 절점 i 및 j 에 수직, 수직 양방향에 강성의 스프링을 연결하여 연결된 스프링의 좌, 우 또는 상, 하의 절점에서의 상대변위와 스프링의 탄성계수비를 사용하여 구하였다.

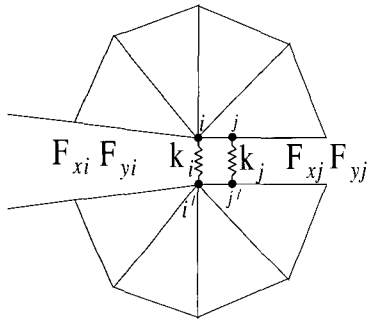


Fig. 7 Spring connections at the nodes i, i' and j, j' .

4. 수치해석결과

VCE 방법에 의해 구해진 J-적분값과 MCCI방법으로 식(10)과 식(11)에 의해 구해진 혼합된 에너지해방률 G 를 무차원함수로 표현하여 비교해보면 Fig. 8과 같다. Fig. 8에서는 노치율 $a/b=0.5$ 에 대해 이상복합체 두재료의 탄성비를 변화시키면서 비교하였는

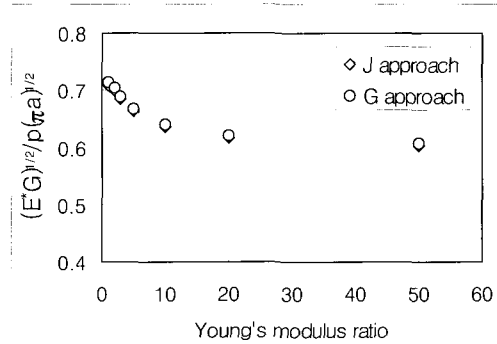


Fig. 8 Comparison of $\frac{\sqrt{GE^*}}{\sigma_N \sqrt{\pi a}}$ in terms of Young's modulus ratio calculated from J approach and G approach

데, MCCI방법이 일정하게 약간 큰값을 나타내 주지만 상호간의 오차는 0.8% 미만으로서 두 방법에 의해 계산된 결과가 아주 유사함을 보여준다.

노치율을 0.1에서 0.8까지 변화시키고 두재료의 탄성비를 1에서 50까지 변화시켜 해석된 결과를 MCCI 방법에 의해 모드 I의 무차원함수인 $\sqrt{G_I E^*}/p\sqrt{\pi a}$ 로 표현하여 Table 2에 정리하였다. 마찬가지로 모드 II의 결과를 $\sqrt{G_{II} E^*}/p\sqrt{\pi a}$ 로 표현하여 Table 3에 정리하였다. 한편, $G = G_I + G_{II}$ 이므로 Table 2와 Table 3의 결과를 결합하여 Table 4에 $\sqrt{GE^*}/p\sqrt{\pi a}$ 의 값을 정리하였다.

Fig. 9에는 Table 2와 Table 3의 결과중 노치율 $a/b=0.5$ 인 경우, 모드 I에 의한 G_I 와 모드 II에 의한 G_{II} 를 무차원함수로 도식하였다. 이상복합체 두재료의 탄성비가 증가함에 따라 G_I 는 일정하게 감소하면서

Table 2 Mode I normalized energy release rate, $\frac{\sqrt{G_I E^*}}{\sigma_N \sqrt{\pi a}}$ in a bi-material cylinder in terms of elastic moduli ratios and crack ratios

E_1/E_2	a/R								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	
1	0.6463	0.6488	0.6600	0.6814	0.7148	0.7651	0.8449	0.9908	
2	0.6332	0.6338	0.6434	0.6628	0.6938	0.7411	0.8165	0.9556	
3	0.6162	0.6146	0.6221	0.6390	0.6670	0.7103	0.7803	0.9107	
5	0.5912	0.5866	0.5912	0.6046	0.6284	0.6661	0.7284	0.8464	
10	0.5601	0.5522	0.5534	0.5629	0.5817	0.6129	0.6662	0.7695	
20	0.5380	0.5279	0.5270	0.5339	0.5494	0.5763	0.6234	0.7167	
50	0.5217	0.5102	0.5078	0.5129	0.5260	0.5498	0.5926	0.6788	

Table 3 Mode II normalized energy release rate, $\frac{\sqrt{G_{II} E^*}}{\sigma_N \sqrt{\pi a}}$ in a bi-material cylinder in terms of elastic moduli ratios and crack ratios

E_1/E_2	a/R								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0.0637	0.0804	0.0927	0.1047	0.1181	0.1344	0.1557	0.1877	
3	0.0941	0.1187	0.1369	0.1546	0.1744	0.1982	0.2293	0.2763	
5	0.1225	0.1545	0.1781	0.2010	0.2266	0.2574	0.2975	0.3578	
10	0.1456	0.1835	0.2115	0.2387	0.2689	0.3050	0.3520	0.4224	
20	0.1570	0.1979	0.2281	0.2574	0.2898	0.3285	0.3786	0.4535	
50	0.1634	0.2060	0.2376	0.2681	0.3017	0.3418	0.3935	0.4707	

Table 4 Normalized energy release rate, $\frac{\sqrt{G E^*}}{\sigma_N \sqrt{\pi a}}$ in a bi-material cylinder in terms of elastic moduli ratios and crack ratios

E_1/E_2	a/R								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	
1	0.6463	0.6488	0.6600	0.6814	0.7148	0.7651	0.8449	0.9908	
2	0.6364	0.6389	0.6501	0.6710	0.7038	0.7531	0.8312	0.9739	
3	0.6233	0.6260	0.6370	0.6575	0.6894	0.7375	0.8133	0.9518	
5	0.6037	0.6066	0.6174	0.6372	0.6680	0.7141	0.7868	0.9190	
10	0.5787	0.5819	0.5925	0.6114	0.6408	0.6846	0.7534	0.8778	
20	0.5604	0.5638	0.5743	0.5927	0.6211	0.6633	0.7293	0.8482	
50	0.5466	0.5502	0.5606	0.5787	0.6064	0.6474	0.7113	0.8261	

$E_1/E_2=20$ 이상에서는 그 값이 수렴함을 보여준다. 반대로, G_{II} 는 탄성비가 증가하면서 일정하게 증가함을 보여주며 $E_1/E_2=20$ 이상에서 수렴함을 보여

준다.

Fig. 10에는 무차원함수 $\sqrt{G E^*}/b\sqrt{\pi a}$ 를 노치율 a/b 의 함수로 도식하였는데 노치율이 증가하면서 모든

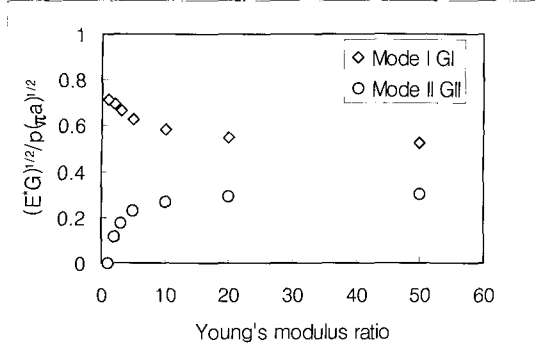


Fig. 9 Variation of normalized G_I and G_{II} in terms of Young's modulus ratio in a bi-material cylinder for an interface crack

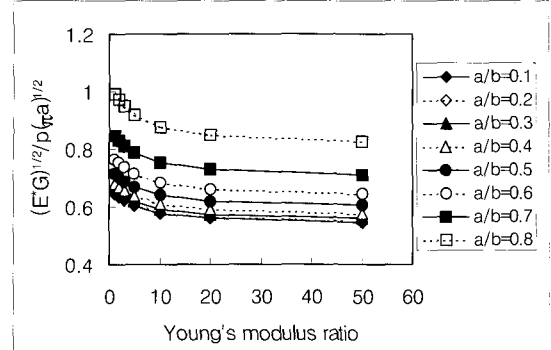


Fig. 11 Normalized G in terms of moduli ratio for different crack ratio in a bi-material cylinder for an interface crack

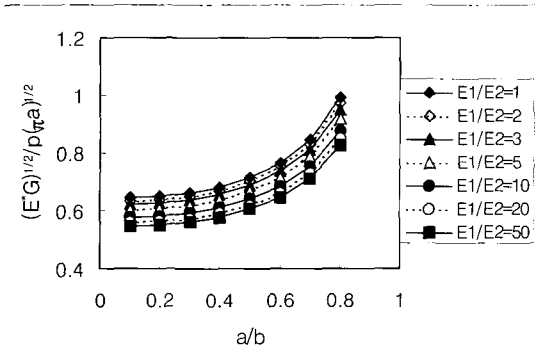


Fig. 10 Normalized G in terms of crack ratio for different moduli ratio in a bi-material cylinder for an interface crack

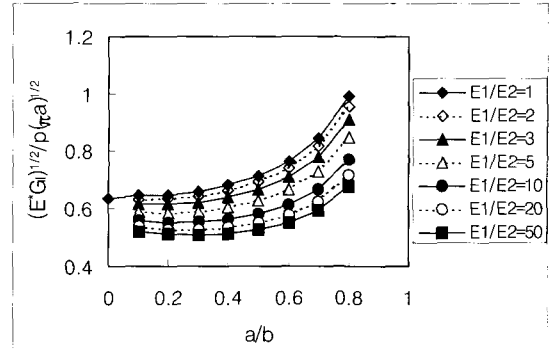


Fig. 12 Normalized G_I in terms of crack ratio for different moduli ratio in a bi-material cylinder for an interface crack

경우의 E_1/E_2 에 대해 $\sqrt{GE^*}/p\sqrt{\pi a}$ 값이 일정하게 증가하며, $a/b=0.1$ 에서 $a/b=0.8$ 로 증가한 경우 51~53% 정도 증가함을 보여준다. Fig. 11에서는 같은 결과를 E_1/E_2 에 대해 도식하였는데 탄성비가 증가함에 따라 $\sqrt{GE^*}/\sigma_N\sqrt{\pi a}$ 의 값이 일정하게 감소함을 보여준다.

Fig. 12에는 모드 I의 무차원함수 $\sqrt{G_I E^*}/p\sqrt{\pi a}$ 로 도식하였는데, $E_1/E_2=1$ 의 경우 노치율 a/b 가 증가하면서 무차원함수의 값이 증가함을 보여준다. 특히, $E_1/E_2=1$, $a/b=0$ 인 경우(동일재료, 미세한 균열길이)는 Kassier와 Sih⁹⁾에 의해 구한 무한판의 정해를 사용하여 무한판의 경우 유한크기의 균열길이율 $a/b \rightarrow 0$ 으로 수렴한다는 가정하에 Fig. 12에 도식하였으며, 이 경우에는 $K_I/p\sqrt{\pi a}=0.6366$ 으로 수렴함을 보여준다. $E_1/E_2=3$ 이상부터는 $a/b=0.1$ 에서 0.2로 증가되면서

그 값이 약간 감소하다가 다시 증가하는 경향을 보여준다. 이러한 경향은 Kassier와 Sih⁹⁾에 의한 무한판의 모드 I 정해(Table 1 및 Fig. 4)를 살펴보면 균열길이가 미세한 경우(즉, $a/b \rightarrow 0$), $K_I/p\sqrt{\pi a}=0.6366 \sim 0.6330$ 으로 두재료의 탄성계수비에 상관없이 일정한 값을 유지함을 알 수 있다. 따라서, 이러한 결과로부터 $E_1/E_2 > 1$ 인 경우의 모드 I 무차원 에너지해방을 $\sqrt{G_I E^*}/p\sqrt{\pi a}$ 는 초기 균열길이가 증가함에 따라 감소하다가 다시 증가됨을 알 수 있다. Fig. 13에서는 $\sqrt{G_I E^*}/p\sqrt{\pi a}$ 의 결과를 E_1/E_2 의 함수로 표현하였다.

Figs. 14 및 15에는 모드 II의 무차원함수 $\sqrt{G_{II} E^*}/p\sqrt{\pi a}$ 로 도식하였는데, E_1/E_2 의 비가 증가되면서 a/b 의 변화에 따른 $\sqrt{G_{II} E^*}/p\sqrt{\pi a}$ 의 값이 더 증가하는 경향을 보여준다.

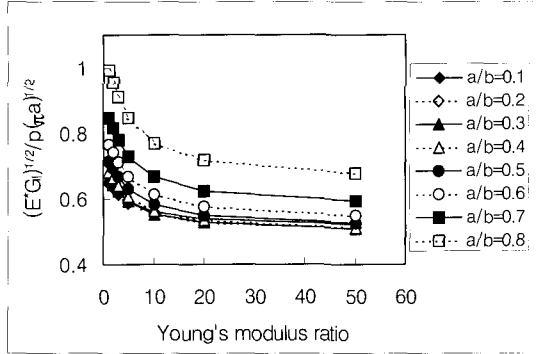


Fig. 13 Normalized G_I in terms of moduli ratio for different crack ratio in a bi-material cylinder for an interface crack

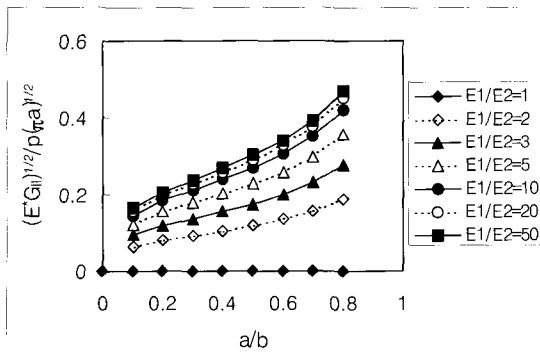


Fig. 14 Normalized G_{II} in terms of crack ratio for different moduli ratio in a bi-material cylinder for an interface crack

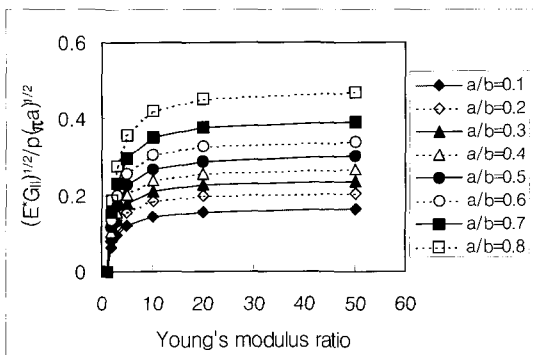


Fig. 15 Normalized G_{II} in terms of moduli ratio for different crack ratio in a bi-material cylinder for an interface crack

5. 결 론

동전모양의 균열이 있는 이상복합체 두재료의 탄성비 및 균열길이의 변화로 인한 에너지 해방율을 수치해석 및 무한판의 정해로부터 분석한 결과는 다음과 같다.

- (1) VCE 방법에 의해 구해진 J-적분값과 MCCI방법으로 에너지해방율을 비교한 결과 MCCI방법이 일정하게 약간 큰값을 나타내 주지만 상호간의 오차는 0.8% 미만으로서 두 방법에 의해 계산된 결과가 아주 유사함을 보여주었다.
- (2) 모드 I 무차원 에너지해방율 $\sqrt{G_I E^*} / p \sqrt{\pi a}$ 는 두재료의 탄성비가 증가하면서 그 값이 감소하며, $E_1/E_2 > 1$ 인 경우 초기 균열길이가 증가함에 따라 감소하다가 다시 증가되는 경향을 보여준다.
- (3) 모드 II 무차원 에너지해방율 $\sqrt{G_{II} E^*} / p \sqrt{\pi a}$ 는 두재료의 탄성비와 균열길이가 증가되면서 그 값이 증가함을 보여준다.
- (4) 무한판의 정해로부터 모드 I 무차원 에너지해방율 $K_I / p \sqrt{\pi a}$ 는 두재료의 탄성비에 상관없이 거의 일정하지만, 모드 II 무차원 에너지해방율 $K_{II} / p \sqrt{\pi a}$ 는 유한판의 실리더의 경우와 같이 탄성비의 증가에 따라 그 값이 증가함을 보여준다.

감사의 글

본 논문은 한국과학기술부, 한국과학재단에서 지원한 첨단도로연구센터의 연구수행결과입니다.

참 고 문 헌

1. Williams, M. L. "The Stress around a Fault or Crack in Dissimilar Media," *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 49, No. 2, 1959, pp.199~204
2. Charalambides, P. G. et al., "A Test Specimen for Determining the Fracture Resistance of Bimaterial Interfaces," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, 1989, pp.77~82
3. Suo, Z. and Hutchinson, J. W., "Sandwich

- Test Specimens for Measuring Interface Crack Toughness," *Materials Science and Engineering*, A107, 1989, pp.135~143
4. Lee, K. M. and Buyukozturk, O., "Fracture Analysis of Mortar-Aggregate Interfaces in Concrete," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 118, No. 10, 1992, pp.2031~2047
 5. O'Dowd, N. P., Shih, C. F. and Stout, M. G., "Test Geometries for Measuring Interfacial Fracture Toughness," *Int'l Journal of Solids Structures*, Vol. 29, No. 5, 1992, pp.571~589
 6. 임원균, 이현규, "서로 다른 두 재료의 접합면에 수직인 균열의 경계 요소 해석, 응력확대계수," 한국전산구조공학회논문집, 제9권, 제1호, 1996, pp.93~99
 7. 이상순, 김태영, "경계요소법에 의한 탄성-점탄성 복합 구조체의 계면균열해석," 한국전산구조공학회 논문집 제9권, 제1호, 1996, pp.85~91
 8. Raju, I. S., "Calculation of Strain-Energy Release Rates with Higher Order and Singular Finite Element," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 28, No. 1, 1987, pp.251~274
 9. Kassir, M. K. and Sih, G. C., "Mechanics of Fracture - Vol. 2 Three-dimensional Crack Problems," *Noordhoff International Publishing Co.*, 1975, pp.177~189
 10. Lakshminarayana, H. V., Bernard, M. and Bui-Quoc, T., "Finite Element Study of a Penny-shaped Crack along the Interface in a Bi-material Cylinder," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 43, No. 6, 1992, pp.981~991
 11. Hibbitt, H. D., Karlsson, B. and Sorensen, E. P., *ABAQUS User's Manual*, Hibbitt, Karlsson, and Sorensen, Inc., 1994