응용통계연구 제 15권 2호, 2002년, pp. 367-379

부분이면교배에서의 블록계획

손영남[1] 최규정[2]

요 약

본 연구에서는 부분이면교배에서 p개의 근교계통의 일반조합능력을 비교하기 위한 불완비 블록계획을 구성하는 방법을 제시한다. 부분이면 블록계획은 블록의 크기가 2 이면서 m개의 동반분류를 갖는 부분 균형 불완비 블록계획과 균형 불완비 블록계획을 이용하여 구성한다. 또한, $p \leq 24$일 때 이러한 방법으로 구성되는 블록계획의 효율성을 표로 제시한다.

주요용어: 완전이면교배, 부분이면교배, 일반조합능력, 부분 균형 불완비 블록계획, 균형 불완비 블록계획.

1. 서론

이면교배(diallel cross)계획은 식물의 육종실험에서 근교계통(inbred line)의 유전적 특성을 연구하는데 이용되는 짝짓기 계획(mating design)이다. 서로 다른 유전적인 특징을 갖는p 종의 근교계통에서 i번째 근교계통과 j번째 근교계통의 교배를 (i,j)로 나타내고 n_c를 실험에 이용되는 서로 다른 교배의 수라 하면 Griffing(1956)은 n_c에 따라 4가지 형태의 완전이면교배(Complete Diallel Cross: CDC)계획을 정의하였다. $n_c = p(p-1)/2$인 완전이면교배에서 근교계통의 수 p가 커지게 되면 교배의 수가 급격히 증가되어 모든 교배를 실험하는 CDC 계획이 현실적이지 못한 경우가 발생된다. 이러한 상황에서 $p(p-1)/2$개의 교배 중에서 $ps/2(s < p-1$, s는 각 근교계통이 다른 근교계통과 만나는 횟수)개의 교배만를 실험하여 p개의 근교계통의 일반조합능력(general combining ability : gca)를 비교하는데 우리는 이를 부분이면교배(Partial Diallel Cross : PDC)라 한다.

이면교배에서 교배의 수가 너무 클 때 블록계획으로 완전확률화 블록(completely randomized block)계획을 사용한 실험은 비효율적인 실험이 될 수 있으므로 불완비 블록(incompletely randomized block)계획이 이용되는데 PDC 계획의 구성에 있어서 불완비 블록계획을 사용한 연구로는 Agarwal 과 Das(1990), Singh 과 Hinkelmann (1995,1998), Gupta, Das와 Kageyama(1995), 그리고 Ghosh와 Divecha(1997)등이 있다. Agarwal 등(1990)은 부분균형 $n-ary$계획과 균형불완비 블록(Balanced Incomplete Block: BIB)계획을 이용하여 PDC 계획을 설계하였고, Hinkelmann (1995)은 부분균형 불완비 블록계획에서 교배를 처리로 간주

1) (501-759) 광주광역시 동구 서석동 375, 조선대학교 부설 통계연구소, 전임연구원
E-mail: syn2000@netian.com.
2) (501-759) 광주광역시 동구 서석동 375, 조선대학교 자연과학대학 전산통계학과, 교수
E-mail: kjchoi@mail.chosun.ac.kr.

하여 PDC 계획을 구성하였다. Gupta(1995)등은 순환적(circulant) 방법을 사용하여 각 교배가 한번씩 반복되는 직교블록계획을 제시하였고 Ghosh(1997)등은 두 개의 동반관계를 갖는 부분균형 불 완비 블록계획을 이용하여 PDC 계획을 설계하였다.

본 연구에서는 교배를 형성하는 계획으로 블록의 크기가 2이면서 m개의 동반분류를 갖는 부분균형 불완비 블록 (m-associate class Partially Balanced Incomplete Block : PBIB(m)) 계획과 PBIB(m)계획에서 형성된 서로 다른 교배를 블록에 배치하는 계획으로 균형 불완비 블록 계획을 적용한 불완비 블록 PDC 계획을 설계하는 방법과 이들 계획의 효율성을 제시한다. 이를 위해서 2절에서는 PBIB(m) 계획과 BIB 계획을 이용하여 불완비 블록 PDC 계획을 구성하는 일반적인 방법과 그룹분류가능(group divisible : GD) PBIB (2), rectangular PBIB(3) 그리고 generalized right angular PBIB(4) 계획으로부터 유도되는 불 완비 블록 PDC 계획을 살펴보고 3절에서는 2절에서 구성되는 불완비 블록 PDC 계획의 효율성을 유도하며 $p \leq 24$일 때, 블록계획의 효율성을 표로 제시한다.

2. 모형과 블록계획의 구성방법

$ps/2$개의 서로 다른 교배를 블록의 크기가 k인 b개의 블록에 배치하는 이면교배실험에서 n을 실험에 이용되는 교배의 총 수라 하면 모형(Singh과 Hinkelmann, 1995)은 아래와 같이 정의된다.

$$Y = \mu 1_n + \Delta_1 g + \Delta_2 \beta + \varepsilon \tag{2.1}$$

여기서 Y는 $n \times 1$ 관찰 값 벡터이고 μ는 전체평균, 1_n은 모든 요소가 1인 $n \times 1$ 벡터를 나타낸다. 또한 $g = (g_1, g_2, \dots, g_p)'$와 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b)'$는 각각 gca효과 벡터와 블록효과 벡터를 나타내며 Δ_1, Δ_2는 p개의 gca와 b개의 블록에 대응하는 계획행렬이고 ε은 평균이 0, 분산이 σ^2인 $n \times 1$ 오차항 벡터이다. 모형(2.1)에서 gca 효과벡터 g를 추정하기 위한 정보행렬 C는 다음과 같이 정의된다.

$$C = (c_{ij}) = G - \frac{1}{k} N N' \tag{2.2}$$

여기서 r_i를 i번째 근교계통의 반복수, $r_{ij}, i < j = 1, 2, \dots, p$를 교배$(i,j)$의 반복 수라 할 때 $G = (g_{ij})$는 대칭행렬로서 $g_{ii} = r_i, g_{ij} = r_{ij}$ 이고 $N = \Delta_1' \Delta_2$는 $p \times b$ 근교계통-블록 빈도행렬을 나타낸다.

m-동반분류를 갖는 부분균형 불완비 블록계획과 균형 불완비 블록계획을 이용하여 PDC계획을 설계하는 방법을 살펴보면 다음과 같다. 먼저 (2.3)과 같은 모수를 갖는 PBIB(m) 계획 D_1이 존재하고

$$v_1 = p, b_1, r_1, k_1 = 2, \lambda_s = 1, \lambda_l = 0, (l \neq s) = 1, 2, \dots, m, \tag{2.3}$$

모수가 $v_2 = b_1, b_2, r_2, k_2, \lambda$인 BIB 계획 D_2가 존재한다고 하자. 블록의 크기가 2인 계획 D_1에서 b_1개의 각 블록을 하나의 교배로 간주한 다음, b_1개의 교배에 대해서 순서번호로서 1부터 b_1까지를 차례대로 부여한다. 그런 다음, 처리 수가 b_1인 계획 D_2에서 각 블록에 나

타난 처리를 D_1의 순서번호에 대응하는 교배로 대체하면 아래와 같은 모수를 갖는 PDC 계획 D가 구성된다.

$$p, n_c = b_1, b = b_2, r_c = r_2, k = k_2 \tag{2.4}$$

예제 2.1: $p = 6$일 때 $v_1 = p = 2 \cdot 3 = 6, b_1 = 6, r_1 = 2, k_1 = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_l = 0$인 그룹분류가능 PBIB(2)계획 D_1과 $v_2 = b_1 = 6, b_2 = 10, r_2 = 5, k_2 = 3, \lambda = 2$인 BIB 계획 D_2를 이용하여 모수가 $p = 6, n_c = 6, b = 10, r_c = 5, k = 3$인 PDC 계획 D를 구성하면 아래와 같다. 먼저 계획 D_1과 D_2를 구성하면 다음과 같은 블록을 갖는다.

$D_1 : \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\},$
$D_2 : \{1,2,5\}, \{2,3,6\}, \{3,4,2\}, \{4,1,3\}, \{2,5,4\},$
$\{3,5,6\}, \{4,6,5\}, \{1,2,6\}, \{5,1,3\}, \{6,4,1\}.$

계획 D_1에 있는 6개의 블록 각각을 하나의 교배로 간주한 다음, 이들 교배에 순서번호로서 1 부터 6 까지를 부여한다. 그런 다음, D_2의 각 각 블록에 나타나는 처리번호를 D_1의 순서번호에 대응하는 교배로 대체하면 다음과 같은 블록을 갖는 PDC 계획 D가 구성된다.

$\{(1,2),(1,3),(4,6)\}, \{(1,3),(2,3),(5,6)\}, \{(2,3),(4,5),(1,3)\},$
$\{(4,5),(1,2),(2,3)\}, \{(1,3),(4,6),(4,5)\}, \{(2,3),(4,6),(5,6)\},$
$\{(4,5),(5,6),(4,6)\}, \{(1,2),(1,3),(5,6)\}, \{(4,6),(1,2),(2,3)\},$
$\{(5,6),(4,5),(1,2)\}.$

정리 2.1 계획 D_1과 D_2로부터 구성되는 PDC 계획 D의 $NN' = (\lambda_{ij})$은 아래와 같은 요소를 갖는다.

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} r_1(r_2 - \lambda) + \lambda r_1^2, & i = j\text{인 경우} \\ \lambda(r_1^2 - 1) + r_2, & i, j(i \neq j)\text{가 } s\text{번째 동반관계에 있는 경우} \\ \lambda r_1^2, & i, j(i \neq j)\text{가 } l(\neq s)\text{번째 동반관계에 있는 경우 .} \end{cases}$$

증명: PDC 계획 D에서 임의의 서로 다른 두 근교계통을 β, γ라 할 때, NN'의 비 대각요소는 β, γ가 동일한 블록에 나타나는 횟수이므로 이를 $\lambda_{\beta,\gamma}$라 하자. 먼저 β, γ가 s번째 동반관계에 있을 때 $\lambda_{\beta,\gamma}$를 구하면 다음과 같다. 계획 D_1에서 $\lambda_s = 1$이므로 β, γ는 계획 D_1의 한 블록에서만 나타나는데 이 블록을 $g_{\beta,\gamma}$라 하자. $r_1 \geq 2$인 경우에서 $g_\beta(g_\gamma)$를 계획 D_1에서 $\beta(\gamma)$가 $\gamma(\beta)$ 이외의 다른 처리와 함께 나타나는 블록 집합이라 할 때 g_β와 g_γ에 각각 $r_1 - 1$개의 블록이 존재한다. $g_{\beta,\gamma}$와 g_β 그리고 g_γ에 속하는 $2r_1 - 1$개의 블록 중에서 임의의 두 블록을 g_1, g_2라 하면 계획 D의 구성방법으로부터 g_1, g_2가 계획 D에서 동시에 나타나는 블록 수는 λ이고 $g_{\beta\gamma}$는 r_2개의 블록에 나타난다. $\lambda_{\beta,\gamma}$를 계산하기 위해서 $(g_1, g_2) \in (g_{\beta\gamma}, g_\beta, g_\gamma)$에 대해서 다음과 같은 4가지 경우를 고려하자.

(i) g_1, g_2 모두 g_β 또는 g_γ에 속하는 경우,
(ii) g_1이 g_β, g_2가 g_γ에 속하는 경우,
(iii) g_1이 g_β에 속하고 $g_2 = g_{\beta\gamma}$인 경우,
(iv) g_1이 g_γ에 속하고 $g_2 = g_{\beta\gamma}$인 경우.

(i)의 경우, $g_\beta(g_\gamma)$에 속하는 r_1-1개의 블록들은 $\gamma(\beta)$를 포함하고 있지 않기 때문에 β,γ는 동일한 블록에 한번도 나타나지 않는다.
(ii)의 경우, g_1,g_2는 계획 D에서 동시에 λ번 나타나고 이러한 g_1,g_2쌍이 $(r_1-1)^2$개 존재하므로 β,γ는 계획 D에서 $\lambda(r_1-1)^2$번 나타난다.
(iii)의 경우, g_1,g_2는 계획 D에서 동시에 λ번 나타나고 이러한 g_1,g_2쌍이 r_1-1개 존재하므로 β,γ는 계획 D에서 $\lambda(r_1-1)$번 나타난다.
(iv)의 경우는 (iii)의 경우처럼 β,γ가 계획 D에서 $\lambda(r_1-1)$번 나타난다.
위의 사실로부터 s번째 동반관계에 있는 두 근교계통 β,γ가 계획 D의 동일한 블록에 나타나는 횟수는 아래의 (2.5)와 같다.

$$\lambda_{\beta,\gamma}=r_2+\lambda(r_1-1)^2-2\lambda(r_1-1)=\lambda(r_1^2-1)+r_2. \tag{2.5}$$

다음으로 β,γ가 $l[(l\neq s)=1,2,\ldots,m]$번째 동반관계에 있을 때 $\lambda_s=1$인 경우에서처럼 $\lambda_{\beta,\gamma}$를 구할 수 있다. $\lambda_l=0$이므로 계획 D_1에서 β,γ는 어떠한 블록에도 나타나지 않으므로 위의 (i), (iii), (iv)의 경우에서 β,γ는 계획 D에서 동일한 블록에 한번도 나타나지 않는다. (ii)의 경우에서는 $\beta(\gamma)$가 $\gamma(\beta)$ 이외의 다른 처리와 함께 나타나는 블록 수가 r_1이고 g_1,g_2가 계획 D에서 함께 나타나는 블록 수는 λ, g_1,g_2쌍은 r_1^2이므로 $\lambda_{\beta,\gamma}$는 아래의 (2.6)과 같다.

$$\lambda_{\beta,\gamma}=\lambda_1^2 \tag{2.6}$$

마지막으로 NN'의 대각요소를 다음과 같이 구할 수 있다. (2.2)의 $G=(g_{i,j})$는 계획 D의 구성방법으로부터 g_{ii}이고 $i,j(i\neq j)$가 s번째 동반관계에 있을 때 $g_{ij}=r_2$, $i,j(i\neq j)$가 $l(\neq s)$번째 동반관계에 있을 때 $g_{ij}=0$이므로 (2.5)와 (2.6) 그리고 $C1_p=\mathbf{0}$,$r_1p=2b_1$, $\lambda(b_1-1)=r_2(k_2-1)$을 이용하면 NN'의 대각요소가 $r_1(r_2-\lambda)+\lambda_1^2$임을 알 수 있다.

□

아래의 2.1절 - 2.3절은 교배를 형성하는 계획 D_1이 GD PBIB(2), Rectangular PBIB(3) 그리고 Generalized Right Angular PBIB(4) 계획일 때 λ_i에 따라 우리가 구성할 수 있는 PDC 계획을 나타낸 것이다.

2.1. GD PBIB(2)를 이용한 PDC 계획

$p=s_1s_2$개의 근교계통을 각 그룹의 크기가 s_2인 s_1개의 그룹에 배열할 때 아래의 모수를 갖는 PBIB(2) 계획 D_1이 존재하므로 BIB 계획 D_2가 존재하면 PDC 계획 D가 구성된다.

i) $\lambda_1=1,\lambda_2=0$일 때
$D_1: v_1=p=s_1s_2(s_2>2), b_1=s_1s_2(s_2-1)/2, r_1=s_2-1, k_1=2,$
$D_2: v_2=s_1s_2(s_2-1)/2, b_2, r_2, k_2, \lambda,$
$D: p, n_c=s_1s_2(s_2-1)/2, b=b_2, r_c=r_2, k=k_2.$

ii) $\lambda_1=0,\lambda_2=1$일 때

$D_1 : v_1 = p = s_1s_2, b_1 = s_1s_2s_2^2/2, r_1 = (s_1-1)s_2, k_1 = 2,$
$D_2 : v_2 = s_1(s_1-1)s_2^2/2, b_2, r_2, k_2, \lambda,$
$D : p, n_c = s_1(s_1-1)s_2^2/2, b = b_2, r_c = r_2, k = k_2.$

2.2. Rectangular PBIB(3)을 이용한 PDC 계획

$p = s_1s_2$개의 근교계통을 s_1개의 행과 s_2개의 열에 배열할 때 아래의 모수를 갖는 PBIB(3) 계획 D_1이 존재하므로 BIB 계획 D_2가 존재하면 PDC 계획 D가 구성된다.

i) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$일 때
$D_1 : v_1 = p = s_1s_2, b_1 = s_1s_2(s_2-1)/2, r_1 = (s_2-1), k_1 = 2,$
$D_2 : v_2 = s_1s_2(s_1-1)/2, b_2, r_2, k_2, \lambda,$
$D : p, n_c = s_1s_2(s_1-1)/2, b = b_2, r_c = r_2, k = k_2.$

ii) $\lambda_2 = 1, \lambda_1 = \lambda_3 = 0$일 때
$D_1 : v_1 = p = s_1s_2, b_1 = s_2s_1(s_1-1)/2, r_1 = (s_1-1), k_1 = 2,$
$D_2 : v_2 = s_2s_2(s_1-1)/2, b_2, r_2, k_2, \lambda,$
$D : p, n_c = s_2s_1(s_1-1)/2, b = b_2, r_c = r_2, k = k_2.$

iii) $\lambda_3 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$일 때
$D_1 : v_1 = p = s_1s_2, b_1 = s_1s_2(s_1-1)(s_2-1)/2, r_1 = (s_1-1)(s_2-1), k_1 = 2,$
$D_2 : v_2 = s_1s_2(s_1-1)(s_2-1)/2, b_2, r_2, k_2, \lambda,$
$D : p, n_c = s_1s_2(s_1-1)(s_2-1)/2, b = b_2, r_c = r_2, k = k_2.$

2.3. Generalized Right Angular PBIB(4)를 이용한 PDC 계획

$p = s_1s_2s_3$개의 근교계통을 3중 쌍 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(\alpha_1 = 1, 2, \ldots, s_2; \alpha_2 = 1, 2, \ldots, s_1; \alpha_3 = 1, 2, \ldots, s_3)$으로 나타낼 때 아래의 모수를 갖는 PBIB(4) 계획 D_1이 존재하므로 BIB 계획 D_2가 존재하면 PDC 계획 D가 구성된다.

i) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$일 때
$D_1 : v_1 = p = s_1s_2s_3, b_1 = s_1s_2(s_3-1)s_3/2, r_1 = (s_3-1), k_1 = 2,$
$D_2 : v_2 = s_1s_2(s_3-1)s_3/2, b_2, r_2, k_2, \lambda,$
$D : p, n_c = s_1s_2(s_3-1)s_3/2, b = b_2, r_c = r_2, k = k_2.$

ii) $\lambda_2 = 1, \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$일 때
$D_1 : v_1 = p = s_1s_2s_3, b_1 = (s_1-1)s_1s_2s_3^2/2, r_1 = (s_1-1)s_3, k_1 = 2,$
$D_2 : v_2 = (s_1-1)s_1s_2s_3^2/2, b_2, r_2, k_2, \lambda,$
$D : p, n_c = (s_1-1)s_1s_2s_3^2/2, b = b_2, r_c = r_2, k = k_2.$

iii) $\lambda_3 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$일 때
$D_1 : v_1 = p = s_1s_2s_3, b_1 = s_1(s_2-1)s_2s_3^2/2, r_1 = (s_2-1)s_3, k_1 = 2,$
$D_2 : v_2 = s_1(s_2-1)s_2s_3^2/2, b_2, r_2, k_2, \lambda,$

$D: p, n_c = s_1(s_2-1)s_2 s_3^2/2, b = b_2, r_c = r_2, k = k_2$.

iv) $\lambda_4 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$일 때
$D_1 : v_1 = p = s_1 s_2 s_3, b_1 = (s_1-1)(s_2-1)s_1 s_2 s_3^2/2, r_1 = (s_1-1)(s_2-1)s_3, k_1 = 2$,
$D_2 : v_2 = (s_1-1)(s_2-1)s_1 s_2 s_3^2/2, b_2, r_2, k_2, \lambda$,
$D: p, n_c = (s_1-1)(s_2-1)s_1 s_2 s_3^2/2, b = b_2, r_c = r_2, k = k_2$.

3. 블록계획의 효율성

2절의 PBIB(m)계획 D_1과 BIB계획 D_2로부터 구성되는 PDC 계획 D에서 (2.2)의 정보행렬의 일반화 역행렬을 $C_g^- = (c_g^{ij})$라 할 때, 두 근교계통의 gca 효과간의 차이분산은 (3.1)과 같다.

$$Var(\hat{g}_i - \hat{g}_j) = C_g^- \sigma^2 = (c_g^{ii} + c_g^{jj} - 2c_g^{ij})\sigma^2 = v_{ij}\sigma^2 \tag{3.1}$$

블록의 수가 r_2인 완전 확률화 블록 CDC계획을 D_0라 하면 D_0에 대한 PDC계획 D의 효율성 인자(e_D)는 아래와 같다.

$$e_D = \frac{Ave.Var(\hat{g}_i - \hat{g}_j)_{D_0}}{Ave.Var(\hat{g}_i - \hat{g}_j)_D} = \frac{p(p-1)}{\{r_2(p-2)\sum\sum_{i\neq j}\}} \tag{3.2}$$

CDC계획과 PDC(m) 계획 D에서 실험이 이루어지는 서로 다른 교배의 총 수가 다르기 때문에 이를 고려한 단위 교배 실험당 계획 D의 효율성 e_D^*는 아래와 정의된다(Singh과 Hinkelmann, 1998).

$$e_D^* = (p-1)e_D/r_1 \tag{3.3}$$

PDC 계획 D의 효율성을 계산하기 위해서 $C_g^- = (c_g^{ij})$를 구해야 하는데, 우리는 계획 D의 구성방법과 정리 2.1을 이용하면 계획 D의 정보행렬을 모수형태로 나타낼 수 있으므로 일반화 역행렬을 구할 수 있다. 아래에서는 2.1절 - 2.3절에서 구성되는 계획 D의 일반화 역행렬을 계획 D_1의 λ_i값에 따라서 모수 형태로 간단히 표현될 수 있는 경우만을 제시한 것이다.

정리 3.1 PDC 계획 D가 $\lambda_1 = 1, \lambda_l = 0(l = 2,3,4)$인 PBIB($m$) 계획 D_1과 BIB 계획 D_2로부터 구성될 때 $C_g^- = (c_g^{ij})$의 한 형태는 아래와 같은 요소를 갖는 행렬이다

$$c_g^{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_1 + n_1 a_2}{a_1^2 + (n_1+1)a_1 a_2}, & i = j\text{인 경우} \\ \dfrac{-a_2}{a_1^2 + (n_1+1)a_1 a_2}, & i,j(i \neq j)\text{가 첫 번째 동반관계에 있는 경우} \\ 0, & i,j(i \neq j)\text{가 첫 번째 동반관계에 있지 않은 경우} \end{cases}$$

여기서 $a_1 = (r_1-1)\{r_2 - k_2^{-1}(r_2-\lambda)\}, a_2 = r_2 - k_2^{-1}(r_2-\lambda)$ 이고 n_1은 계획 D_1에서 첫 번째 동반관계에 있는 근교계통의 수를 나타낸다. D_1이 GD PBIB(2), Rectangular PBIB(3) 그리고 Generalized Right Angular PBIB(4) 계획일 때 n_1은 각각 s_2-1, s_1-1, s_3-1이다.

증명: 부록참조.

정리 3.2 PDC 계획 D가 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$인 PBIB(2) 계획 D_1과 BIB 계획 D_2로부터 구성될 때 $C_g^- = (c_g^{ij})$의 한 형태는 아래와 같은 요소를 갖는 행렬이다

$$c_g^{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_1 + (s_2 - 1)a_2}{a_1^2 + s_2 a_1 a_2}, & i = j\text{인 경우} \\ \dfrac{-a_2}{a_1^2 + s_2 a_1 a_2}, & i, j(i \neq j)\text{가 첫 번째 동반관계에 있는 경우} \\ 0, & i, j(i \neq j)\text{가 두 번째 동반관계에 있는 경우} \end{cases}$$

여기서 $a_1 = k_2^{-1}(s_1 - 1)s_2\{r_2(k_2 - 1)\lambda\}, a_2 = k_2^{-1}\{r_2(1 - k_2) - \lambda\}$ 이다.

증명: 부록참조.

정리 3.3 PDC 계획 D가 $\lambda_2 = 1, \lambda_1 = \lambda_3 = 0$인 PBIB(3) 계획 D_1과 BIB 계획 D_2로부터 구성될 때 $C_g^- = (c_g^{ij})$의 한 형태는 아래와 같은 요소를 갖는 행렬이다

$$c_g^{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_1 + (s_2 - 2)a_2}{(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_2)a_2 s_2}, & i = j\text{인 경우} \\ \dfrac{-a_2}{(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_2)a_2 s_2}, & i, j(i \neq j)\text{가 두 번째 동반관계에 있는 경우} \\ 0, & i, j(i \neq j)\text{가 두 번째 동반관계에 있지 않는 경우} \end{cases}$$

여기서 $a_1 = (s_1 - 1)\{r_2 - k_2^{-1}(r_2 - \lambda)\}, a_2 = r_2 - k_2^{-1}(r_2 - \lambda)$ 이다.

증명: 부록참조.

(2.1)절 - (2.3)절의 PBIB(m)계획 D_1과 BIB 계획 D_2로부터 설계되는 PDC 계획의 효율성을 정리 3.1-3.3을 이용하여 구하면 아래와 같다

i) D_1이 $\lambda_1 = 1, \lambda_l = 0(l = 2, 3, 4)$인 PBIB($m$)인 경우

$$e_d = \frac{(p-1)\{a_1^2 + (n_1 + 1)a_1 a_2\}}{r_2(p-2)\{(p-1)a_1 + p n_1 a_2\}}$$

ii) D_1이 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$인 GD PBIB(2)인 경우

$$e_d = \frac{(p-1)(a_1^2 + s_2 a_1 a_2)}{r_2(p-2)\{(p-1)a_1 + p(s_2 - 1)a_2\}}$$

iii) D_1이 $\lambda_2 = 1, \lambda_1 = \lambda_3 = 0$인 Rectangular PBIB(3)인 경우

$$e_d = \frac{(p-1)(a_1 - a_2)\{(a_1 - a_2) + a_2 s_2)\}}{r_2(p-2)\{(p-1)a_1 + (s_1 - s_2 + 1)a_2 + p(s_2 - 2)\}}$$

아래의 <표 3.1> - <표 3.3>은 $p \leq 24$ 일 때, 2.1 절 - 2.3 절에서 유도되는 불완비 블록 PDC 계획 중에서 가장 효율성이 높은 계획만을 제시한 것이다. <표 3.1>, <표 3.2> 그리고 <표 3.3>은 계획 D_1이 각각 GD PBIB(2), Generalized Right Angular PBIB(4), Rectangular PBIB(3) 계획일 때의 효율성을 나타낸 표이다.

<표 3.1> PDC 계획 D의 효율성[GD PBIB(2)]

v_1	s_1	s_2	b_1	r_1	k_1	λ_1	λ_2	p	b	r_c	k	λ	e_D	e_D^*
6	2	3	6	2	2	1	0	6	6	5	5	4	0.282	0.706
8	2	4	12	3	2	1	0	12	22	11	6	5	0.335	0.781
10	2	5	20	4	2	1	0	20	38	19	10	9	0.382	0.859
12	2	6	30	5	2	1	0	30	58	29	15	14	0.408	0.899
14	2	7	42	6	2	1	0	42	82	41	21	20	0.426	0.922
16	2	8	56	7	2	1	0	56	70	15	12	3	0.416	0.891
9	3	3	9	2	2	1	0	9	9	8	8	7	0.173	0.692
12	3	4	18	3	2	1	0	18	34	17	9	8	0.214	0.785
15	3	5	30	4	2	1	0	30	58	29	15	14	0.245	0.856
18	3	6	45	5	2	1	0	45	45	12	12	3	0.252	0.857
20	4	5	40	4	2	1	0	40	40	13	13	4	0.175	0.832
12	4	3	12	2	2	1	0	12	22	11	6	5	0.114	0.629
15	5	3	15	2	2	1	0	15	15	8	8	4	0.092	0.642
21	7	3	21	2	2	1	0	21	35	15	9	6	0.063	0.634
6	3	2	12	4	2	0	1	12	22	11	6	5	0.649	0.812
9	3	3	27	6	2	0	1	27	27	13	13	6	0.657	0.876
10	5	2	40	8	2	0	1	40	40	13	13	4	0.825	0.928
8	4	2	24	6	2	0	1	24	46	23	12	11	0.788	0.919

<표 3.2> PDC 계획 D의 효율성[Generalized Right Angular PBIB(4)]

v_1	s_1	s_2	s_3	b_1	r_1	k_1	λ_1	λ_l	p	b	r_c	k	λ	e_D	e_D^*
16	2	2	4	24	3	2	1	0	24	46	23	12	11	0.158	0.788
18	2	3	3	18	2	2	1	0	18	34	17	9	8	0.075	0.642
18	3	2	3	18	2	2	1	0	18	34	17	9	8	0.075	0.642
20	2	2	5	40	4	2	1	0	40	40	13	13	4	0.175	0.832
24	2	3	4	36	3	2	1	0	36	36	15	15	6	0.102	0.782
24	2	3	4	36	3	2	1	0	36	84	14	6	2	0.091	0.699
24	3	2	4	36	3	2	1	0	36	36	15	15	6	0.102	0.782
24	3	2	4	36	3	2	1	0	36	84	14	6	2	0.091	0.699
24	2	4	3	24	2	2	1	0	24	46	23	12	11	0.056	0.648
12	2	2	3	12	2	2	1	0	12	44	11	3	2	0.091	0.503
12	2	2	3	12	2	2	1	0	12	33	11	4	3	0.103	0.566
12	2	2	3	12	2	2	1	0	12	22	11	6	5	0.114	0.629

<표 3.3> PDC 계획 D의 효율성[Rectangular PBIB(3)]

v_1	s_1	s_2	b_1	r_1	k_1	λ_1	λ_2	λ_3	p	b	r_c	k	λ	e_D	e_D^*
8	2	4	12	3	2	1	0	0	12	22	11	6	5	0.335	0.781
9	3	3	9	2	2	1	0	0	9	9	8	8	7	0.173	0.692
10	2	5	20	4	2	1	0	0	20	38	19	10	9	0.382	0.859
12	3	4	18	3	2	1	0	0	18	34	17	9	8	0.214	0.785
12	4	3	12	2	2	1	0	0	12	22	11	6	5	0.114	0.629
14	2	7	42	6	2	1	0	0	42	82	41	21	20	0.426	0.922
16	4	4	24	3	2	1	0	0	24	46	23	12	11	0.158	0.788
16	2	8	56	7	2	1	0	0	56	70	15	12	3	0.416	0.891
15	3	5	30	4	2	1	0	0	30	58	29	15	14	0.245	0.856
18	3	6	45	5	2	1	0	0	45	45	12	12	3	0.252	0.857
15	5	3	15	2	2	1	0	0	15	15	8	8	4	0.092	0.642
18	6	3	18	2	2	1	0	0	18	34	17	9	8	0.075	0.642
21	7	3	21	2	2	1	0	0	21	35	18	9	6	0.063	0.629
24	8	3	24	2	2	1	0	0	24	46	23	12	11	0.056	0.648
20	5	4	30	3	2	1	0	0	30	58	29	15	14	0.125	0.790
24	6	4	36	3	2	1	0	0	36	46	23	12	11	0.102	0.780
9	3	3	9	2	2	0	1	0	9	9	8	8	7	0.173	0.692
12	3	4	12	2	2	0	1	0	12	22	11	6	5	0.109	0.598
12	4	3	18	3	2	0	1	0	18	34	17	9	8	0.22	0.808
15	3	5	15	2	2	0	1	0	15	15	8	8	4	0.084	0.589
18	3	6	18	2	2	0	1	0	18	34	17	9	8	0.067	0.572
21	3	7	21	2	2	0	1	0	21	35	15	9	6	0.055	0.553
24	3	8	24	2	2	0	1	0	24	46	23	12	11	0.048	0.556
20	4	5	30	3	2	0	1	0	30	58	29	15	14	0.122	0.772
24	4	6	24	3	2	0	1	0	24	46	23	12	11	0.098	0.748
15	5	3	30	4	2	0	1	0	30	58	29	15	14	0.253	0.885

참고문헌

[1] Agarwal, S.C. and Das, M.N.(1990). Incomplete block designs for partial diallel cross. *Sankhya*, Vol. **52**, Series B, 75-81.

[2] Dey, A.(1986). *Theory of Block Designs.* New York, Johne Wiley & Sons.

[3] Ghosh, D.K. and Divecha, J.(1997). Two associate class partially balanced incomplete block designs and partial diallel crosses. *Biometrika*, Vol. **84**, 245-248.

[4] Griffing, B.(1956). Concepts of general and specific combining ability in relation to diallel crossing systems. *Australian Journal of Biological Sciences*, Vol. **9**, 463-493.

[5] Gupta, S. and Kageyama, S.(1995). Single replication orthogonal block designs for partial diallel crosses. *Communications Statistics -Theory and Methods*, Vol. **24**, 2601-2607.

[6] Searle, R.(1982). *Matrix Algebra useful for Statistics*, New York, Wiley.

[7] Singh, M. and Hinkelmann, K. (1995). Partial Diallel Crosses in Incomplete Blocks. *Biometrics*, Vol. **51**, 1302-1314.

[8] Singh, M. and Hinkelmann, K.(1998). Analysis of partial diallel crosses in incomplete blocks. *Biometrical Journal*, Vol. **40**, 165-181.

[2002년 1월 접수, 2002년 7월 채택]

부록 : 정리 3.1-정리 3.3 증명

3절의 정리 3.1-3.3을 증명하기 위해서 아래와 같은 보조정리를 이용한다.

보조정리 A.1: $H_nJ_n = \mathbf{0} = J_nH_n$일 때 $\mid H_n + \omega J_n \mid \neq 0$이면 $(H_n + \omega J_n)^{-1}$은 H_n의 일반화 역행렬이다(Searle, 1982, p. 225).

보조정리 A.2: 행렬 R과 S의 행렬식이 모두 0이 아닐 때

$$\begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ X & S \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} & \mathbf{0} \\ -S^{-1}XR^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}$$

이다(Searle, 1982, p. 260).

보조정리 A.3:

$$(a_1I_n + a_2J_n)^{-1} = \frac{1}{a_1}(I_n - \frac{a_2}{a_1 + na_2}J_n)$$

이다(Searle, 1982, p. 132).

보조정리 A.4: 행렬 A와 B의 행렬식이 모두 0이 아닐 때 $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ 이다(Searle, 1982, p. 265). 여기서 $\otimes$는 행렬의 크로네커 곱(Kronecker product)을 나타낸다.

정리 3.1 증명: 계획 D의 정보행렬 C에서 G 행렬과 NN' 행렬을 아래와 같이 분할하자.

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & \cdots & G_2 \\ G_2 & G_1 & \cdots & G_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_2 & G_2 & \cdots & G_1 \end{bmatrix}, NN' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_2 \\ A_2 & A_1 & \cdots & A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_2 & A_2 & \cdots & A_1 \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

계획 D의 구성방법과 정리 2.1에 의해서 (A.1)의 G_1, G_2 그리고 A_1, A_2는 각각 아래와 같이 표현되는 $(n_1+1) \times (n_1+1)$ 행렬이며 G_1과 N_1은 각각 G와 NN'에서 $p/(n_1+1)$번 나타난다.

$G_1 = r_2(r_1 - 1)I_{n_1+1} + r_2J_{n_1+1}, G_2 = \mathbf{0},$

$A_1 = (r_1 - 1)(r_2 - \lambda)I_{n_1+1} + \{\lambda(r_1^2 - 1) + r_2\}J_{n_1+1}, A_2 = \lambda r_1^2 J_{n_1+1}$

여기서 $\mathbf{0}$은 모든 요소가 0인 행렬이고 I_{n_1+1}는 단위행렬, J_{n_1+1}는 모든 요소가 1인 행렬을 나타낸다. (A.1)을 이용하여 C_1과 C_2를 아래와 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} C_1 &= G_1 - k_2^{-1}A_1 \\ &= [r_2(r_1 - 1) - k_2^{-1}(r_1 - 1)(r_2 - \lambda)]I_{n_1+1} + [r_2 - k_2^{-1}\{\lambda(r_1^2 - 1) + r_2\}]J_{n_1+1}, \\ C_2 &= -k_2^{-1}A_2 = -k_2^{-1}\lambda r_1^2 J_{n_1+1}. \end{aligned}$$

위의 C_1과 C_2를 이용하여 계획 D의 정보행렬 C를 나타내면 아래와 같다.

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_2 \\ C_2 & C_1 & \cdots & C_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_2 & C_2 & \cdots & C_1 \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

(A.2)의 양변에 $k_2^{-1}\lambda r_1^2 J_p$를 더하면

$$C + k_2^{-1}\lambda r_1^2 J_p = \begin{bmatrix} C_1 - C_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_1 - C_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & C_1 - C_2 \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

이고 $| C + k_2^{-1}\lambda r_1^2 J_p | \neq 0$ 이므로 보조정리 A.1에 의해서 C_g^-의 한 형태는 (A.3)의 역행렬과 같다. 보조정리 A.2에 따라

$$\begin{aligned} (C_1 - C_2)^{-1} &= [\{r_2(r_1-1) - k_2^{-1}(r_1-1)(r_2-\lambda)\}I_{n_1+1} + \{r_2 - k_2^{-1}(r_2-\lambda)\}j_{n_1+1}]^{-1} \\ &= \frac{1}{a_1}I_n - \frac{a_2}{a_1^2 + (n_1+1)a_1a_2}J_n \end{aligned}$$

이다. 따라서 윗 식과 보조정리 A.3을 이용하면 정리 3.1이 성립함을 알 수 있다.

정리 3.2 증명: (A.1)과 같은 G 행렬과 NN' 행렬에서 $G_1 = r_1r_2I_{s_2} = (s_1-1)s_2r_2I_{s_2}, G_2 = r_2J_{s_2}$ 이고 $A_1 = r_1(r_2-\lambda)I_{s_2} + \lambda r_1^2 J_{s_2} = (s_1-1)s_2(r_2-\lambda)I_{s_2} + \lambda(s_1-1)^2s_2^2J_{s_2}, A_2 = \{\lambda(r_1^2-1)+r_2\}J_{s_2} = [\lambda\{(s_1-1)^2s_2^2-1\}+r_2]J_{s_2}$ 이다. G_1, G_2, A_1 그리고 A_2 행렬을 이용하여 (A.2)의 C_1과 C_2행렬을 나타내면

$$\begin{aligned} C_1 &= k_2^{-1}\{r_1r_2(k_2-1) + \lambda r_1\}I_{s_2} - k_2^{-1}\lambda J_{s_2} \\ &= k_2^{-1}\{(s_1-1)s_2r_2(k_2-1) + \lambda(s_1-1)s_2\}I_{s_2} - k_2^{-1}\lambda(s_1-1)^2s_2^2J_{s_2}, \\ C_2 &= -k_2^{-1}\{\lambda(r_1^2-1) + r_2(1-k_2)\}J_{s_2} \\ &= -k_2^{-1}[\lambda\{(s_1-1)^2s_2^2-1\} + r_2(1-k_2)]J_{s_2} \end{aligned}$$

이다. 위의 C_1, C_2행렬로 이루어진 C행렬에 $k_2^{-1}[\lambda\{(s_1-1)^2s_2^2-1\} + r_2(1-k_2)]J_p$를 더한 다음, 보조정리 A.1, A.2 그리고 A.3을 이용하면 C_g^-의 한 형태가 정리 3.2와 같음을 알 수 있다.

정리 3.3 증명: (A.1)과 같은 G와 NN'행렬에서 $G_1 = r_1r_2I_{s_2}, G_2 = r_2I_{s_2}$ 이고 $A_1 = r_1(r_2-\lambda)I_{s_2} + \lambda r_1^2J_{s_2} = (s_1-1)(r_2-\lambda)I_{s_2} + \lambda(s_1-1)^2J_{s_2}, A_2 = (r_2-\lambda)I_{s_2} + \lambda r_1^2J_{s_2} = (r_2-\lambda)I_{s_2} + \lambda(s_1-1)^2J_{s_2}$ 이다. $C_1 = G_1 - k_2^{-1}A_1$과 $C_2 = G_2 - k_2^{-1}A_2$로 표현되는 C의 양변에 $k_2^{-1}\lambda(s_1-1)^2J_p$를 더하면 $C + k_2^{-1}\lambda(s_1-1)^2J_p = [(a_1-a_2)I_{s_2} + a_2J_{s_2}] \otimes I_{s_1}$이다. $| C + k_2^{-1}\lambda(s_1-1)^2J_p | \neq 0$이므로 보조정리 A.1과 A.4에 의해서 $C_g^- = [(a_1-a_2)I_{s_2} + a_2J_{s_2}]^{-1} \otimes I_{s_1}^{-1}$ 이다. 따라서 보조정리 A.3에 의해서

$$C_g^- = [\frac{1}{(a_1-a_2)}I_{s_2} - \frac{a_2}{(a_1-a_2)^2 + (a_1-a_2)a_2s_2}J_{s_2}] \otimes I_{s_1}$$

이므로 $C_g^- = (c_g^{ij})$의 한 형태가 정리 3.3과 같음을 알 수 있다.

Block Designs for Partial Diallel Crosses

Young Nam Son [1)] Kuey Chung Choi [2)]

ABSTRACT

In this paper, the method of constructing incomplete block designs for comparing general combining abilities of p inbred lines for partial diallel crosses is proposed. These partial diallel crosses block designs are constructed by using m-associate class partially balanced incomplete block designs with block size 2 and balanced incomplete block designs. Also, the efficiencies of block designs obtained through this method are tabulated for number of lines 24 or less.

Keywords: complete diallel crosses, partial diallel crosses, general combining ability, partially balanced incomplete block designs, balanced incomplete block designs.

1) Researcher, The Research Institute of Statistics Chosun University, Gwangju 501-759, Korea
E-mail: syn2000@netian.com.

2) Professor, Dept. of Computer Science and Statistics, Gwangju 501-759, Korea
E-mail: kjchoi@mail.chosun.ac.kr.