응용통계연구 제 15권 2호, 2002년, pp. 405-414

무정보 사전분포를 이용한 이원배치 혼합효과 분산분석모형에서 오차분산에 대한 베이지안 분석

장 인 홍 [1] 김 병 휘 [2]

요 약

반복이 같은 이원배치 혼합효과 분산분석모형에서 무정보 사전분포를 이용하여 오차분산을 추정하는 문제를 생각하고자 한다. 먼저 무정보 사전분포로 제프리스사전분포, 준거사전분포 그리고 확률일치사전분포를 유도하고 이들 각각의 사전분포들에 대하여 주변사후분포를 제시하였다. 끝으로 실제 자료를 근거로 오차분산의 주변사후밀도함수에 대한 그래프와 오차분산에 대한 신용구간들을 구하고 이 구간들을 비교한다.

주요용어: 오차분산, 이원배치 혼합효과 분산분석모형, 제프리스사전분포, 준거사전분포, 확률일치사전분포

1. 서론

분산분석모형(analysis of variance model)에서 분산요소(variance component)들의 추론에 대한 연구는 많은 학자들의 관심의 대상이 되어 왔다. 특히 베이지안 관점에서도 Box와 Tiao(1973), Ye(1994), Vounatsu와 Smith(1997)를 비롯한 많은 학자들에 의하여 다양한 사전분포(prior)들을 이용하여 분산요소들의 추정에 관한 문제들이 다루어졌다. 먼저 반복이 같고 임의효과(random effect)를 갖는 일원배치 분산분석모형은 $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, i = 1, 2, \cdots, I, j = 1, 2, \cdots, J$이고, 여기에서 μ는 알려지지 않은 상수(unknown constant)이고 α_i는 독립인 정규분포 $N(0, \sigma_\alpha^2)$를 따르고 ε_{ij}들은 모두 독립인 정규분포 $N(0, \sigma^2)$를 따르며, α_i와 ε_{ij}는 모두 독립이다. 위의 모형과 관련된 연구들을 들어보면 Box와 Tiao(1973)는 사전분포가 $\pi(\mu, \sigma_\alpha^2, \sigma^2) \propto \sigma^{-2}(\sigma^2 + J\sigma_\alpha^2)^{-1}$일 때 $\phi = J\sigma_\alpha^2/\sigma^2$의 사후분포를 유도하고, 검정문제에 있어서 고전적인 방법의 결과와 ϕ에 대한 사후분포의 관계를 연구하였으며, 또한 Ye(1994)와 Chung과 Dey(1998)는 집단화된 순서준거사전분포(group ordering reference prior)접근방법을 이용하여 각각 ϕ와 급내상관계수(intraclass correlation) $\rho = \sigma_\alpha^2/(\sigma^2 + \sigma_\alpha^2)$에 대한 준거사전분포가 고전적인 포함확률 (frequentist coverage probability)의 의미에서 우수한 결과를 제공한다는것을 보였다. 최근에 Kim, Kang과 Lee(2001)는 Ye(1994)와 Chung과 Dey(1998)의 결과를 확률일치사전분포(probability matching prior)까지 확장하여

1) (143-701) 서울시 광진구 화양동 1, 건국대학교 상경대학 응용통계학과, 강의교수
E-mail:ihchang1@hanmail.net
2) (133-791) 서울시 성동구 행당동 17, 한양대학교 자연과학대학 수학과, 교수
E-mail:bkim@hanyang.ac.kr

고전적인 포함확률(frequentist coverage probability)의 의미에서 ρ에 대한 확률일치사전분포의결과가 우수한 결과를 제공한다는것을 보였다.

이제는 반복이 같은 이원배치 혼합효과 분산분석모형(balanced two-way mixed-effects ANOVA model)

$$y_{ij} = \mu_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, i = 1, 2, \cdots, p(>1), j = 1, 2, \cdots, q(>1) \tag{1.1}$$

를 생각하자. 모형(1.1)에서 μ_i는 고정인자(fixed efects)의 i번째 효과의 평균이고 오차 ε_{ij}들은 모두 독립인 정규분포 $N(0, \sigma^2)$를 따르고, β_j들은 모두 독립인 정규분포 $N(0, \sigma_\beta^2)$를 갖는 임의 효과(random effects)의 j번째 인자이며, β_j와 ε_{ij}는 모두 독립이다. 이원배치 분산분석모형에서 Vounatsu와 Smith(1997)는 분산요소모형(variance component component)에 대해 베이지안분석을 하였으며, 또 반복이 같은 경우와 다른경우의 각각에 대하여 두 분산요소(2-variance component)를 갖는 다단계 모형(hierarchical model)의 베이지안분석에 대한 연구를 하였다.

본 논문에서는 모형 (1.1)에서 오차분산(error variance) σ^2의 무정보 사전분포(noninformative prior)를 유도하고자 한다. 이후의 논문의 전개는 2장에서는 주된 세가지 유형의 무정보 사전분포인 제프리스사전분포(Jeffreys prior)(1961)와 Berger와 Bernardo(1989, 1992)의 방법에 의한 준거사전분포(reference prior)를 유도한다. 또한 신뢰수준(confidence level)과 단측사후신용구간(one-sided posterior credible interval)의 고전적 포함확률(frequentist coverage probability)를 근사적으로 일치시키는 확률일치사전분포(probability matching prior)를 Datta와 Ghosh(1995)방법에 의하여 유도한다. 3장에서는 2장에서 유도된 사전분포들에 대하여 σ^2의 주변사후확률밀도함수를 유도하고 각각의 사전분포들에 대한 사후분포가 정상적(proper)인가를 확인한다. 끝으로 4장에서 이원배치 혼합 분산분석모형의 두 개의 실제자료(real data)집합에 대하여 3장에서 유도된 각각의 사전분포들에 대한 주변사후밀도함수의 그래프와 σ^2에 대한 신용구간(credible interval)를 제공하고, 이 구간들을 비교한다.

2. 무정보 사전분포

분산분석 모형 (1.1)에 대하여 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_p)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_{11}, \cdots, y_{pq})^T$라 나타내면 모수 $(\sigma^2, \sigma_\beta^2, \boldsymbol{\mu})$에 대한 우도함수(likelihood function)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} l(\sigma^2, \sigma_\beta^2, \boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{y}) \quad \propto \quad & (\sigma^2)^{-\frac{q(p-1)}{2}} (\sigma^2 + p\sigma_\beta^2)^{-\frac{q}{2}} \\ \times \quad & \exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{p\sum_{j=1}^q (y_{.j} - y_{..})^2}{\sigma^2 + p\sigma_\beta^2} + \frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (y_{ij} - y_{i.} - y_{.j} + y_{..})^2}{\sigma^2} \\ + \quad & \frac{q\sum_{i=1}^p (y_{i.} - y_{..} - (\mu_i - \mu_.))^2}{\sigma^2} + \frac{pq(y_{..} - \mu_.)^2}{(\sigma^2 + p\sigma_\beta^2)} \Big) \Big]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

위의 식(2.1)에서 $y_{i.} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^q y_{ij}$, $y_{.j} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^p y_{ij}$, $y_{..} = \frac{1}{pq}\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q y_{ij}$, $\mu_. = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^p \mu_i$이다.

식(2.1)로 부터, 피셔의 정보행렬(Fisher information matrix)은

$$I_1(\sigma^2,\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{q(p-1)}{2\sigma^4}+\frac{q}{2(\sigma^2+p\sigma_\beta^2)^2} & \frac{pq}{2(\sigma^2+p\sigma_\beta^2)^2} & \mathbf{0}' \\ \frac{pq}{2(\sigma^2+p\sigma_\beta^2)^2} & \frac{p^2q}{2(\sigma^2+p\sigma_\beta^2)^2} & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{q}{\sigma^2}I_p - \frac{q\sigma_\beta^2}{\sigma^2(p\sigma_\beta^2+\sigma^2)}J_p \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

이고 위의 식(2.2)에서 I_p는 $p\times p$ 단위행렬(identity matrix)이고 J_p는 모든 성분이 1인 $p\times p$ 행렬이다. 이제, 식(2.2)를 이용하여 3가지 형태의 무정보 사전분포(noninformative prior); 제프리스사전분포와 준거사전분포 그리고 확률일치사전분포를 유도하고자 한다.

식(2.2)에서 $(\sigma^2,\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu})$에 대한 제프리스사전분포는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \pi_J(\sigma^2,\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu}) &\propto |I(\sigma^2,\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu})|^{\frac{1}{2}} \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{p+1}{2}}(\sigma^2+p\sigma_\beta^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

다음으로는 관심모수(parameter of interest)를 σ^2으로 하고 장애모수(nuisance parameter)가 $(\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu})$인 경우, Berger와 Bernardo(1989)의 방법에 의하여 $(\sigma^2,\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu})$에 대한 준거사전분포를 구하면 다음과 같다.

$$\pi_R(\sigma^2,\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu}) \propto (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}(\sigma^2+p\sigma_\beta^2)^{-\frac{3}{2}}. \tag{2.4}$$

또한 세 번째 유형의 무정보 사전분포로 확률일치사전분포를 유도하기위하여 다음과 같은 재모수(reparametrization)를 생각하자.

$$\sigma^2=\psi, \sigma_\beta^2=\frac{1}{p}(\lambda-\psi), \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\eta} \tag{2.5}$$

식(2.5)에 근거하여 $(\psi,\lambda,\boldsymbol{\eta})$에 대한 피셔의 정보행렬은 다음과 같다.

$$I_2(\psi,\lambda,\boldsymbol{\eta}) = \begin{pmatrix} \frac{q(p-1)}{2\psi^2} & \mathbf{0} & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \frac{q}{2\lambda^2} & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{q}{\psi}I_p - \frac{q(\lambda-\psi}{p\psi\lambda}J_p \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

따라서 Cox와 Reid(1987)의 의미에서 ψ는 λ와 $\boldsymbol{\eta}$에 대하여 직교가 된다. 그러면 Tibshirani(1989)방법에 따라 제1계확률일치사전분포(first order probability matching prior)는

$$\pi_M^{(1)}(\psi,\lambda,\boldsymbol{\eta}) \propto \psi^{-1}\cdot g(\lambda,\boldsymbol{\eta})$$

이 되고 원래의 모수 $(\sigma^2,\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu})$의 제1계확률일치사전분포는 다음과 같이 나타난다.

$$\pi_M^{(1)}(\sigma^2,\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu}) \propto (\sigma^2)^{-1}\cdot g(\sigma^2+p\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu}) \tag{2.7}$$

여기에서, $g(\sigma^2+p\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu})$는 임의의 미분가능한 함수이다. 명백히 식(2.7)에서 주어진 사전분포의 집합은 매우 크므로, 집합을 좁히기 위해서 Datta와 Ghosh(1995)가 제안한 제2계확

률일치사전분포(second order probability matching prior)를 유도하고자 한다. $\psi = \theta_1, \lambda = \theta_2, \eta_{i-2} = \theta_i, i = 3, \cdots, p+2$이라 놓으면

$$\begin{aligned}\Delta(\pi_M^{(1)}, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}(I_{11}^{-\frac{1}{2}} g(\theta_2, \cdots, \theta_{p+2})) \\ &\quad -\sum_{r=2}^{p+2}\sum_{s=2}^{p+2}\frac{\partial}{\partial\theta_s}(L_{11r}I^{11}I^{rs}I_{11}^{\frac{1}{2}}g(\theta_2, \cdots, \theta_{p+2})) \\ &\quad -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\theta_1}(L_{111}(I^{11})^2 I_{11}^{\frac{1}{2}} g(\theta_2, \cdots, \theta_{p+2})) = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

를 풀면 된다. 여기에서

$$\begin{aligned} L_{111} &= E(\frac{\partial^3 L}{\partial\theta_1^3}) = \frac{2q(p-1)}{\theta_1^3} + \frac{2q}{(\theta_1 + p\theta_2)^3}, \\ L_{112} &= E(\frac{\partial^3 L}{\partial\theta_1^2\partial\theta_2}) = \frac{2pq}{(\theta_1 + p\theta_2)^3}, \\ L_{113} &= \cdots = L_{11(p+2)} = 0. \end{aligned}$$

이고 I_{11}은 I_2의 $(1,1)$원소이며 I^{ij}는

$$I_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2\theta_1^4}{q(p-1)} & -\frac{2\theta_1^2}{pq(p-1)} & \mathbf{0}' \\ -\frac{2\theta_1^2}{pq(p-1)} & \frac{2(\theta_1+p\theta_2)^2}{p^2 q} + \frac{2\theta_1^2}{p^2 q(p-1)} & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\theta_1}{q} I_p + \frac{\theta_2}{q} J_p \end{pmatrix}$$

의 (i,j)원소이다. 따라서 식(2.8)의 해는 임의의 $g(\theta_2, \cdots, \theta_{p+2})$에 대하여도 항상 성립함을 확인할 수 있으므로, 결과적으로 제2계확률일치사전분포는

$$\pi_M^{(2)}(\psi, \lambda, \boldsymbol{\eta}) \propto \psi^{-1} \cdot g(\lambda, \boldsymbol{\eta})$$

이 되므로 원래의 모수 $(\sigma^2, \sigma_\beta^2, \boldsymbol{\mu})$의 제2계확률일치사전분포는

$$\pi_M^{(2)}(\sigma^2, \sigma_\beta^2, \boldsymbol{\mu}) \propto (\sigma^2)^{-1} \cdot g(\sigma^2 + p\sigma_\beta^2, \boldsymbol{\mu}) \tag{2.9}$$

이 된다.

3. 사후분포

이 장에서는 2장에서 유도한 무정보 사전분포들에 대하여 각각의 σ^2에 대한 주변사후분포를 유도하고자 한다. 임의의 사전분포 π에 대하여 $(\sigma^2, \sigma_\beta^2, \boldsymbol{\mu})$의 사후분포는 다음과 같다.

$$\pi(\sigma^2, \sigma_\beta^2, \boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{y}) \propto l(\sigma^2, \sigma_\beta^2, \boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{y}) \cdot \pi(\sigma^2, \sigma_\beta^2, \boldsymbol{\mu}) \tag{3.1}$$

여기에서, $l(\sigma^2, \sigma_\beta^2, \boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{y})$는 식(2.1)에서의 우도함수이다.

이제, 무정보 사전분포 π_J, π_R, π_M에 대한 그 사후분포들이 적절한(proper) 분포인가를 확인하고자 한다. 확률일치사전분포 π_M에 대하여,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{R^p} l(\sigma^2,\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{y})\cdot\pi(\sigma^2,\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu})d\boldsymbol{\mu}d\sigma_\beta^2 d\sigma^2\\
&=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{R^p}(\sigma^2)^{-1}\cdot g(\sigma^2+p\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu})\cdot(\sigma^2)^{-\frac{q(p-1)}{2}}(\sigma^2+p\sigma_\beta^2)^{-\frac{q}{2}}\\
&\quad\times exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{p\sum_{j=1}^q(y_{.j}-y_{..})^2}{\sigma^2+p\sigma_\beta^2}+\frac{\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^q(y_{ij}-y_{i.}-y_{.j}+y_{..})^2}{\sigma^2}\\
&\quad+\frac{q\sum_{i=1}^p(y_{i.}-y_{..}-(\mu_i-\mu_.))^2}{\sigma^2}+\frac{pq(y_{..}-\mu_.)^2}{(\sigma^2+p\sigma_\beta^2)}\Big)\Big]d\boldsymbol{\mu}d\sigma_\beta^2 d\sigma^2 \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

을 $g(\sigma^2+p\sigma_\beta^2,\boldsymbol{\mu}) = h(\sigma^2+p\sigma_\beta^2)$이라 하고 $\boldsymbol{\mu}$에 대하여 적분한결과는

$$\begin{aligned}
&\int_{R^p}\exp\Big[-\frac{q}{2\sigma^2}\Big(\sum_{i=1}^p(y_{i.}-y_{..}-(\mu_i-\mu_.))^2+\frac{p\sigma^2}{\sigma^2+p\sigma_\beta^2}(y_{..}-\mu_.)^2\Big)\Big]d\boldsymbol{\mu}\\
&=\int_{R^p}\exp[-\frac{q}{2\sigma^2}\Big((\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{y})'(I_p-\frac{\sigma_\beta^2}{\sigma^2+p\sigma_\beta^2}J_p)(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{y})\Big)]d\boldsymbol{\mu}\\
&\propto (\sigma^2)^{\frac{p-1}{2}}(\sigma^2+p\sigma_\beta^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

이 된다. 그러므로 식(3.3)의 결과를 이용하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}
(3.2) &\propto \int_0^\infty\int_0^\infty(\sigma^2)^{-\frac{(p-1)(q-1)}{2}-1}(\sigma^2+p\sigma_\beta^2)^{-\frac{q-1}{2}}\cdot h(\sigma^2+p\sigma_\beta^2)\\
&\quad\times\exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2}\Big(S+\frac{\sigma^2}{\sigma^2+p\sigma_\beta^2}SS_\beta\Big)\Big]d\sigma_\beta^2 d\sigma^2. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

위 식(3.4)에서, $S=\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^q(y_{ij}-y_{i.}-y_{.j}+y_{..})^2$ 는 오차 제곱합(error sum of square), $SS_\beta = p\sum_{j=1}^q(y_{.j}-y_{..})^2$는 임의효과 제곱합(sum of squares due to random effects)이다. 식(3.4)에서 계산의 편의를 위해, $r=\frac{1}{\sigma^2}$, $w=\frac{\sigma^2}{\sigma^2+p\sigma_\beta^2}$이라 하면 $\sigma_\beta^2=\frac{1-w}{prw}$ 이고 $|J|=\frac{1}{pr^3w^2}$를 얻는다. 또한 $h(\sigma^2+p\sigma_\beta^2)=h(\frac{1}{rw})=(rw)^a$이라 하자.
그러면, $a>(3-q)/2$일때

$$\begin{aligned}
(3.2) &\propto \int_0^\infty r^{\frac{p(q-1)}{2}-2+a}e^{-\frac{S}{2}}\Big(\int_0^1 w^{\frac{q-5}{2}+a}e^{-\frac{SS_\beta}{2}w}dw\Big)dr\\
&< \int_0^\infty r^{\frac{p(q-1)}{2}-2+a}e^{-\frac{S}{2}}\Big(\int_0^\infty w^{\frac{q-5}{2}+a}e^{-\frac{SS_\beta}{2}w}dw\Big)dr\\
&\propto \int_0^\infty r^{\frac{p(q-1)-q-1}{2}}e^{-\frac{S}{2}}dr\\
&< \infty. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

제프리스사전분포 π_J 와 준거사전분포 π_R의 경우에도 위와 동일한 방법으로 확인할 수 있다.

다음으로 2장에서의 무정보 사전분포 π_J, π_R 그리고 π_M에 대하여 σ^2에 대한 주변사후밀도함수(marginal posterior densities)를 간단한 계산에 의하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

· 제프리스사전분포 π_J에 대한 주변사후확률밀도함수는

$$\pi_J(\sigma^2|\boldsymbol{y}) \propto (\sigma^2)^{-\frac{pq+2}{2}} e^{-\frac{S}{2\sigma^2}} \left(\int_0^1 w^{\frac{q-2}{2}} e^{-\frac{SS_\beta}{2\sigma^2}} dw \right),$$

· 준거사전분포 π_R에 대한 주변사후확률밀도함수는

$$\pi_R(\sigma^2|\boldsymbol{y}) \propto (\sigma^2)^{-\frac{pq-p+1}{2}} e^{-\frac{S}{2\sigma^2}} \left(\int_0^1 w^{\frac{q-2}{2}} e^{-\frac{SS_\beta}{2\sigma^2}} dw \right),$$

· $a > \frac{3-q}{2}$일 때, 확률일치사전분포 π_M에 대한 주변사후확률밀도함수는

$$\pi_M(\sigma^2|\boldsymbol{y}) \propto (\sigma^2)^{-\frac{p(q-1)}{2}-a} e^{-\frac{S}{2\sigma^2}} \left(\int_0^1 w^{\frac{q-5}{2}+a} e^{-\frac{SS_\beta}{2\sigma^2}} dw \right)$$

이 된다.

4. 실제 자료에서 사전분포의 선택

이 장에서는 두 개의 실제 자료를 이용하여 2장에서 제안한 무정보 사전분포의 선택에 대하여 다루고자 한다, 첫번째 자료(자료 1)는 Box와 Tiao(1973, p348, 표6.3.2)로 부터 얻어진 자료이고, 또 하나의 자료(자료 2)는 Sahai와 Ageel(2000, p158, 표3.7)로 부터 얻어진 자료이다. 위의 두 자료의 특징을 요약하면 다음 <표 4.1>과 같다.

표 4.1 두 실제자료의 요약

	(p,q)	S	SS_β	MSE
자료 1	(2, 8)	206.75	553.0	29.54
자료 2	(3, 4)	11.5	26.25	1.917

식(3.3), (3.4), (3.5)로 부터 자료 1과 자료 2에 대하여 사전분포 π_J, π_R 그리고 $\pi_M(a=0)$, $\pi_M(a=5)$에 대한 각각의 주변사후분포의 그래프가 그림 4.1과 그림 4.2에 나타나 있다.

다음으로 식(3.3), (3.4), (3.5)로 부터 자료 1과 자료 2에 대하여 σ^2에 대한 90%신용구간(credible interval)들이 <표 4.2>에 나타나 있다.

표 4.2 자료 1과 자료 2에 대하여 σ^2에 대한 90%신용구간

	자료 1		자료 2
MSE	29.54	MSE	1.917
π_J	(13.042, 69.1575)	π_J	(0.7368, 3.7859)
π_R	(21.4367, 119.8220)	π_R	(1.1395, 8.4209)
$\pi_M(a=0)$	(14.4719, 78.9652)	$\pi_M(a=0)$	(0.9120, 6.7200)
$\pi_M(a=1)$	(14.3127, 70.8863)	$\pi_M(a=3)$	(0.8779, 4.3087)
$\pi_M(a=2)$	(14.1040, 63.6123)	$\pi_M(a=4)$	(0.8678, 3.7440)
$\pi_M(a=5)$	(13.2861, 47.2838)	$\pi_M(a=5)$	(0.8201, 3.2925)

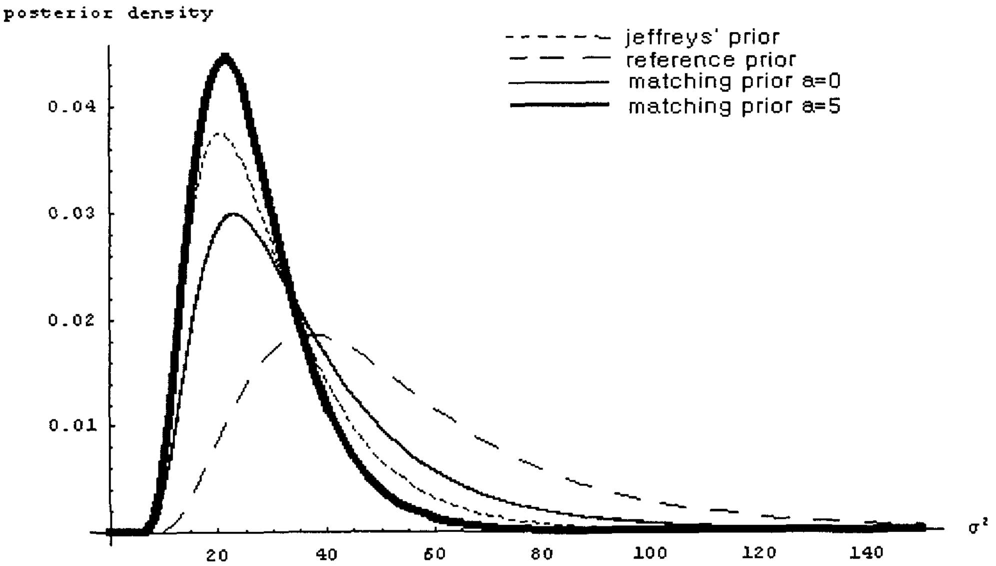

그림 4.1: 자료 1에 대한 주변사후분포

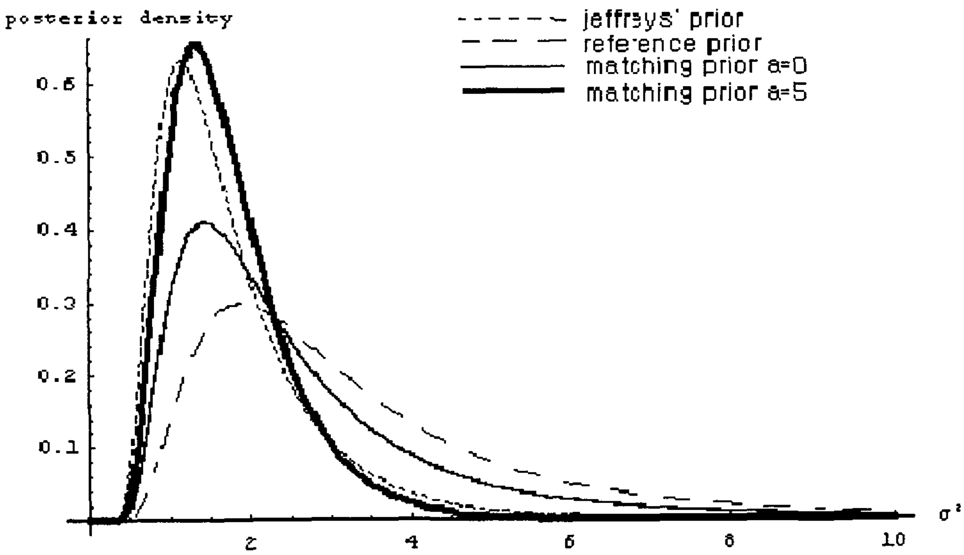

그림 4.2: 자료 2에 대한 주변사후분포

<표 4.2>로부터 $a > (3-q)/2$조건에서 자료 1의 경우에 $a \geq 2$일 때, 또 자료 2의 경우에서는 $a \geq 4$일 때 확률일치사전분포가 두 자료 모두에서 제프리스사전분포, 준거사전분포와 마찬가지로 평균제곱오차(MSE: mean squared error)를 포함하면서 더 짧은 신용구간(credible interval)을 제공한다는것을 알 수 있다. 따라서 반복이 같은 이원배치 혼합효과 분산분석모형에서 오차분산을 추정하고자할 때 이 두 가지 실제 자료의 경우에서는 제프리스사전분포나 준거사전분포보다는 확률일치사전분포를 권장할 수 있다.

참고문헌

[1] Berger, J. O. and Bernardo, J. M.(1989). Estimating a Product of Means ; Bayesian Analysis with Reference Priors, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 84, 200-207.

[2] Berger, J. O. and Bernardo, J. M.(1992). On the Development of Reference Priors (with discussion). *Bayesian Statistics 4 (Bernardo, J.M. et al., eds.).* Oxford Univ. Press, *Oxford*, 35-60.

[3] Box, G. E. P. and Tiao, G. C.(1973). *Bayesian Inference in statistical Analysis*, John Wiley and Sons, Inc. New York.

[4] Chung, Y. and Dey, D. K.(1998). Bayesian Approach to Estimation of Intraclass Correlation Using Reference Prior, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 27, 2241-2255.

[5] Cox, D. R. and Reid, N.(1987). Orthogonal Parameters and Approxiamte Conditional Inference (with dicussion), *J. Royal Statist. Soc. (Ser. B)*, 49, 1-39.

[6] Datta, G. S. and Ghosh, J. K.(1995). On Prior Providing Frequentist Validity for Bayesian Inference, *Biometrika*, 82, No.1, 37-45.

[7] Jeffreys, H. (1961). *Probability Theory.* Oxford Univ. Press, New York.

[8] Kim, D. H., Kang, S. G., and Lee, W. D.(2001). On Second Order Probability Matching Creterion in the One-Way Random Effect Model, *The Korean communications in Statistics*, Vol. 8, No. 2, 29-37.

[9] Sahai, H. and Ageel, M. I.(2000). *The Analysis of Variance*, Birkhauser, Boston.

[10] Tibshiriani, R.(1989). Noninformative Priors for one Parameter of Many. *Biometrika* 76, 604-608.

[11] Vounatsou, P. and Smith, A. F. M.(1997). Simulation-Based Bayesian Inference for Two-Variance Components Linear Models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 59, 139-161.

[12] Ye, K.(1994). Bayesian Reference Prior Analysis on the Ratio of Variances for the Balanced One-Way Random Effect Model, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 41, 267-280.

[2002년 8월 접수, 2002년 9월 채택]

Bayesian Analysis for the Error Variance in a Two-Way Mixed-Effects ANOVA Model Using Noninformative Priors

In Hong Chang [1] Byung Hwee Kim [2]

ABSTRACT

We consider the problem of estimating the error variance of in a two-way mixed-effects ANOVA model using noninformative priors. First, we derive Jeffreys' prior, a reference prior, and matching priors. We then provide marginal posterior distributions under those noninformative priors. Finally, we provide graphs of marginal posterior densities of the error variance and credible intervals for the error variance in two real data set and compare these credible intervals.

Keywords: Error variance; Jeffreys' prior; Reference prior; Probability matching prior, Two-way mixed-effects ANOVA model.

1) Visiting Professor, Department of Applied Statistics, Konkuk University, Seoul, 143-701, Korea. E-mail:ihchang1@hanmail.net
2) Professor, Department of Mathematics, Hanyang University, Seoul, 133-791, Korea E-mail:bkim@hanyang.ac.kr