응용통계연구 제 **15**권 2호, 2002년, pp. 297-310

범주형 반복측정자료를 위한 일반화 추정방정식의 소표본 특성 *

김동욱[1) 김재직[2)

요 약

Liang과 Zeger는 이산형 혹은 연속형 반복측정자료를 분석하기 위한 일반화 추정방정식(GEE)을 제안하였다. GEE모형은 범주형 반복측정자료의 모형으로 확장될 수 있으며, 이 GEE추정량은 대표본인 경우 다변량 정규분포를 따른다. 그러나 GEE는 대표본 근사이론에 기초한다. 본 논문에서는 소표본인 경우 반복 측정된 순서자료에 대한 GEE 추정량의 성질을 연구한다. 우리는 두가지 방법을 사용하여 두그룹의 반복 측정된 순서자료를 생성하며 모의실험을 통하여 소표본인 경우 여러 개 범주를 갖는 순서반응 자료에 대하여 GEE추정량의 1종 오류율, 검정력, 상대효율, 두 그룹의 표본크기가 다를 경우 효과, 그리고 분산 추정량의 성질 등을 연구한다.

주요용어 : 일반화 추정방정식, 반복측정, 순서자료, 소표본, 통계적 추론.

1. 서론

각 개체의 반응이 여러 시점에서 반복 측정된 다시점 자료(longitudinal data)인 경우, 동일 개체에 대하여 관찰값이 반복 측정되어 각 관찰값 사이에는 상관관계가 존재하게 된다. Liang과 Zeger(1986)는 이산형과 연속형인 다시점 자료의 분석에 Wedderburn(1974)이 제안한 유사우도함수(quasi-likelihood function)를 이용한 모형을 제안하였는데, 그것이 일반화 추정방정식(Generalized Estimating Equations : GEE)모형이며, Prentice(1988)에 의해 확장되었다.

GEE 모형은 관찰값들의 결합분포를 구체화시키지 않고 추정 방정식을 유도한다. 즉, 반응변수의 주변분포를 정의하고 반응변수들 간의 상관관계를 나타내는 상관행렬의 구조만 가정하여 모형의 회귀계수 추정값을 구한다. 또한 GEE로부터 구한 모수의 추정값은 연결함수(link function)가 정확할 때 일치추정량이 되고 근사적으로 정규분포를 따르게 된다.

이러한 GEE 모형은 이산형과 연속형 자료 모두에 대해 적용된다. Lipsitz, Laird, Harrington(1991)은 다른 두 시점의 이진자료(binary data) 사이의 관계에 대한 모형에서 상관계수 대신 odds ratio의 사용을 제안하였으며, 이진자료의 모의실험을 하였다. Lipsitz, Fitzmaurice, Orav, Laird(1994)는 반복측정된 이진자료에 대하여 모의실험을 통하여 제1종 오류율, 평균제곱오차, 검정력 등을 구하였다. 또한 Gunsolley, Getchell, Chinchilli(1995)는

* 이 논문은 성균관대학교의 1999년도 63학술연구비에 의하여 연구되었음.

1) (110-745) 서울특별시 종로구 명륜동 3가 53, 성균관대학교 통계학과, 부교수
E-mail: dkim@skku.ac.kr
2) (150-010) 서울특별시 영등포구 여의도동 16-2, 한국노동연구원, 연구원

이진자료의 반복측정자료를 갖는 두그룹에 대하여 제1종 오류율을 연구하였으며 베타-이항분포를 사용하여 자료를 생성하였다.

Miller, Davis, Landis(1993)는 이진자료에 대한 GEE모형을 다항자료(polytomous response variable)의 모형으로 확장하였으며, Lipsitz, Kim, Zhao(1994)도 이진자료에 대한 GEE 모형을 범주형 자료에 대한 GEE모형으로 확장하였다. Stiger, Kosinski, Barnhart, Kleinbaum(1998)은 다변량 정규분포를 이용한 순서자료를 생성하여 ANOVA, MANOVA, WLS와 GEE의 성질을 모의실험을 통하여 비교하였다.

반복측정된 범주형자료의 경우에도 역시 GEE모형의 모수 추정량은 대표본 성질에 의해 다변량 정규분포를 따르며 이 성질을 이용하여 회귀계수에 관한 통계적 추론을 한다. 그러나 소표본인 경우 대표본 근사가 얼마나 정확하게 적용되는지 의문이다. 이에 순서자료(ordinal data)이고 소표본인 경우 GEE 추정량의 성질을 1종 오류율, 검정력, 상대효율 측면에서 파악하고, GEE 추정량의 분산 추정량에 대해서 살펴본다.

본 논문에서는 순서자료에 대해 소표본인 경우 GEE 추정량의 성질을 연구한다. Gange (1995)의 알고리즘을 이용하여 회귀모수와 반복측정된 관찰값간의 상관행렬을 알고 있는 구조에서 상관된 순서자료를 생성할 수 있으며, 이를 이용하여 추정량의 효율성, 일치성 및 이론상의 근사적 분산 추정량의 계산을 용이하게 할 수 있다. 2절에서는 Lipsitz 등(1994)이 사용한 순서자료에 대한 GEE 모형의 확장에 대해 간략히 설명하고, 3절에서는 소표본인 경우 반복측정된 순서자료에 대해서 제1종 오류율, 검정력, 효율성, 그룹크기 효과, 분산추정량 등에 대한 GEE 추정량의 성질을 모의실험(simulation)을 통해 알아본다.

2. 반복측정된 순서자료에 대한 GEE 모형

Lipsitz 등(1994)은 이진자료에 대한 GEE모형을 범주형 자료에 대해 확장한 형태를 제안하였다. i번째 실험단위(subject) $(i = 1, \ldots, N)$의 t번째 반복 관찰 $(t = 1, \ldots, T_i)$에서 각 시점에서의 반응 수준이 $k(k = 1, \ldots, K)$이면, 관찰값 Y_{ikt}는 K개의 지시변수(indicator variable)로 나타낼 수 있다. 즉, i번째 실험단위가 시점 t에서 k수준의 반응을 보이면 $Y_{ikt} = 1$이며, 그렇지 않으면 $Y_{ikt} = 0$이다. 따라서 i번째 실험단위의 t시점에 대한 관찰값을 $\mathbf{Y}_{it} = [Y_{i1t}, \ldots, Y_{i(K-1)t}]^T$ 인 $(K-1) \times 1$의 벡터로 정의할 수 있다. 설명변수 벡터 $\mathbf{x}_{it}$ 를 $p \times 1$벡터라 하면, 실험단위 i에 대한 모든 설명변수의 행렬은 $T_i \times p$인 $\mathbf{X}_i = [\mathbf{x}_{i1}, \ldots, \mathbf{x}_{iT_i}]^T$이 된다. 또한, $\mathbf{Y}_{it}$의 주변분포는 다항분포로 가정하며, $\pi_{ikt} = \pi_{ikt}(\boldsymbol{\beta}) = \Pr[Y_{ikt} = 1|\mathbf{x}_{it}, \boldsymbol{\beta}]$는 i번째 실험단위가 t시점에서 k의 반응을 보일 확률이다. 또한 $\boldsymbol{\pi}_i$는 $T_i(K-1) \times 1$의 벡터이고 $\mathbf{Y}_i = [\mathbf{Y}_{i1}^T, \ldots, \mathbf{Y}_{iT_i}^T]^T$이다. 우리의 관심은 $(K-1) \times 1$벡터 $\mathbf{Y}_{it}$와 관련있는 $p \times 1$인 모수벡터 $\boldsymbol{\beta}$에 대한 추론에 있다. $\boldsymbol{\beta}$를 추정하기 위한 일반화 추정 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{U}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sum_{i=1}^{N} \hat{\mathbf{D}}_i^T \ \hat{\mathbf{V}}_i^{-1}[\mathbf{Y}_i - \hat{\boldsymbol{\pi}}_i] = \mathbf{0} \tag{2.1}$$

여기서 $\mathbf{D}_i^T = \mathbf{D}_i(\boldsymbol{\beta})^T = d[\boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\beta})]^T/d\boldsymbol{\beta}$이고, $\mathbf{V}_i$는 $\mathbf{Y}_i$의 가공분산 행렬(working covariance matrix)이다. 즉, $\mathbf{V}_i \approx \mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i)$이다. $\boldsymbol{\beta}$ 추정시 효율성을 높이기 위해 참인 $\mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i)$에 근

접한 $\mathbf{V}_i$를 선택해야 한다. 가공분산 행렬 $\mathbf{V}_i$는 $\mathbf{V}_i' = \mathbf{A}_i^{1/2}\mathbf{R}_i(\alpha)\mathbf{A}_i^{1/2}$이다. 여기서, $\mathbf{A}_{it} = \mathrm{Diag}[\pi_{i1t}(1-\pi_{i1t}), \ldots, \pi_{i(K-1)t}(1-\pi_{i(K-1)t})]$이며 $\mathbf{A}_i = \mathrm{Diag}[\mathbf{A}_{i1}, \ldots, \mathbf{A}_{iT_i}]$ 이다. 또한 $\mathbf{R}_i(\alpha)$는 $\mathrm{Corr}(\mathbf{Y}_i)$에 대한 모형이며 장애모수 α에 대한 함수로 표시된다.

순서자료에 대한 GEE모형의 해 β를 구하는 과정은 연속형 반응변수나 이진반응변수의 경우와 마찬가지로 피셔-점수화(Fisher-scoring) 방법을 사용한다. GEE 모형을 이용하여 추정한 $\hat{\beta}$에 대해 $N^{1/2}(\hat{\beta}-\beta)$의 근사적 분포는 평균이 $\mathbf{0}$이고 분산공분산 행렬 $\mathbf{V}_\beta$가 다음과 같은 다변량 정규분포를 따른다 (Lipsitz, et al. (1994)).

$$\mathbf{V}_\beta = \lim_{N\to\infty} N\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{D}_i^T\mathbf{V}_i^{-1}\mathbf{D}_i\right)^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{D}_i^T\mathbf{V}_i^{-1}\mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i)\mathbf{V}_i^{-1}\mathbf{D}_i\right\}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{D}_i^T\mathbf{V}_i^{-1}\mathbf{D}_i\right)^{-1} \quad (2.2)$$

만약 $\mathbf{V}_i = \mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i)$이면, 식 (2.2)는 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{V}_\beta = \lim_{N\to\infty} N[\sum_{i=1}^{N}\mathbf{D}_i^T\mathbf{V}_i^{-1}\mathbf{D}_i]^{-1} \quad (2.3)$$

$\mathbf{V}_\beta$추정시 α와 β는 각각 추정값으로 대체되고, $\mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i)$는 $(\mathbf{Y}_i - \hat{\pi}_i)(\mathbf{Y}_i - \hat{\pi}_i)^T$로 대체되면 $\hat{\mathbf{V}}_\beta$은 일치 추정량이 된다. 식 (2.2)는 $\mathbf{V}_i$가 정확하게 구체화되지 않더라도 $\mathbf{V}_\beta$가 일치추정량이 되므로 로버스트(robust) 분산 추정량 행렬이라 한다. 그리고 식 (2.3)은 모형에 근거한(model-based) 분산 추정량 행렬이라고 한다.

3. GEE 추정량의 소표본 성질

GEE 추정량은 일치 추정량이고 대표본인 경우 추정량의 분포는 근사적으로 다변량 정규분포를 따르며, 그 추정량은 가상관행렬의 구조가 참된 상관구조가 아닐지라도 일치추정량이 된다. 그러나 우리는 다범주 자료 중 순서자료인 경우 모의실험을 통하여 표본이 작은 경우에 대해 GEE 추정량이 위의 특성을 얼마나 만족하는지 그리고, 만족하지 않는다면 표본크기가 어느 정도 되어야 만족하는지를 알아보며 또한 소표본인 경우 가상관 행렬구조의 선택이 GEE 추정량에 영향을 미치는지 여부도 살펴본다.

3.1. 순서자료의 생성

모의실험에서 순서자료인 난수의 발생은 주로 Gange(1995)가 제안한 반복비례적합(Iterative Proportional Fitting : IPF) 알고리즘을 사용하였다. 순서자료인 난수를 발생시키는 알고리즘은 Gange(1995)의 방법 보다 더 간단한 Stiger 등(1998)이 제안한 방법이 있다. Stiger 등이 제안한 방법은 다변량 정규분포를 이용하며, 상관행렬과 표준정규분포의 절사점(cutpoint)을 지정하여 순서자료를 생성시킨다. 이 방법은 범주형 자료의 참상관행렬과 회귀모수를 실험자가 지정할 수 없다.

이에 반해 IPF 알고리즘을 이용한 Gange의 방법은 상관행렬, 회귀모수, 설계행렬(design matrix)을 실험자가 지정하여 순서자료를 생성시킨다. 따라서 추정량의 효율성, 일치성 및

이론상의 근사적 분산 추정량에 대한 계산이 용이하며, 설계행렬을 실험 목적에 따라 설정할 수 있으므로 Stiger 등의 방법보다 더 일반적인 방법이라고 할 수 있다. 우리는 Stiger 등이 제안한 방법과 Gange가 제안한 방법에 의해 각각 난수를 발생시켜 앞에서 열거한 GEE 추정량의 소표본 성질을 연구한다.

3.2. 모의실험 모형의 설정

순서자료의 생성은 하나의 실험단위당 반복 관찰횟수(T)가 4회, 반응범주(K)가 4개이며, 반응벡터의 상관행렬의 구조는 교환가능(exchangeable)한 구조와 무리 지어진(banded) 구조로 하였다. 또한 그룹 간의 효과를 설명변수로 넣기 위해 크기가 n_1과 n_2인 두 그룹을 고려하였다. 실험모형은 설명변수로 그룹간의 효과, 시간의 효과, 그룹과 시간 사이의 교호작용을 고려한 다음과 같은 누적 로짓모형(cumulative logit model)을 사용하였다.

$$\log\left(\frac{\mathrm{F_{ikt}}}{1-\mathrm{F_{ikt}}}\right) = \delta_k + \mathbf{x}_{\mathrm{it}}\boldsymbol{\beta}, \quad \mathrm{k} = 1,2,3,\ \mathrm{t} = 1,2,3,4 \tag{3.1}$$

여기서 $\mathrm{F_{ikt}}$는 시점 t에서 i번째 실험단위에 대해 반응이 k보다 같거나 작을 확률이다. δ_{k}는 절편모수(intercept parameter)이고, $\boldsymbol{\beta} = [\mathrm{g}, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}]^{\mathrm{T}}$이다. g는 그룹간의 효과를 나타내고, τ_1, τ_2, τ_3는 각각 시점 1, 2, 3에 대한 시간의 효과를 나타낸다. 또한 $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}$은 각각 그룹 1과 시점 1, 2, 3간의 교호작용을 나타낸다. 여기서, $\mathrm{g}_2 = \tau_4 = \gamma_{21} = \gamma_{22} = \gamma_{23} = 0$ 으로 가정한다.

Stiger 등의 방법에 의한 난수생성은 교환가능한 구조인 상관행렬의 경우 $\alpha = 0.5$인 행렬로 구체화하였고, 무리 지어진 구조인 상관행렬은 $\boldsymbol{\alpha} = [0.5, 0.3, 0.1]^{\mathrm{T}}$인 행렬로 구체화하였다. 생성된 순서자료는 무작위(random)로 크기 n_1인 그룹 1과 크기 n_2인 그룹 2로 나뉜다. 이렇게 하면 두 그룹간의 차이는 없게 된다.

이에 반해 Gange의 방법에 의한 순서자료 생성시 상관행렬은 반응범주와 시점간의 상관을 모두 고려한 $\mathrm{T(K-1)} \times \mathrm{T(K-1)}$인 행렬이 된다. 따라서 본 실험의 경우 12×12인 행렬이 된다. Stiger 등의 다변량 정규분포를 이용한 방법과 비교를 위해 본 실험에서는 Stiger 등의 방법으로 생성시 사용한 상관행렬을 따르는 $n_1 = 200$, $n_2 = 200$인 난수를 발생시켜 교환가능한 가상관행렬 구조와 무리 지어진 가상행렬 구조를 각각 사용하여 추정된 상관행렬을 Gange의 방법에 적용하였다. 그 결과 Gange의 방법에 적용한 상관행렬은 교환가능한 구조를 $\mathbf{R}_{\mathrm{E}}$, 무리지어진 구조를 $\mathbf{R}_{\mathrm{B}}$라 할 때 이는 대각 블록이 3×3인 단위행렬(identity matrix)이고, 비대각 블록은 다음과 같은 3×3인 행렬로 하였다.

$$\mathbf{R}_{\mathrm{E}}\text{인 경우 : } \begin{bmatrix} 0.38 & 0.13 & 0 \\ & 0.1 & 0.04 \\ & & 0.02 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{\mathrm{B}}\text{인 경우 : 1차}\begin{bmatrix} 0.35 & 0.16 & 0 \\ & 0.1 & 0.06 \\ & & 0.06 \end{bmatrix},\ \text{2차}\begin{bmatrix} 0.2 & 0.07 & 0 \\ & -0.01 & -0.01 \\ & & 0.02 \end{bmatrix},\ \text{3차}\begin{bmatrix} 0.09 & 0.02 & 0.03 \\ & -0.02 & -0.07 \\ & & -0.01 \end{bmatrix}$$

Stiger 등의 방법과 비교를 위해 회귀모수 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$으로 놓으면 두 그룹간의 효과가 없게 된다. 절편모수 δ_{k}는 $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 1$로 각각 놓았고 또한 설계행렬 $\mathbf{X}$는 그룹 1과 그룹 2에 대해서 다음과 같이 정의하였다.

$$\text{그룹1 } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{그룹2 } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

3.3. 모의실험의 결과

3.3.1. 제1종 오류율

실험은 $n_1 = n_2 = 20, 40, 60, 80$인 경우에 대해 각각 1000개의 자료를 생성시켜 가상관행렬 구조에 따른 경험적인 1종 오류율(empirical type I error rate)을 살펴보았다. 순서자료 생성은 3.1절의 두가지 방법을 이용하였다. 자료생성시 상관행렬은 교환가능 구조와 무리지어진 구조를 각각 사용하였으며, 회귀모수의 추정시 가상관행렬의 구조는 독립, 교환가능, 무리 지어진 구조를 사용하였다. 실험은 시간효과와 그룹과 시간사이의 교호작용 각각에 대해 수행하였다.

적절한 $\mathbf{C}$에 대해 귀무가설 H_0 : $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$에 대한 왈드 통계량(Wald statistic) $(\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}})^{\mathrm{T}}$ $[\mathbf{C}\hat{\mathbf{V}}_{\beta}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}]^{-1}$ $(\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}})$을 사용하여 표본크기에 따라 우리가 정한 유의수준과 실제 유의수준의 차이가 얼마나 있는지를 알아보았다.

경험적인 1종 오류율은 모의실험을 1000번 시행했으며, 수렴하지 않는 경우가 발생했을 때에는 수렴한 경우에 대해서만 계산하였다. 시간효과와 그룹과 시간 사이의 교호작용에 대한 검정시 Gange의 방법에 의해 순서자료를 생성할 경우 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$을 그룹 1과 그룹 2 각각에 사용하여 순서자료를 생성시킨다. 또한 우리가 구한 경험적인 1종 오류율에 대해 정규근사에 근거한 95% 신뢰구간이 명목수준을 포함하는지를 표시하였다.

실험시 자료 생성은 교환가능 상관구조를 사용하였을 때 표 3.1은 시간효과에 대해 그리고 표 3.2는 그룹과 시간의 교호작용에 대한 검정시 경험적인 1종 오류율을 나타낸다. 표 3.1, 표 3.2를 통해 우리는 반복 측정한 순서자료를 GEE 모형에 적용한 결과 표본크기가 커질수록 왈드 통계량이 근사적으로 χ^2분포에 접근해 감을 알 수 있다. 그러나, $n_1 = n_2 = 20, 40$인 경우에 대해서는 경험적인 1종 오류율이 명목수준보다 상당히 크게 발생하며, 소표본인 경우 왈드 통계량의 분포는 χ^2분포와는 차이가 있다. 즉, 소표본인 경우 유의수준을 0.05로 놓으면, 실제로는 0.1정도의 1종 오류율을 갖게 된다. 그러나, 전반적으로 $n_1 = n_2 = 60, 80$정

도가 되면 거의 모든 경우에 대해 명목수준에 근접함을 알 수 있다. 또한 추정시 사용한 가상관행렬의 구조는 경험적 1종 오류율에 큰 영향을 미치지 않음을 알 수 있다.

표 3.1: 시간효과에 대한 검정시 경험적인 1종 오류율
(참 상관행렬 : 교환가능 상관행렬) (H_0 : $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T = \mathbf{0}$)

가상관 구조	명목 수준	자료생성 방법	표본크기 $n_1=n_2=20$	$n_1=n_2=40$	$n_1=n_2=60$	$n_1=n_2=80$
독립	0.05	IPF알고리즘	0.104	0.072	0.077	0.060*
		다변량정규분포	0.103	0.071	0.081	0.060*
	0.10	IPF알고리즘	0.174	0.138	0.134	0.126
		다변량정규분포	0.181	0.143	0.126	0.125
교환가능	0.05	IPF알고리즘	0.094(3)	0.062*	0.066*	0.065*
		다변량정규분포	0.107(3)	0.078(1)	0.062*	0.054*
	0.10	IPF알고리즘	0.160(3)	0.137	0.128	0.128
		다변량정규분포	0.185(3)	0.124(1)	0.118*	0.110*
무리지어진 구조	0.05	IPF알고리즘	0.104(12)	0.071	0.073	0.064*
		다변량정규분포	0.133(21)	0.077	0.063*	0.054*
	0.10	IPF알고리즘	0.181(12)	0.143	0.124	0.114*
		다변량정규분포	0.198(21)	0.124	0.131	0.105*

주 : ( ) : 수렴하지 않은 개수

* : 경험적인 1종 오류율에 대한 95% 신뢰구간이 명목수준을 포함한 경우

표 3.2: 그룹과 시간 사이의 교호작용에 대한 검정시 경험적인 1종 오류율
(참 상관행렬 : 교환가능 상관행렬) (H_0 : $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = [\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}]^T = \mathbf{0}$)

가상관 구조	명목 수준	자료생성 방법	표본크기 $n_1=n_2=20$	$n_1=n_2=40$	$n_1=n_2=60$	$n_1=n_2=80$
독립	0.05	IPF알고리즘	0.093	0.068	0.059*	0.044*
		다변량정규분포	0.069	0.077	0.058*	0.045*
	0.10	IPF알고리즘	0.145	0.115*	0.133	0.104*
		다변량정규분포	0.140	0.123	0.127	0.091*
교환가능	0.05	IPF알고리즘	0.081(1)	0.066	0.063*	0.061*
		다변량정규분포	0.074(2)	0.051*	0.049*	0.053*
	0.10	IPF알고리즘	0.139(1)	0.118*	0.118*	0.123
		다변량정규분포	0.143(2)	0.120*	0.109*	0.105*
무리지어진 구조	0.05	IPF알고리즘	0.099(12)	0.063*	0.062*	0.058*
		다변량정규분포	0.090(30)	0.056*	0.068	0.050*
	0.10	IPF알고리즘	0.178(12)	0.119*	0.133	0.112*
		다변량정규분포	0.156(30)	0.104*	0.110*	0.113*

주 : ( ) : 수렴하지 않은 개수

* : 경험적인 1종 오류율에 대한 95% 신뢰구간이 명목수준을 포함한 경우

표 3.1, 표 3.2를 통해 표본이 작은 경우, 즉 $n_1 = n_2 = 20$, 추정값이 수렴하지 않는 경우

가 발생한다. 이는 상관행렬의 구조가 교환가능 구조처럼 추정해야할 모수의 개수가 작은 경우에 대해서는 표본이 작더라도 대부분 수렴하나, 무리 지어진 경우처럼 추정해야 할 모수의 개수가 많은 경우에는 수렴하지 않는 경우가 교환가능한 구조보다는 더 많이 발생한다. 그러나 수렴하지 않는 비율이 전체에서 3%이내이다.

Stiger 등의 방법이 Gange의 방법보다는 대부분 경험적 1종 오류율이 명목수준에 더 가깝다. 이것은 Stiger 등의 방법에 의한 순서자료 자체가 다변량 정규분포를 따르는 자료로 발생시켰기 때문이라 생각된다. 그러나 Gange의 방법이 특정 분포를 가정하지 않으므로 순서자료를 생성시킬 경우에는 Stiger 등의 방법보다는 더 일반적이다. 또한 자료 생성시 참 상관행렬로서 무리지어진 구조를 이용하였을 경우에도 경험적인 1종 오류율은 표 3.1, 표 3.2와 비슷하게 나타났다.

3.3.2. 검정력

GEE 추정량 $\hat{\beta}$에 대한 검정을 고려할 때 표본크기가 어느 정도가 되어야 만족할만한 수준의 검정력이 되는지 알아보았다. 실험시 자료는 Gange의 방법을 이용하여 교환가능한 상관구조로 생성시켰으며, 이에 대한 추정시 가상관행렬은 1종 오류율의 계산에서와 마찬가지로 독립, 교환가능, 무리 지어진 구조를 사용하였고 시간효과와 그룹과 시간 사이의 교호작용에 대해 각각 경험적인 검정력을 구하였다. 귀무가설과 대립가설은 다음과 같이 설정하였다.

표 3.3: 시간효과에 대한 검정력 (참 상관행렬 : 교환가능한 상관행렬)
$H_0 : \boldsymbol{\tau} = [0, 0, 0]^T$, $H_1 : \boldsymbol{\tau} = [c, c, c]^T$

가상관구조	표본크기	유의수준	c=0.6	c=0.9	c=1.1
독립	$n_1=n_2=20$	0.05	0.210	0.412	0.583
		0.10	0.305	0.536	0.709
	$n_1=n_2=40$	0.05	0.458	0.813	0.941
		0.10	0.599	0.879	0.970
	$n_1=n_2=60$	0.05	0.618	0.946	0.992
		0.10	0.729	0.980	0.998
	$n_1=n_2=80$	0.05	0.789	0.990	0.999
		0.10	0.867	0.995	0.999
교환 가능	$n_1=n_2=20$	0.05	0.196(4)	0.436(13)	0.587(25)
		0.10	0.297(4)	0.581(13)	0.724(25)
	$n_1=n_2=40$	0.05	0.479	0.855	0.957(1)
		0.10	0.590	0.898	0.977(1)
	$n_1=n_2=60$	0.05	0.623	0.966	0.999
		0.10	0.722	0.979	0.999
	$n_1=n_2=80$	0.05	0.794	0.990	1.000
		0.10	0.869	0.996	1.000
무리 지어진 구조	$n_1=n_2=20$	0.05	0.203(47)	0.408(75)	0.548(126)
		0.10	0.307(47)	0.559(75)	0.690(126)
	$n_1=n_2=40$	0.05	0.456	0.804(4)	0.944(2)
		0.10	0.561	0.881(4)	0.964(2)
	$n_1=n_2=60$	0.05	0.602	0.959	0.995
		0.10	0.706	0.984	0.997
	$n_1=n_2=80$	0.05	0.792	0.987	1.000
		0.10	0.879	0.997	1.000

주 : ( ) : 수렴하지 않은 개수

표 3.4: 그룹과 시간 사이의 교호작용에 대한 검정력 (참 상관행렬 : 교환가능한 상관행렬)
$H_0 : \gamma = [0, 0, 0]^T$, $H_1 : \gamma = [c, c, c]^T$

가상관구조	표본크기	유의수준	c=0.6	c=0.9	c=1.1
독립	$n_1=n_2=20$	0.05	0.097	0.192	0.318
		0.10	0.198	0.306	0.472
	$n_1=n_2=40$	0.05	0.235	0.450	0.668
		0.10	0.355	0.590	0.803
	$n_1=n_2=60$	0.05	0.387	0.717	0.887
		0.10	0.475	0.808	0.922
	$n_1=n_2=80$	0.05	0.505	0.860	0.962
		0.10	0.615	0.915	0.975
교환 가능	$n_1=n_2=20$	0.05	0.129(2)	0.238(9)	0.331(6)
		0.10	0.215(2)	0.344(9)	0.473(6)
	$n_1=n_2=40$	0.05	0.222	0.514	0.664
		0.10	0.335	0.640	0.789
	$n_1=n_2=60$	0.05	0.342	0.728	0.898
		0.10	0.441	0.832	0.937
	$n_1=n_2=80$	0.05	0.407	0.825	0.963
		0.10	0.527	0.894	0.980
무리 지어진 구조	$n_1=n_2=20$	0.05	0.113(42)	0.205(50)	0.270(58)
		0.10	0.205(42)	0.331(50)	0.419(58)
	$n_1=n_2=40$	0.05	0.273(1)	0.518(2)	0.692(4)
		0.10	0.394(1)	0.634(2)	0.783(4)
	$n_1=n_2=60$	0.05	0.341	0.682	0.905
		0.10	0.457	0.783	0.942
	$n_1=n_2=80$	0.05	0.482	0.867	0.964
		0.10	0.583	0.914	0.981

주 : ( ) : 수렴하지 않은 개수

$$\text{시간효과 검정시 } : H_0 : [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T = [0,0,0]^T, \quad H_1 : [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T = [c,c,c]^T$$
$$\text{교호작용 검정시 } : H_0 : [\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}]^T = [0,0,0]^T, H_1 : [\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}]^T = [c,c,c]^T \quad (3.3)$$

여기서, c값은 c=0.6, 0.9, 1.1인 경우에 대해서 실험하였다.

검정력을 가상관행렬별, 표본크기별로 비교하기 위해서 우리는 표본에서 구한 실제 유의수준이 명목수준 0.05 또는 0.1이 되게 하기 위해 표 3.1과 표 3.2의 귀무가설 하에서의 모의실험에 의해 구한 왈드 통계량 1000개의 95백분위수와 90백분위수를 구하여 그것을 유의수준 0.05와 0.1 각각의 임계값으로 사용하였다. H_1하에서 설정한 누적 로짓모형의 회귀모수 β는 시간 효과의 검정력 계산시 $\beta = [0,c,c,c,0,0,0]^T$을 적용하였고, 교호작용의 검정력 계산시 $\beta = [0,0,0,0,c,c,c]^T$을 사용하여 순서자료를 생성하였다. 실험은 1000번 반복 수행하였으며 이 경우에도 수렴하지 않은 경우는 제외하였다.

표 3.3과 표 3.4에 의하면 $n_1 = n_2 = 60$ 이상인 경우에 만족할만한 검정력을 구할 수 있었다. 경험적인 1종 오류율에서처럼 가상관행렬에 따른 검정력의 차이는 존재하지 않는 것으로 보인다. 정확한 1종 오류율과 만족할만한 검정력을 구하기 위해서는 표본의 크기가 중요하며, 소표본인 경우 GEE 추정량의 근사적 성질이 적용되지 않을 수 있다.

3.3.3. 추정량의 효율성

난수를 통해 구한 추정값들의 분포를 이용하여 추정량 $\hat{\beta}$의 성질을 살펴보았다. 자료 생성시 교환가능 구조(표 3.1)와 무리 지어진 구조 각각에 대해 Gange의 방법을 사용하여 순서자료를 생성한 후 모의실험을 통해 시간효과에 대한 검정시 얻은 시점 1에 대한 추정량($\hat{\tau}_1$)들에 대한 상대효율을 구하였다. 그 결과가 표 3.5에 나타나있다.

표 3.5는 반복 측정한 자료에 대해서 GEE 추정량의 효율성을 보여준다. 표본이 커짐에 따라 가상관행렬에 따른 효율성의 차이는 감소한다. 그러나, 소표본인 경우에는 GEE모형을 사용하는 것이 추정량의 효율성을 증가시킨다. 소표본일 경우 표본이 큰 경우 보다 가상관행렬 구조의 영향이 더 큼을 알 수 있다. 또한 표 3.5에서 보면 참된 상관구조를 모를 경우 가상관행렬로 교환가능 상관구조를 사용함이 전반적으로 효율성이 좋다.

표 3.5: 독립과 교환가능, 무리 지어진 구조간의 시점 1 추정량 ($\hat{\tau}_1$)의 상대효율

참된상관 구조	가상관 구조	상대효율			
		n_1=n_2=20	n_1=n_2=40	n_1=n_2=60	n_1=n_2=80
교환가능	$\frac{\text{MSE(exchangeable)}}{\text{MSE(independence)}}$	0.8831	0.9218	0.9693	0.9369
	$\frac{\text{MSE(banded)}}{\text{MSE(independence)}}$	0.9287	0.9091	1.0406	0.9523
무리 지어진구조	$\frac{\text{MSE(exchangeable)}}{\text{MSE(independence)}}$	0.9309	0.8836	0.8971	0.9329
	$\frac{\text{MSE(banded)}}{\text{MSE(independence)}}$	0.9294	0.8501	0.9759	0.9904

주 : MSE : Mean Squared Error

3.3.4. 표본크기 n_1, n_2가 다른 경우의 경험적인 1종 오류율

3.3.1절에서는 표본크기가 같은 경우 즉, $n_1 = n_2$인 경우에 대해서만 1종 오류율을 구해 보았다. 그러나, 소표본인 경우 두 그룹의 표본크기가 다른 경우에는 같은 경우와 비교하여 어떻게 달라지는지 살펴보았다. 실험에서 자료생성은 교환가능한 상관구조를 사용하였으며, 교호작용에 대해서만 살펴보았다. 교호작용에 대해서만 살펴본 이유는 두 그룹의 반응이 달라야 표본크기가 다른 효과를 보일 수 있기 때문이다. 따라서 교호작용은 $\gamma = [0.6, 0.6, 0.6]^{\mathrm{T}}$로 설정하여 Gange 방법으로 순서 난수를 발생시켰다. 1000번 모의실험한 결과가 표 3.6에 나타나 있다.

$n_1 = 30$, $n_2 = 10$인 경우와 $n_1 = 10$, $n_2 = 30$인 경우에는 표본크기가 같은 경우($n_1 = n_2 = 20$)와 비교해서 경험적인 1종 오류율이 더 크게 나왔다. 그러나, $n_1 = 25$, $n_2 = 15$와 $n_1 = 15$, $n_2 = 25$인 경우에는 표본크기가 같은 경우와 비슷한 1종 오류율을 보였다. 교호작용 검정의 실험 결과에 의하면, 두 그룹의 표본크기를 비슷하게 맞추어서 실험하는 것이 두 그룹의 표본크기 차가 큰 경우에 비해 1종 오류율이 명목수준에 더 가깝게 된다는 것을 알 수 있다.

표 3.6: 두 그룹의 표본크기가 다른 경우 교호작용에 대한 경험적인 1종 오류율
(참 상관행렬 : 교환가능 상관행렬) (H_0 : $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = [\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}]^T = [0.6, 0.6, 0.6]^T$)

가상관 구 조	유 의 수 준	n_1=20, n_2=20	n_1=25, n_2=15	n_1=30, n_2=10	n_1=15, n_2=25	n_1=10, n_2=30
독 립	0.05	0.097	0.094	0.125	0.091	0.110
	0.10	0.162	0.158	0.183	0.146	0.169
교 환	0.05	0.080(4)	0.075(3)	0.112(1)	0.092(3)	0.116(8)
가 능	0.10	0.145(4)	0.145(3)	0.179(1)	0.157(3)	0.191(8)
무리 지어진	0.05	0.091(34)	0.115(16)	0.149(36)	0.099(42)	0.137(58)
구 조	0.10	0.154(34)	0.194(16)	0.231(36)	0.162(42)	0.212(58)

주 : ( ) : 수렴하지 않은 개수

3.3.5. 분산 추정량 $\hat{\mathbf{V}}_{\boldsymbol{\beta}}$

회귀모수에 대한 분산 추정량은 검정 통계량 계산시 매우 중요하며, 로버스트 분산 추정값의 성질은 GEE 추정량의 성질에 영향을 준다. 특히 1종 오류율에 많은 영향을 준다. 따라서 표본크기에 따라 참된 공분산 행렬을 알 경우 $\mathbf{V}_i = \mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i)$일 때의 GEE 추정량의 이론상의 근사적 분산 추정량 (2.3)과 실지 생성된 순서자료와 가공분산 행렬을 사용하여 추정된 로버스트 분산 추정량 (2.2)와 비교하였다. 즉, 일반적으로 사용되는 로버스트 분산 추정값이 이론상의 근사적 분산값과 얼마나 가까운지 비교하였다.

실험은 주어진 회귀모수 $\boldsymbol{\beta}$와 참된 상관행렬 $\mathbf{R}$을 이용하여 참된 공분산 행렬을 계산하여, 가공분산행렬이 참된 공분산 행렬과 같게 하여 구한 식 (2.3)을 이용하여 표본크기에 따른 이론상의 근사적 분산 추정량 $\hat{\mathbf{V}}_{\boldsymbol{\beta}}$를 구한다. 이는 순서자료 생성없이 구해진다.

그러나 일반적으로 GEE 모형 추정시 참된 공분산 행렬을 모르므로 추정된 가공분산 행렬을 사용하여 구해진 로버스트 분산 추정량 행렬 (2.2)를 이용하여 각 표본크기 별로 그리고 가상관행렬 별로 구하여 비교하였다. 실험에 사용된 회귀모수는 $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 1$과 $\boldsymbol{\beta} = [0.2, 0.5, 0.3, 0.2, 0.3, 0.2, 0.1]^T$로 설정하였고, 상관행렬은 3.2절의 교환가능한 상관행렬 $\mathbf{R}_E$를 사용하였다. 비교를 위해 각 회귀모수 추정량들의 로버스트 분산인 경우 $\hat{\mathbf{V}}_{\boldsymbol{\beta}}$의 대각요소만을 표 3.7에 나타냈다.

회귀모수 분산추정값 $\hat{\mathbf{V}}_{\boldsymbol{\beta}}$은 가상관행렬별로 큰 차이를 발견하지 못했다. 전반적으로 그룹간의 효과 g의 분산 추정값은 이론상의 근사적 분산 추정값과 비슷하지만, 시간효과와 교호작용의 분산 추정값은 이론적인 분산 추정값보다 작게 추정되었다. 특히, 교호작용의 로버스트 분산 추정값은 이론상의 분산 추정값의 절반정도이다. 이는 $\mathrm{Var}(\mathbf{Y}_i)$의 추정값이 매우 작아서 로버스트 분산 추정값을 작게 추정하게 된다.

본 실험의 결과에 의하면, 개별 회귀계수에 대한 교호작용의 검정시 실제 분산보다 더 작은 분산이 추정되므로 설정한 귀무가설을 쉽게 기각하게 되는 검정을 제공할 수 있다. 그러므로 소표본인 경우에는 로버스트 분산 추정량이 매우 작게 추정될 수 있으므로 모형에 근거한 분산 추정량을 사용하는 것이 좋으리라 생각된다.

표 3.7: 회귀모수의 분산 추정값 비교

표본크기	상관구조	V(g)	V(τ_1)	V(τ_2)	V(τ_3)	V(γ_{11})	V(γ_{12})	V(γ_{13})
	참	0.3029	0.2968	0.2941	0.2929	0.8782	0.8628	0.8535
$n_1 = 20$	독 립	0.2951	0.2936	0.3149	0.1743	0.4356	0.4999	0.2851
$n_2 = 20$	교환가능	0.3162	0.1446	0.1268	0.1784	0.4479	0.3314	0.3769
	무 리	0.3623	0.1959	0.2366	0.2068	0.4538	0.3717	0.3585
	참	0.1539	0.1532	0.1519	0.1513	0.4485	0.4407	0.4360
$n_1 = 40$	독 립	0.1715	0.0672	0.1166	0.0991	0.2169	0.2581	0.2448
$n_2 = 40$	교환가능	0.1468	0.1011	0.1596	0.1153	0.2303	0.2154	0.2497
	무 리	0.1412	0.0628	0.1111	0.0955	0.1505	0.1820	0.1679
	참	0.1032	0.1033	0.1024	0.1020	0.3013	0.2960	0.2929
$n_1 = 60$	독 립	0.1103	0.0576	0.0717	0.0707	0.1239	0.1391	0.1240
$n_2 = 60$	교환가능	0.0921	0.0766	0.0858	0.0558	0.1441	0.1507	0.1209
	무 리	0.1165	0.0958	0.1163	0.0794	0.1526	0.1928	0.1724
	참	0.0776	0.0779	0.0772	0.0769	0.2268	0.2229	0.2205
$n_1 = 80$	독 립	0.0775	0.0480	0.0597	0.0451	0.0919	0.1124	0.0831
$n_2 = 80$	교환가능	0.0774	0.0565	0.0641	0.0440	0.1275	0.1349	0.1070
	무 리	0.0727	0.0589	0.0707	0.0675	0.1008	0.1292	0.1174

4. 결 론

GEE모형은 반응변수들의 다변량 분포를 가정하지 않고, 반응변수의 주변분포와 상관행렬의 형태만을 가정하여 모수를 추정할 수 있는 장점을 가진다. 또한 그 추정량은 근사적으로 정규분포를 따르고, 연결함수가 정확할 때 일치추정량이 된다.

우리는 소표본이고 순서자료인 경우 누적 로짓모형에서 GEE모형의 추정량의 성질에 대해 연구하였다. 모의실험 결과 GEE모형의 회귀모수에 대한 검정시 소표본일 경우에는 경험적 1종 오류율이 명목수준보다 더 크게 발생함을 알 수 있었다. 따라서, 소표본인 경우 회귀모수에 대한 검정시 주의를 기울여야 할 것이다. 본 논문의 모의실험 결과에 의하면 K = 4, T = 4인 경우, 명목수준에 근접하게 하기 위해서는 표본크기가 최소한 $n_1 = n_2 = 80$이상이 되어야 만족한 결과를 얻을 수 있었으며, 검정력 또한 $n_1 = n_2 = 60, 80$일 때 만족할 만한 수준이 되었다. 일반적으로 비교적 양호한 결과를 제공할 수 있는 n_i/K에 대한 연구가 필요하다. 1종 오류율과 검정력은 표본크기에 큰 영향을 받고, 가상관행렬에 따른 영향은 거의 없다.

또한 표 3.5의 결과에 의하면 순서자료에 대해 소표본인 경우, 참된 상관 구조가 교환가능이던 혹은 무리지어진 경우이던, 표본 수가 커짐에 따라 가상관행렬로 교환가능구조를 선택하면 효율적인 추정량을 얻었다. 따라서 사전 정보가 없는 경우에는 구체화해야 할 상관행렬의 모수의 개수가 작은 교환가능한 가상관행렬을 이용하는 것이 추정량의 효율성 측면에서 좋으리라 생각된다. 이는 Miler, Davis 및 Landis(1993)가 모의실험에서 소표본인 경우 가상관행렬로 독립인 구조를 권하는 것과는 상이하다

GEE 모형을 두 그룹간의 비교에 이용시 그룹간의 표본크기를 비슷한 크기로 하는 것이 명목수준에 더 근접한 1종 오류율을 얻을 수 있다. 또한 개개의 회귀모수에 대한 검정시

로버스트 분산 추정값이 이론상의 근사적 분산 보다 작게 나올 가능성이 있으므로 회귀계수의 검정시 귀무가설을 쉽게 기각할 수 있는 검정이 될 수 있음에 주의해야 한다. 이 사실은 경험적 1종 오류율이 명목수준보다 크게 발생한 것과 관련이 있다.

기존 모의실험 결과와 비교하면, 관찰값이 이진 자료인 경우 많은 모의실험이 행해졌고, 다항자료인 경우는 다변량 정규분포를 이용하거나 특정한 다항확률을 갖는 경우 모의실험이 행해졌다.

본 논문에서는 다항자료에서 반복측정 사이의 관계를 자유롭게 모형화 시켜서 GEE 추정량을 구했다. 범주형 자료 생성을 위해서 우리는 Gange(1995)가 제안한 알고리즘을 이용하여 설계행렬, 회귀모수 그리고 상관행렬을 다양한 상황에 맞게 우리가 설정하여 순서난수를 발생시키므로 다변량 정규분포나 특정한 다항확률을 가정하는 경우보다는 일반적인 결과를 얻을 수 있다. 우리는 다변량 정규분포를 가정한 모의실험 결과와도 비교하였다.

또한, 본 논문에서는 생성된 난수의 참 상관행렬을 알고 있는 상황에서 추정에 사용된 가상관행렬 구조에 따른 추정량의 효율성 비교를 하였다. 특히, 참된 상관행렬을 알고 있으므로 생성된 순서자료와 상관없이 이론상의 근사적 분산 추정량을 구할 수 있다. 따라서 참 상관행렬이 알려져 있지 않아 가상관행렬을 사용한 경우의 로버스트 분산 추정값이 참 상관행렬을 이용한 이론상의 근사적 분산 추정값에 얼마나 근접하는지 등 분산추정량의 성격을 연구하였다. 소표본에서 로버스트 분산 추정량과 모형 분산 추정량 중 어느 것이 이론상의 근사적 분산 추정값에 가까운 추정값을 제공할지는 향후 연구 과제이다.

본 논문에 사용된 프로그램을 소개하면, Gange의 방법에 의한 난수 생성은 Gange(1995)가 S-plus로 작성한 프로그램을 참조하였으며, Stiger 등이 제안한 알고리즘은 SAS 매크로(SAS macro)를 이용하여 작성하였다. 또한 GEE 추정량의 계산부분은 Lipsitz, Kim과 Zhao(1994)의 SAS 매크로를 수정하여 사용하였다.

참고문헌

[1] Gange, S. J. (1995). Generating Multivariate Categorical Variates Using the Iterative Proportional Fitting Algorithm, *The American Statistician*, Vol 49, No 2, 134-138.

[2] Gunsolley, J. C., Getchell, C. and Chinchilli, V. M. (1995). Small Sample Characteristics of Generalized Estimating Equations, *Communications in Statistics, Part B - Simulation and Computation*, Vol 24, 869-878.

[3] Liang, K. and Zeger, S. L. (1986). Longitudinal Data Analysis Using Generalized Linear Models, *Biometrika*, Vol 73, No 1, 13-22.

[4] Lipsitz, S. R., Laird, N. M. and Harrington, D. P. (1991). Generalized Estimating Equations for Correlated Binary Data : Using the Odds Ratio as a Measure of Association, *Biometrika*, Vol 78, No 1, 153-160.

[5] Lipsitz, S. R., Kim, K. and Zhao, L. (1994). Analysis of Repeated Categorical Data Using Generalized Estimating Equations, *Statistics in Medicine*, Vol 13, 1149-1163.

[6] Lipsitz, S. R., Fitzmaurice, G. M., Orav, E. J. and Laird, N. M. (1994). Performance of Generalized Estimating Equations in Practical Situations, *Biometrics*, Vol 50, 270-278.

[7] McCullagh, P. (1983). Quasi-likelihood Function, *The Annals of Statistics*, Vol 11, No 1, 59-67.

[8] Miller, M. E., Davis, C. S. and Landis, J. R. (1993). The Analysis of Longitudinal Polytomous Data: Generalized Estimating Equations and Connections with Weighted Least Squares, *Biometrics*, Vol 49, 1033-1044.

[9] Prentice, R. L. (1988). Correlated Binary Regression with Covariates Specific to Each Binary Observation, *Biometrics*, Vol 44, 1033-1048.

[10] Stiger, T. R., Kosinski, A. S., Barnhart, H. X. and Kleinbaum, D. G. (1998). ANOVA for Repeated Ordinal Data with Small Sample Size? A Comparison of ANOVA, MANOVA, WLS and GEE Methods by Simulation, *Communications in Statistics, Part B - Simulation and Computation*, Vol 27, 357-375.

[11] Wedderburn, R. W. M. (1974). Quasi-likelihood Functions, Generalized Linear Models, and the Gauss-Newton Method, *Biometrika*, Vol 61, No 3, 439-447.

[12] Zeger, S. L. and Liang, K. (1986). Longitudinal Data Analysis for Discrete and Continuous Outcomes, *Biometrics*, Vol 42, 121-130.

[2001년 12월 접수, 2002년 6월 채택]

Small Sample Characteristics of Generalized Estimating Equations for Categorical Repeated Measurements*

Donguk Kim[1)] Jaejik Kim[2)]

ABSTRACT

Liang and Zeger proposed generalized estimating equations(GEE) for analyzing repeated data which is discrete or continuous. GEE model can be extended to model for repeated categorical data and its estimator has asymptotic multivariate normal distribution in large sample sizes. But GEE is based on large sample asymptotic theory. In this paper, we study the properties of GEE estimators for repeated ordinal data in small sample sizes. We generate ordinal repeated measurements for two groups using two methods. Through Monte Carlo simulation studies we investigate the empirical type 1 error rates, powers, relative efficiencies of the GEE estimators, the effect of unequal sample size of two groups, and the performance of variance estimators for polytomous ordinal response variables, especially in small sample sizes.

Keywords: Generalized estimating equations; Repeated measurements; Ordinal data; Small sample size; Statistical inference.

* This Paper was Supported by 63 Research Fund, Sungkyunkwan University, 1999.

1) Associate Professor, *Department of Statistics*, Sungkyunkwan University.
E-mail: dkim@skku.ac.kr

2) Researcher, Korea Labor Institute.