

## 삼차원 불연속 변형 해석(DDA)을 이용한 블록거동해석

장현익<sup>1)</sup>, 이정인<sup>2)</sup>

### Block Deformation Analysis Using Three-dimensional Discontinuous Deformation Analysis(DDA)

Hyun-Ick Jang and Chung-In Lee

**Abstract.** Since the development of Discontinuous Deformation Analysis (DDA) by Shi (1984), there has been much improvement in the theory and programs. These, however, are all based on the assumption of a two-dimensional plane strain or plane stress state; and because a rock block system is a three-dimensional problem, a two-dimensional analysis has limited application. So a three-dimensional analysis is required in the design of rock slopes and underground spaces where three-dimensional discontinuities dominate stability. In this study three-dimensional DDA program is developed using the Shi's two-dimensional theory and program, and the two cases of three-dimensional block are analysed. The program is applied to one sliding-face blocks and wedge sliding and it gives the good results comparing to the exact solution. Multi-block cases will be analysed for many other application soon.

**KeyWords:** Three-dimension, Discontinuity, DDA

**초 록.** Shi가 개발한 불연속 변형 해석은 많은 발전이 있었지만 지금까지의 해석이 모두 평면변형률이나 평면응력을 가정한 이차원으로 이루어진 해석이다. 하지만 불연속면이 기본적으로 삼차원을 형성하므로 이차원으로 해석하는 데는 한계가 있다. 삼차원의 불연속면이 안정성에 큰 영향을 미치는 사면, 지하 비축기지 등의 설계에서는 삼차원 해석에 대한 연구가 필요하다. 이에 이 연구에서는 기존 Shi가 개발한 이차원 불연속 변형 해석을 삼차원 불연속 변형 해석의 이론으로 확장하고 프로그램을 개발하여 실제 블록에 적용함으로써 개발된 이론과 프로그램의 타당성을 검증하였다. 개발한 프로그램을 이용하여 일정한 경사를 가진 블록의 미끄러짐과 썩기의 미끄러짐을 해석하여 이론값과 정확히 일치하는 결과를 얻었다. 삼차원 이론확장과 검증을 바탕으로 향후 보다 많은 숫자의 블록에 적용하면서 해석을 할 것이다.

**핵심어:** 삼차원, 불연속면, 불연속 변형 해석

## 1. 서 론

지하구조물을 안전하고 경제적으로 설계, 시공하기 위한 기술개발의 중요성이 날로 증대되고 있다. 이들 지하구조물의 설계방법에는 여러 가지 암반분류에 의한 경험적 방법, NATM과 같이 계측을 이용하는 방법, 그리고 수치해석이나 이론해 등을 이용한 해석적 방법이 있는데, 이 중 해석적 방법은 최근 컴퓨터의 급속한 발달로 인하여 매우 많은 발전이 있었다. 암반공학에

적용되어온 수치해석 방법에는 유한요소법, 경계요소법, 개별요소법 등이 있는데 이 연구에 적용할 Shi(1984)에 의해 개발된 불연속 변형 해석방법은 유한요소와 개별요소의 복합형태라 할 수 있다. 이들 방법의 차이를 불연속 변형 해석을 중심으로 설명하면 다음과 같다.

불연속 변형 해석은 기본적으로 불연속 암반을 해석 대상으로 한다는 점에서 개별요소법과 비슷하지만 이론적인 면에서는 유한요소법에 좀 더 가까운 방법이다(Lin, 1995). 두 방법 모두 변위를 미지수로 사용하고 평형방정식은 전체 포텐셜에너지를 최소화시키는 과정을 통해서 만들어진다. 그리고 블록의 강성, 질량, 하중의 부행렬을 합해서 전체 강성행렬을 만드는 점이 비슷하다. 그러나 차이점은 불연속 변형 해석은 근본

<sup>1)</sup>서울대학교 공학연구소 연수연구원

<sup>2)</sup>서울대학교 지구환경시스템 공학부 교수

접수일: 2002년 7월 9일

심사 완료일: 2002년 9월 18일

적으로 유한요소법과 다르게 불연속 블록을 고려해서 개발되었다는 점이다. 유한요소법에서도 여러 연구자(Goodman 등, 1968; 이연규, 1994)들에 의해서 절리요소를 도입하여 불연속면을 모사하고 있으나 절리요소의 사용으로 인한 수치적 불안정(Pande, 1990), 매우 적은 량의 변위와 회전을 허용하고 접촉여부를 판단할 수 없다(Cundall, 1990)는 점 등이 불연속 변형 해석과의 차이점이다. 그러므로 불연속면이 발달하고 대변위가 발생하며 많은 개별블록이 서로 영향을 미치는 문제에는 불연속 변형 해석을 적용하는 것이 타당하다(Yeung, 1991). 불연속 변형 해석과 개별요소법과 차이점은 불연속 변형 해석법은 블록의 평형에 도달하기 위해 각 시간 간격마다 암시적(implicit) 수식화를 반복하는 과정에서 변위를 미지수로 사용하지만 개별요소법은 운동방정식을 바로 풀기 위해 명시적(explicit)수식화, 시간 진행적인 방법을 사용하며 미지수는 힘이다. 그리고 불연속 변형 해석법은 전체 포텐셜에너지를 최소화하여 방정식을 유도하므로 전체 시간에서 평형을 만족시킬 수 있고 에너지 감소 인자가 마찰력이므로 자연스러운 반면, 개별요소법은 해를 구하는 과정에서 불평형력을 최소화시키는 방법을 사용하고 에너지의 감소를 위해 인위적인 선택이 필요한 감쇠계수를 사용하는 점이 다르다.

불연속 변형 해석법은 Shi and Goodman(1984)에 의해 처음 제시된 방법으로 처음에는 역해석방법이었으나 Shi (1988)가 순해석으로 확장하여 제시하였으며 그 이후 많은 연구자들에 의해 연구가 이루어졌는데 이것을 분류하면 이론과 프로그램의 결합을 보완하는 연구와 이론의 현장적용에 관한 연구로 나눌 수 있으며 두 가지를 병행하면서 지금까지 발전해 왔다.

Lin(1995), Ohnishi 등(1995)은 블록을 작은 단위의 가상블록으로 나누고 해석하여 블록의 응력장을 보다 세밀하게 계산하였으며 블록에서의 균열전파와 블록의 깨짐을 해석하였다. Koo and Chern(1996), Ma 등(1996)은 이, 삼차원의 변위함수를 사용하여 블록내부의 응력을 보다 정확하게 계산하였으며 블록 내 최대응력발생 위치를 계산하였다. 불연속 변형 해석에서 접촉면의 조건을 만족하기 위해서 사용하는 벌칙함수(punishment function)로 인해 발생하는 수치 불안정성을 극복하기 위해 여러 연구자들(Lin(1995), Cai 등(1996), Chen 등(1997))은 Lagrange 접근법을 사용하였지만 이 접근법이 물리적으로 확실한 의미를 가지지 못해 크게 진전을 보지는 못하였다.

이상의 이론적인 연구와 함께 적용에 대한 많은 연구가 있었는데 Yeung(1991)은 Goodman and Bray의 전

도파괴에 대한 한계평형해석과 비교를 통해 불연속 변형 해석의 적용성을 확인하였고 3절점 보에 대한 해석도 행하였다. Sasaki 등(1996)은 전단에서의 응력분포, 변위를 실험과 유한요소해석, 불연속 변형 해석의 결과를 서로 비교하였다. 불연속 암반의 보강을 위해 록볼트와 라이닝 등의 보강재에 대한 모형이 연구되었으나(Yeung 등(1994), Ohnishi 등(1995)) 이들 보강재와 암반 사이의 비선형적인 거동을 실제적으로 모사하지는 못하였다. 그 외에 사면공학, 지반공학의 여러 분야에 좋은 적용성을 보였다(MacLaughlin(1997), Deng(1997), Pei(1999), Lin and Chen(1997)).

위에서 살펴본 바와 같이 불연속 변형 해석은 이론적인 수정과 동시에 현장적용에도 많은 영역을 넓혀가고 있다. 그러나 다른 해석법에 비해 20년 정도라는 짧은 기간동안 발전해온 해석법이기 때문에 지금도 많은 문제점을 내포하고 있어 지속적인 연구가 필요하며(Ma, 1999) 지금까지의 해석이 모두 평면변형률이나 평면응력을 가정한 이차원에서만 이루어진 해석인데 불연속면이 기본적으로 삼차원을 형성하므로 이차원으로 해석하는데는 한계가 있다. 삼차원으로 분포하는 불연속면의 분포가 해석에 많은 영향을 미치는 사면에 관련된 해석과 암반과 물의 상호작용에 대한 고려가 필요한 지하 원유 저장시설, 핵폐기물 처분장 등의 설계에서는 불연속면의 분포를 실제와 같이 고려할 수 있는 삼차원 해석에 대한 연구가 필요하다. 이에 이 연구에서는 기존 Shi(1984)가 개발한 이차원 불연속 변형 해석을 삼차원 불연속변형해석의 이론으로 확장하고 프로그램을 개발하여 실제 블록에 적용함으로써 개발된 이론과 프로그램의 타당성을 검증하였다.

## 2. 삼차원 블록생성과 접촉 찾기

### 2.1 삼차원 블록생성

이 해석을 위해 개발된 프로그램은 크게 두 부분으로 하나는 삼차원 불연속면을 입력자료로 하여 삼차원 블록을 만들어내는 프로그램이고 다른 하나는 이 블록자료와 물성자료들을 입력으로 하여 삼차원 DDA 해석을 하는 프로그램이다.

삼차원 블록발생프로그램은 Shi(1988)의 이차원 블록생성 알고리즘을 응용하였으며 입력자료로는 불연속면의 중점( $x, y, z$ ), 직경( $r$ ), 법선벡터( $m_1, m_2, m_3$ ), 외부경계좌표이고 출력자료는 삼차원 블록의 꼭지점, 모서리, 면 자료이다. 삼차원 DDA 해석 프로그램의 특성상 블록의 면은 삼각형으로 이루어져 있고, 이 삼각형의 세 꼭지점은 삼각형 법선이 블록의 외부로 향할 때 반시계

방향으로 정렬한 상태이다.

이 프로그램은 Shi가 C로 작성한 프로그램을 바탕으로 하여 포트란 90으로 작성되었으며 블록의 거동을 화면으로 나타내기 위해서 비주얼 베이직과 OpenGL을 이용하였다.

## 2.2 접촉 찾기

블록과 블록사이의 움직임을 계산하기 위해 변위 계산 전에 블록사이의 접촉이 일어나고 있거나 일어날 가능성이 있는 블록들 간의 관계를 먼저 파악해야 한다. 블록간의 접촉을 찾기 위해서 블록의 면을 편의상 삼각형으로 나누어야 한다.

블록간의 접촉은 각 접촉대상의 거리에 따라서 점-점(Vertex-Vertex) 접촉, 점-모서리(Vertex-Edge) 접촉, 점-삼각형(Vertex-Triangle) 접촉, 모서리-모서리(Edge-Edge) 접촉으로 분류할 수 있다. 이 분류는 자세하게 점, 모서리, 삼각형의 위치의 상호관계에 따라서 세부적인 분류를 할 수 있고 최종적인 접촉은 모두 점(Vertex)-삼각형 또는 모서리 위의 점(Point) - 삼각형 접촉의 형태가 된다.

### 2.2.1 거리에 따른 분류

#### a. 점-점(Vertex-Vertex) 접촉

한 블록의 점과 다른 블록의 점 사이의 최단거리가 허용거리( $d_0$ )이하이면 점-점 접촉이다.

#### b. 점-모서리(Vertex-Edge) 접촉

한 블록의 점과 다른 블록의 모서리 사이의 최단거리가 허용거리 이하이면 점-모서리 접촉이다. 점과 모서리의 최단거리를 계산하는 방법은 다음과 같다.

삼차원의 한 점을  $P_p=(x_p, y_p, z_p)$ , 모서리를  $\overline{P_A P_B}$  ( $P_A=(x_a, y_a, z_a)$ ,  $P_B=(x_b, y_b, z_b)$ )라 하면 모서리  $\overline{P_A P_B}$ 의 한 점  $P_c=(x_c, y_c, z_c)$ 는  $P_c=(1-r)P_A+rP_B(0 \leq r \leq 1)$ 으로 표시할 수 있다.  $P_p$ 와  $P_c$ 사이의 거리를  $r$ 에 대해서 미분하여 최소 거리가 되는  $r$ 값을 구하면 다음과 같다.

$$r = \frac{(x_a - x_p)(x_a - x_b) + (y_a - y_p)(y_a - y_b) + (z_a - z_p)(z_a - z_b)}{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2} \quad (1)$$

식 (1)의  $r$ 값을  $P_c$ 에 대입할 때의 거리가 점  $P_p$ 와 점  $P_c$ 사이의 최단 거리가 된다.

$r$ 이 0보다 작으면  $P_A(r=0)$ , 1보다 크면  $P_B(r=1)$ 와  $P_p$  사이의 거리가 점과 모서리의 최소거리가 된다.

#### c. 점-삼각형(Vertex-Triangle) 접촉

한 블록의 점과 다른 블록의 삼각형 사이의 최단거리가 허용거리 이하이면 점-삼각형 접촉이다. 점과 삼각

형의 최단거리를 계산하는 방법은 다음과 같다.

삼차원에서 한 블록 위의 세 점  $P_A, P_B, P_C$ 가 블록의 면을 이루는 삼각형의 세 점이고, 다른 블록의 점  $P_p$ 에서 삼각형 ABC까지의 최단 거리를 이루는 삼각형 위의 점을  $P_D$ 라 하면  $P_D = P_A + r_b \overline{P_A P_B} + r_c \overline{P_A P_C}$ 로 표시할 수 있다.  $P_A=(x_a, y_a, z_a)$ ,  $P_B=(x_b, y_b, z_b)$ ,  $P_C=(x_c, y_c, z_c)$ ,  $P_D=(x_d, y_d, z_d)$ ,  $P_p=(x_p, y_p, z_p)$ 라고 할 때  $P_p$ 와  $P_D$ 사이의 거리를  $r_b$ 와  $r_c$ 에 대해서 미분하여 최소거리가 되는  $r_b$ 와  $r_c$ 값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= 2((x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2) \\ B &= 2((x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2 + (z_c - z_a)^2) \\ C &= 2((x_c - x_a)(x_b - x_a) + (y_c - y_a)(y_b - y_a) + (z_c - z_a)(z_b - z_a)) \\ D &= -2((x_a - x_p)(x_b - x_a) + (y_a - y_p)(y_b - y_a) + (z_a - z_p)(z_b - z_a)) \\ E &= -2((x_a - x_p)(x_c - x_a) + (y_a - y_p)(y_c - y_a) + (z_a - z_p)(z_c - z_a)) \end{aligned}$$

일때

$$r_b = \frac{BD - CE}{AB - C^2}, \quad r_c = \frac{AE - CD}{AB - C^2} \quad (2)$$

이 된다.

$r_b, r_c$ 가 0보다 작거나 1보다 클 경우와  $r_b + r_c$ 가 1보다 큰 경우는 삼각형 내부에 최소거리점이 존재하지 않는 경우이다.

한 블록의 한 점은 다른 블록의 점, 모서리, 삼각형 중 하나와만 접촉한다.

#### d. 모서리-모서리(Edge-Edge) 접촉

한 블록의 모서리와 다른 블록의 모서리 사이의 최단거리가 허용거리 이하이면 모서리-모서리 접촉이다. 모서리와 모서리의 최단거리를 계산하는 방법은 다음과 같다. 한 블록의 모서리는 다른 블록의 여러 개의 모서리와 접촉할 수 있다. 모서리-모서리간의 최소거리점 구하는 방법은 다음과 같다.

삼차원의 두 모서리를  $\overline{P_A P_B}$  ( $P_A=(x_a, y_a, z_a)$ ,  $P_B=(x_b, y_b, z_b)$ ),  $\overline{P_C P_D}$  ( $P_C=(x_c, y_c, z_c)$ ,  $P_D=(x_d, y_d, z_d)$ ) 라하고 두 선분의 최소거리를 이루는 두 점을 각각  $P_1=(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2=(x_2, y_2, z_2)$ 라 하면

$P_1=(1-r_1)P_A+r_1P_B$ ,  $P_2=(1-r_2)P_C+r_2P_D$ 로 표시할 수 있다. 마찬가지로 앞의 방법으로 구하면

$$\begin{aligned} A &= 2((x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2) \\ B &= 2((x_d - x_c)(x_b - x_a) + (y_d - y_c)(y_b - y_a) + (z_d - z_c)(z_b - z_a)) \\ C &= 2((x_a - x_c)(x_b - x_a) + (y_a - y_c)(y_b - y_a) + (z_a - z_c)(z_b - z_a)) \\ D &= 2((x_d - x_c)^2 + (y_d - y_c)^2 + (z_d - z_c)^2) \\ E &= 2((x_a - x_c)(x_d - x_c) + (y_a - y_c)(y_d - y_c) + (z_a - z_c)(z_d - z_c)) \end{aligned}$$

라 할 때

$$r_1 = \frac{CD - BE}{B^2 - AD}, \quad r_2 = \frac{BC - AE}{B^2 - AD} \quad (3)$$

이 된다.

$r_1, r_2$ 가 0보다 작거나 1보다 클 경우 모서리 내부에 최소거리점이 존재하지 않는 경우이다. 그리고  $B^2 - AD = 0$ 인 경우는  $r_1, r_2$ 값을 구할 수 없는데 이는 두 모서리가 평행하거나 겹치는 경우이다. 이 때는 한 모서리의 임의의 한 점에서 다른 모서리까지의 거리가 최소거리이다.

**2.2.2 위치에 따른 분류**

거리에 따라 분류된 접촉을 점, 모서리, 삼각형의 위치에 따라서 최종 접촉의 형태를 결정할 수 있다.

**a. 점-점 접촉:** 점과 점의 거리가 허용거리 이내인 점-점 접촉은 한 블록의 점과 다른 블록의 삼각형간의 접촉으로 표현할 수 있다.

두 점을 a, b라하고 그 점이 속한 블록을 각각 A, B라 하면 점 a가 점 b와 가까운 거리에 있으므로 점 b를 공유하는 삼각형 중에서 블록 A 아래에 존재하는 삼각형이 있으면 점 a와 그 삼각형의 접촉으로 표현할 수 있다. 삼각형 보다 블록이 아래에 존재하면 블록에 속해 있는 점과 삼각형이 만날 가능성이 없기 때문이다. 여기서 블록이 삼각형 위에 있다는 것은 블록의 모든 점이 삼각형의 위에 존재한다는 것이다.

**b. 점-모서리 접촉**

점과 모서리간의 거리가 허용거리 이내인 점-모서리 접촉 역시 한 점과 삼각형의 접촉이나 모서리 위의 한 점과 삼각형과의 접촉으로 표현할 수 있다.

점을 a라 하고 점이 속한 블록은 A, 모서리가 속한 블록은 B라고 할 때 모서리는 블록B의 삼각형 중 두 개의 삼각형이 공유하는 직선이므로 이 두 개의 삼각형 중 블록A 아래 존재하는 삼각형이 점 a와 만날 수 있다.

점-모서리 접촉의 경우 점이 삼각형위로 미끄러지지 않고 점을 공유하는 모서리가 삼각형의 모서리와 미끄러지는 경우 위의 경우와 다르게 점을 공유하는 모서리 중 하나와 블록아래에 있는 삼각형과의 접촉이 된다.

**c. 점-삼각형 접촉**

여러 개의 접촉형태 중에서 가장 간단한 접촉형태이다. 점이 삼각형 내부에 있고 거리가 허용거리 이내이면 점-삼각형 접촉이다. 점이 식 (2)에서 ( $0 \leq r_b \leq 1, 0 \leq r_c \leq 1, r_b + r_c < 1$ )인 조건을 만족하면 삼각형 내에 존재한다.

**d. 모서리-모서리 접촉**

두 개의 모서리를 포함하는 삼각형을 각각 A, B라 하고 각 블록에 속한 모서리를 a, b라 할 때 모서리 a와 모서리 b의 접촉은 모서리 a가 모서리 b를 미끄러지는 접촉이므로 모서리 a위의 한 점과 모서리 b를 공유하는

두 개중 하나의 삼각형과의 접촉으로 표현할 수 있다.

**3. 삼차원 DDA이론**

**3.1 블록의 거동**

큰 변위(displacement)와 변형(deformation)은 작은 변위와 변형의 누적이다. 각 단계 안에서는 모든 점에서의 변위는 작으며 변위함수는 다음과 같이 단순화할 수 있다.

각 블록은 일정한 응력과 일정 변형률을 가지고 있다고 가정하고 블록의 임의의 점  $(x, y, z)$ 의 변위  $(u, v, w)$ 는 12개의 변위 변수로 표시할 수 있다.

$$(u_0, v_0, w_0, a_1, a_2, a_3, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) \quad (4)$$

$u_0, v_0, w_0$ 은 강체의 평행이동,  $a_1, a_2, a_3$ 은 무게중심에 대한 회전각(라디안),  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 는 블록의 응력과 변형률이다. 점  $(x, y, z)$ 의 변위  $(u, v, w)$ 는  $(u_0, v_0, w_0, a_1, a_2, a_3, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ 에 의해 발생된 변위들의 합이다. 이를 각 변수의 1차원 근사에 의해 표시하면 식 (5)와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = [T_i][D_i]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -(y-y_0) & 0 & (z-z_0) & (x-x_0) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (x-x_0) & -(z-z_0) & 0 & 0 & (y-y_0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (y-y_0) & -(x-x_0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} \quad (5)$$

여기서  $[T_i]$ 는 일차원 근사함수이고  $[D_i]$ 는 변위이며 좌표  $(x_0, y_0, z_0)$ 는 블록의 무게중심이다.

각각의 블록은 연결되어 있고 블록간의 접촉과 블록의 변위제약에 의해서 블록계를 형성한다. n개의 블록이 있다고 가정하면 평형을 이루는 연립방정식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

각 블록이 12개의 자유도를 가지고 있기 때문에 식 (6) 행렬의 각 계수인  $K_{ij}$  요소는 12x12인 행렬이다.  $F_i$ ,  $D_i$ 는 12x1 행렬이고  $F_i$ 는 블록 i에 분포하는 하중이며  $D_i$ 는 블록 i의 변형변수 ( $u_0, v_0, w_0, a_1, a_2, a_3, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ )이다. 부행렬  $[K_{ii}]$ (식 (6)의 대각선행렬)는 블록 i의 역학적 성질과 측정된 변위에 의해 정해지고  $[K_{ij}]$  ( $i \neq j$ )는 블록 i와 j의 접촉으로 정의된다.

이 평형방정식은 힘과 응력에 의해 발생하는 전체 포텐셜에너지  $\Pi$ 를 최소화시킴으로써 얻어진다. 식 (6)의 i번째 행은 12개의 선형식으로 이루어져 있다.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial d_{ri}} = 0, \quad r = 1, \dots, 12 \quad (7)$$

여기서  $d_{ri}$ 는 i블록의 변형변수이다. i블록식에 대하여

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_0} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_0} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial w_0} = 0 \quad (8)$$

식 (8)은 x, y, z 방향으로 블록 i에 작용하는 모든 하중과 접촉력의 평형을 나타낸다.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0 \quad (9)$$

식 (9)는 블록 i에 작용하는 모든 하중과 접촉력의 모멘트에 대한 평형을 나타낸다.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon_x} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon_y} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon_z} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{xy}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{yz}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{zx}} = 0 \quad (10)$$

식 (10)은 x, y, z를 따라 블록에 작용하는 모든 외력과 외부 응력의 평형을 나타낸다.

전체 포텐셜에너지  $\Pi$ 는 모든 각 응력과 힘에 의해 정해지는 포텐셜에너지 원의 합이다. 포텐셜에너지와 그것의 미분은 블록에 대해서 각각 계산된다.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial d_{ri} \partial d_{sj}}, \quad r, s = 1, \dots, 12 \quad (11)$$

식 (11)은 변수  $d_{ri}$ 에 대한 평형방정식 (6)의 미지수  $d_{sj}$ 의 계수이다. 그래서 (11)의 모든 항은 12x12 행렬을 이루고 이것은 전체행렬인  $[K]$ 의 부행렬이 된다. 식

(11)을 보면  $[K]$ 의 계수행렬이 대칭이라는 것을 알 수 있다.

$$\frac{\partial \Pi(0)}{\partial d_{ri}}, \quad r = 1, \dots, 12 \quad (12)$$

식 (12)는 식 (7)의 자유항을 식의 오른쪽으로 이항한 항이다. 그러므로 식 (12)는 12x1의 행렬을 이루고 행렬  $[F_i]$ 에 더해진다.

### 3.2 단일블록에 대한 부행렬(submatrix)

블록계의 전체 행렬을 만들기 위해서 단일 블록에 대한 부행렬에 대한 정의가 필요하다. 다음은 해석에 필요한 부행렬을 만드는 과정을 설명한 것이다.

#### 3.2.1 탄성부행렬

블록을 탄성으로 가정하고 각 블록에 대한 탄성행렬을 만들고 탄성에 의한 포텐셜에너지를 구한 다음 에너지 최소화에 의해 미분하여 부행렬을 만든다.

블록 i에 의해 발생하는 변형을 에너지  $\Pi_e$ 는 식 (13)과 같고 이를 최소화시키기 위해 미분하면 식 (14)를 얻을 수 있다.

$$\Pi_e = \int_V \frac{1}{2} (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \epsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{zx} \tau_{zx}) dV \quad (13)$$

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{pmatrix}$$

일때

$$V[E_i] \rightarrow [K_{ii}] \quad (14)$$

여기서  $V$ 는 i번째 블록의 체적,  $E$ 는 탄성계수,  $\nu$ 는 포아송비이다. 식 (15)는 블록의 체적과 무게중심을 구하는 식으로 이후의 모든 식에 적용된다.

$$x_0 = \frac{V_x}{V}, \quad y_0 = \frac{V_y}{V}, \quad z_0 = \frac{V_z}{V},$$

$$V = \int_V dV, V_x = \int_V x dV, V_y = \int_V y dV, V_z = \int_V z dV \quad (15)$$

**3.2.2 초기응력**

초기응력이 존재할 경우 각 블록에 대한 초기응력의 영향으로 인한 포텐셜에너지를 구한 다음 미분하여 부행렬을 만든다. 초기응력에 의한 블록의 변형률 에너지  $\Pi_\sigma$ 는 식 (16)과 같고 이를 최소화시키기 위해 미분하면 식 (17)을 얻을 수 있다.

$$[\sigma_0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_x^0 & \sigma_y^0 & \sigma_z^0 & \gamma_{xy}^0 & \gamma_{yz}^0 & \gamma_{zx}^0 \end{pmatrix}$$

을 초기응력값이라 할 때

$$\Pi_\sigma = \int_V -(\varepsilon_x \sigma_x^0 + \varepsilon_y \sigma_y^0 + \varepsilon_z \sigma_z^0 + \gamma_{xy} \tau_{xy}^0 + \gamma_{yz} \tau_{yz}^0 + \gamma_{zx} \tau_{zx}^0) dV \quad (16)$$

$$V[\sigma_0] = [F_i] \quad (17)$$

**3.2.3 점하중**

블록에 가해진 점하중이 ( $F_x, F_y, F_z$ )일 때 점하중에 의한 포텐셜에너지를 구한 다음 미분하여 부행렬을 만든다. 점하중에 의한 포텐셜에너지는 식 (18)과 같고 이를 최소화 시키기 위해서 미분하면 식 (19)를 얻을 수 있다. 식 (19)에서  $[T]$ 는 식 (5)에 있는 변위함수이다.

$$\Pi_p = -(F_x u + F_y v + F_z w) = -\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = -[D_i][T_i(x,y,z)] \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$[T]^T \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = [F_i] \quad (19)$$

**3.2.4 체적하중**

( $f_x, f_y, f_z$ )를 블록 i에 작용하는 일정한 체적력이라 하고 ( $x_0, y_0, z_0$ )를 중력이 작용하는 중심이라 하면 일정 체적력에 대한 포텐셜에너지는 식 (20)과 같고 이를 미분하여 정리하면 식 (21)을 얻을 수 있다.

$$\Pi_w = -\int_V (f_x u + f_y v + f_z w) dV \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} f_x S & f_y V & f_z V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [F_i] \quad (21)$$

**3.2.5 관성력**

시간단계가 정적, 동적해석 모두에 사용되는데 차이 점은 정적계산에서는 각 시간단계의 처음에서 속도가 0 이고 동적해석에서는 바로 앞 시간단계의 속도를 사용한다는 점이다.

( $u(t), v(t), w(t)$ )를 i블록의 점(x, y, z)의 시간 의존적

변위, M을 단위체적당 질량이라고 하면 체적당 관성력은 식 (22)와 같고 포텐셜에너지는 식 (23)이 된다.

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = -M \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Pi_i &= -\int_V \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} dV = \int_V M \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} \end{pmatrix} dV \\ &= \int_V M [D_i]^T [T_i]^T [T_i] \frac{\partial^2 [D(t)]}{\partial t^2} dV \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)을 최소화를 위해 미분하고 정리하면 식 (24), (25)가 된다.

$$\frac{2M}{\Delta^2} \int_V [T_i]^T [T_i] dV = [K_{ii}] \quad (24)$$

$$\frac{2M}{\Delta} \left( \int_V [T_i]^T [T_i] dV \right) [V_0] = [F_i] \quad (25)$$

식 (24), (25)에서  $\Delta$ 는 시간 간격을 의미한다.

**3.3 접촉행렬**

3.2절은 하나의 블록에 대한 부행렬을 만드는 식을 정리한 것이고 3.3절은 두 블록간의 수직접촉과 전단접촉에 관한 부행렬을 만드는 식을 정리한 것이다.

**3.3.1 수직접촉행렬**

삼차원에서 변형 후 점  $P_p$ 에서 평면 삼각형 ABC까지의 거리 d는 각 점을  $P_A=(x_a, y_a, z_a), P_B=(x_b, y_b, z_b), P_C=(x_c, y_c, z_c), P_p=(x_p, y_p, z_p)$  각 점의 변형을 각각 ( $u_a, v_a, w_a$ ), ( $u_b, v_b, w_b$ ), ( $u_c, v_c, w_c$ ), ( $u_p, v_p, w_p$ )라 하고 삼각형의 넓이가 변형 이전과 이후에 큰 차이가 없다고 가정하여  $A_0$ 라고 하면 식 (26)이 된다

$$d = \frac{1}{2A_0} \begin{vmatrix} 1 & x_a + u_a & y_a + v_a & z_a + w_a \\ 1 & x_b + u_b & y_b + v_b & z_b + w_b \\ 1 & x_c + u_c & y_c + v_c & z_c + w_c \\ 1 & x_p + u_p & y_p + v_p & z_p + w_p \end{vmatrix} \quad (26)$$

여기서,

$$A_0 = \left\{ \begin{aligned} &((y_b - y_a)(z_c - z_a) - (y_c - y_a)(z_b - z_a))^2 \\ &+ ((x_b - x_a)(z_c - z_a) - (x_c - x_a)(z_b - z_a))^2 \\ &+ ((x_b - x_a)(y_c - y_a) - (x_c - x_a)(y_b - y_a))^2 \end{aligned} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$S_0 = \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a & z_a \\ 1 & x_b & y_b & z_b \\ 1 & x_c & y_c & z_c \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{bmatrix} \text{라 하고 변위의 2차항을 무시}$$

하면 변형후의 점 P에서 삼각형 ABC까지의 거리 d는 식 (27)이 된다.

$$d = \left\{ S_0 + \begin{bmatrix} 1 & u_a & v_a & z_a \\ 1 & u_b & v_b & z_b \\ 1 & u_c & v_c & z_c \\ 1 & u_p & v_p & z_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a & z_a \\ 1 & x_b & y_b & z_b \\ 1 & x_c & y_c & z_c \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a & w_a \\ 1 & x_b & y_b & w_b \\ 1 & x_c & y_c & w_c \\ 1 & x_p & y_p & w_p \end{bmatrix} \right\} \frac{1}{2A_0}$$

$$- \frac{S_0}{2A_0} + \left\{ s_1^u \ s_1^v \ s_1^z \ \begin{pmatrix} u_a \\ v_a \\ z_a \end{pmatrix} + s_2^u \ s_2^v \ s_2^z \ \begin{pmatrix} u_b \\ v_b \\ z_b \end{pmatrix} + s_3^u \ s_3^v \ s_3^z \ \begin{pmatrix} u_c \\ v_c \\ z_c \end{pmatrix} + s_4^u \ s_4^v \ s_4^z \ \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ z_p \end{pmatrix} \right\} \quad (27)$$

여기서

$$S_1^a = -\frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} 1 & y_b & z_b \\ 1 & y_c & z_c \\ 1 & y_p & z_p \end{bmatrix}, \quad S_2^a = +\frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} 1 & x_b & z_b \\ 1 & x_c & z_c \\ 1 & x_p & z_p \end{bmatrix}, \quad S_3^a = -\frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \\ 1 & x_p & y_p \end{bmatrix}$$

$$S_1^b = +\frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} 1 & y_a & z_a \\ 1 & y_c & z_c \\ 1 & y_p & z_p \end{bmatrix}, \quad S_2^b = -\frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} 1 & x_a & z_a \\ 1 & x_c & z_c \\ 1 & x_p & z_p \end{bmatrix}, \quad S_3^b = +\frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_c & y_c \\ 1 & x_p & y_p \end{bmatrix}$$

$$S_1^c = -\frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} 1 & y_a & z_a \\ 1 & y_b & z_b \\ 1 & y_p & z_p \end{bmatrix}, \quad S_2^c = +\frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} 1 & x_a & z_a \\ 1 & x_b & z_b \\ 1 & x_p & z_p \end{bmatrix}, \quad S_3^c = -\frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_p & y_p \end{bmatrix}$$

$$S_1^p = +\frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} 1 & y_a & z_a \\ 1 & y_b & z_b \\ 1 & y_c & z_c \end{bmatrix}, \quad S_2^p = -\frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} 1 & x_a & z_a \\ 1 & x_b & z_b \\ 1 & x_c & z_c \end{bmatrix}, \quad S_3^p = +\frac{1}{2A_0} \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{bmatrix}$$

다음을 가정하면 식 (27)을 식 (28)과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \end{pmatrix} = [T_j(x_a, y_a, z_a)][D_j],$$

$$\begin{pmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{pmatrix} = [T_j(x_b, y_b, z_b)][D_j],$$

$$\begin{pmatrix} u_c \\ v_c \\ w_c \end{pmatrix} = [T_j(x_c, y_c, z_c)][D_j],$$

$$\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} = [T_i(x_p, y_p, z_p)][D_i]$$

$$d = \frac{S_0}{2A_0} + (e_1 \ e_2 \ e_3 \ \dots \ e_{12}) \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \\ \vdots \\ d_{12i} \end{pmatrix} + (g_1 \ g_2 \ g_3 \ \dots \ g_{12}) \begin{pmatrix} d_{1i} \\ d_{2i} \\ d_{3i} \\ \vdots \\ d_{12i} \end{pmatrix}$$

여기서

$$e_r = [s_1^r t_{1r}(x_p, y_p, z_p) + s_2^r t_{2r}(x_p, y_p, z_p) + s_3^r t_{3r}(x_p, y_p, z_p)]$$

$$g_r = [s_1^r t_{1r}(x_a, y_a, z_a) + s_2^r t_{2r}(x_a, y_a, z_a) + s_3^r t_{3r}(x_a, y_a, z_a)]$$

$$+ [s_1^b t_{1r}(x_b, y_b, z_b) + s_2^b t_{2r}(x_b, y_b, z_b) + s_3^b t_{3r}(x_b, y_b, z_b)]$$

$$+ [s_1^c t_{1r}(x_c, y_c, z_c) + s_2^c t_{2r}(x_c, y_c, z_c) + s_3^c t_{3r}(x_c, y_c, z_c)]$$

(r=1, ..., 12)이다.

식 (28)에서  $T_i$  : i 블록의 변형행렬,  $T_j$  : j 블록의

$$T = \begin{pmatrix} t_{1r} \\ t_{2r} \\ t_{3r} \end{pmatrix}, r = 1, \dots, 12$$

변형행렬, 이다.

그러므로 수직변위에 대한 포텐셜에너지  $\Pi_k$ 는 식 (29)가 된다.

$$\Pi_k = \frac{p}{2} d^2 = \frac{p}{2} \left( \sum_{r=1}^{12} e_r d_{ri} + \sum_{r=1}^{12} g_r d_{rj} + \frac{S_0}{2A_0} \right)^2$$

$$= \frac{p}{2} \left\{ \left( \sum_{r=1}^{12} e_r d_{ri} \right)^2 + \left( \sum_{r=1}^{12} g_r d_{rj} \right)^2 + 2 \sum_{r=1}^{12} e_r d_{ri} \sum_{r=1}^{12} g_r d_{rj} \right.$$

$$\left. + \frac{2S_0}{2A_0} \sum_{r=1}^{12} e_r d_{ri} + \frac{2S_0}{2A_0} \sum_{r=1}^{12} g_r d_{rj} + \left( \frac{S_0}{2A_0} \right)^2 \right\} \quad (29)$$

여기서 p는 스프링의 강성값으로 이 값이 크면 변위를 더 작게 억제할 수 있다. 포텐셜에너지 최소화를 위해 포텐셜에너지 항을 변위로 각각 미분하면 수직스프링에 의해 강성행렬항과 하중항에 포함되는 항을 구할 수 있으며 식 (30)가 된다.

$$\begin{aligned} p e_r e_s &\rightarrow [K_{i(r)i(s)}] \\ p e_r g_s &\rightarrow [K_{i(r)j(s)}] \\ p g_r e_s &\rightarrow [K_{j(r)i(s)}] \\ p g_r g_s &\rightarrow [K_{j(r)j(s)}] \end{aligned}, \text{ 여기서 } r, s = 1, \dots, 12 \quad (30)$$

$$-p \left( \frac{S_0}{2A_0} \right) e_r \rightarrow [F_i(r)]$$

$$-p \left( \frac{S_0}{2A_0} \right) g_r \rightarrow [F_j(r)]$$

### 3.3.2 전단 접촉행렬

블록 A, B가 있을 경우,  $P_0$ 는 블록 A의 점  $P_1$ 이 블록 B와 접촉하는 점(Fig. 1, 앞 단계에서 접촉한 점이면  $P_0$ 와  $P_1$ 은 좌표는 같고  $P_0$ 는 블록 B의 점,  $P_1$ 은 블록 A의 점이다)이다. 전단을 계산하기 위해서는 전단이 발생하는 경로를 알아야 한다. 이차원의 경우는 접촉하는 것이 점과 선이므로 그 선이 바로 전단경로가 되었지만 삼차원의 경우는 다르다. 접촉하는 두 개의 블록

의 움직임이 급격하게 발생하지 않으면 짧은 시간단계에서의 전단의 방향은 이전 스텝의 두 블록의 움직임에 의해 정해질 것이다. 이런 가정에서  $P_2, P_3$ 를 현 단계의 전단방향의 양 끝점이라 하면 이것은 블록A와 블록B의 이전 계산 단계의 변위에 의해 계산된 전단이동 경로를 접촉대상 삼각형에 투사한 직선이 블록B의 모서리와 만나는 두 점으로 정할 수 있다.

$$l = \sqrt{(x_2 + u_2 - x_3 - u_3)^2 + (y_2 + v_2 - y_3 - v_3)^2 + (z_2 + w_2 - z_3 - w_3)^2}$$

은  $\overline{P_2P_3}$ 의 변형후의 길이이고  $\overline{P_2P_3}$ 를 따라서 생기는  $P_0P_1$ 의 전단변위는 식 (31)이다.

$$d = \frac{1}{l} \overline{P_0P_1} \cdot \overline{P_2P_3}$$

$$= \frac{1}{l} \begin{pmatrix} (x_3 + u_3) - (x_2 + u_2) \\ (y_3 + v_3) - (y_2 + v_2) \\ (z_3 + w_3) - (z_2 + w_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1 + u_1) - (x_0 + u_0) \\ (y_1 + v_1) - (y_0 + v_0) \\ (z_1 + w_1) - (z_0 + w_0) \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \\ z_3 - z_2 \end{pmatrix}$$

여기서

라 하고 변위의 2차 항은 무시하면 식 (31)은 식 (32)가 된다.

$$d = \frac{S_0}{l} + \frac{1}{l} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - u_0 \\ v_1 - v_0 \\ w_1 - w_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{S_0}{l} + \frac{1}{l} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{l} \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \\ z_3 - z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\{H\} = \frac{1}{l} [T_{(i)}] \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

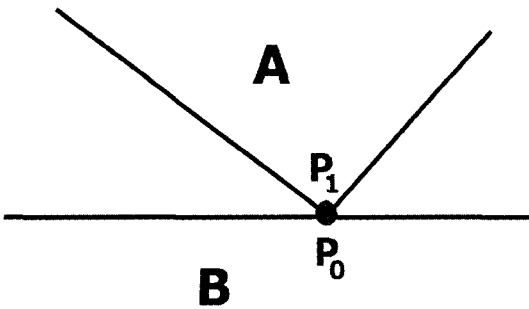


Fig. 1. Block A, B and point  $P_0, P_1$ .

$$\{G\} = \frac{1}{l} [T_{(j)}] \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ y_2 - y_3 \\ z_2 - z_3 \end{pmatrix} \text{이라 할 때 식}$$

(32)는 다시 식 (33)으로 간단히 표시할 수 있다.

$$d = \{H\}^T \{D_i\} + \{G\}^T \{D_j\} + \frac{S_0}{l} \quad (33)$$

그러므로 전단스프링의 포텐셜에너지는 식 (34)로 표시할 수 있고

$$\Pi_s = \frac{p}{2} d^2 = \frac{p}{2} \left( \{H\}^T \{D_i\} + \{G\}^T \{D_j\} + \frac{S_0}{l} \right)^2$$

$$= \frac{p}{2} \{D_i\}^T \{H\} \{H\}^T \{D_i\} + \{D_j\}^T \{G\} \{G\}^T \{D_j\}$$

$$+ 2\{D_i\}^T \{H\} \{G\}^T \{D_j\} + 2\frac{S_0}{l} \{D_i\}^T \{H\} + 2\frac{S_0}{l} \{D_j\}^T \{G\} + \left(\frac{S_0}{l}\right)^2 \quad (34)$$

포텐셜에너지 최소화를 위해 식 (34)를 변위로 각각 미분하면 전단스프링에 의해 강성행렬항과 하중항에 포함되는 항은 식 (35)가 된다.

$$p \{H_r\} \{H_s\}^T \rightarrow [K_{i(r)i(s)}]$$

$$p \{H_r\} \{G_s\}^T \rightarrow [K_{i(r)j(s)}]$$

$$p \{G_r\} \{H_s\}^T \rightarrow [K_{j(r)i(s)}]$$

$$p \{G_r\} \{G_s\}^T \rightarrow [K_{j(r)j(s)}]$$

$$- p \left(\frac{S_0}{l}\right) \{H_r\} \rightarrow [F_{i(r)}]$$

$$- p \left(\frac{S_0}{l}\right) \{G_r\} \rightarrow [F_{j(r)}], \quad \text{여기서 } r, s = 1, \dots, 12 \quad (35)$$

### 3.4 DDA의 해석 알고리즘

삼차원해석의 알고리즘은 이차원해석의 알고리즘과 동일한데 Fig. 2에 나타나있다. 먼저 블록을 발생시키기 위해서 불연속면자료와 고정점, 하중점 등의 자료를 입력하면 블록생성 프로그램에서 해석에 필요한 블록자료를 만든다. 블록자료와 함께 블록에 가해지는 하중, 블록의 물성, 불연속면의 물성치를 입력하여 저장한다. 불연속 변형 해석의 가장 큰 특징인 접촉을 고려하기 위해서 블록간의 접촉가능점을 찾는 것이 다음의 일이다. 그리고 식 (13)~(27)를 이용하여 식 (6)의 행렬을 만들게 된다. 식 (28)~(39)를 이용하여 접촉의 미끄러



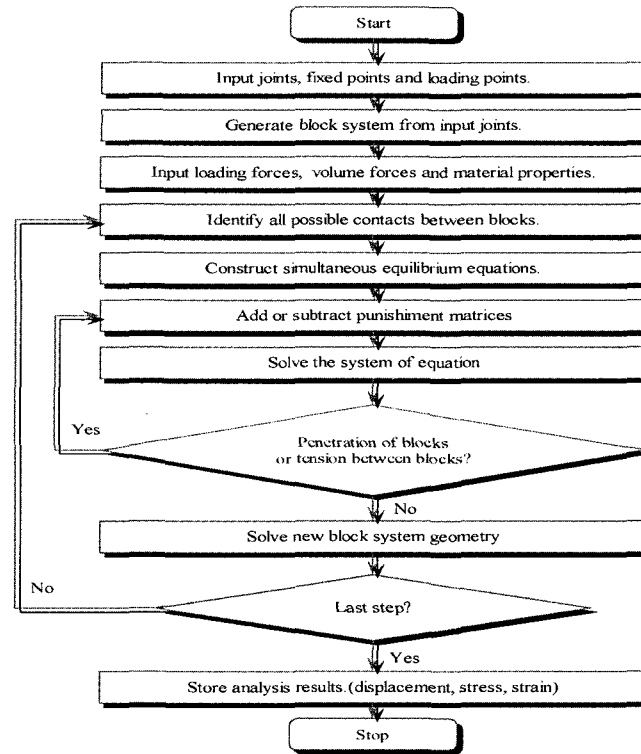


Fig. 2. Flowchart of three-dimensional DDA.

집, 고정에 따라 수직스프링과 전단스프링을 설치하고 행렬을 계산하여 변위행렬의 해를 구한다. 이후 모든 접촉에 대하여 접촉점이 블록을 침투하지는 않았는가, 블록간에 인장력이 존재하지 않는지를 판단한 다음 조건을 만족하지 않으면 수직, 전단 스프링을 다시 설치하고 조건을 만족하면 다음 시간 단계로 넘어가면서 시간 단계가 끝날 때까지 해석을 수행해서 결과를 저장한다.

#### 4. 적용

개발된 프로그램을 이용하여 두 가지의 사례에 대하여 적용하였다. 미끄러짐면이 1개인 사례와 2개인 사례에 대하여 적용하였으며 사용된 길이 단위는 m이다.

##### 4.1 미끄러짐면이 하나인 두개의 블록에 대한 적용

두 개의 블록이 하나의 미끄러짐 각도를 가지고 있는 해석을 실시하였다. 이 해석에 사용된 입력변수로는 블록의 좌표값과 물성이며 물성은 Table 1에 나타나있다.

Fig. 3은 두 개의 블록이 접촉한 상태에서 미끄러지는 모습을 나타낸다. 아래블록과 위 블록이 접해있는 평면

의 기울기는  $\tan(1/2)$ 로 각도로 계산하면  $26.57^\circ$ 이다. 두 블록은 4개의 접촉을 가지고 있는데 초기 상태에서는 미끄러짐면 위쪽 두 개의 점-모서리 접촉과 미끄러짐면 아래쪽 두 개의 점-모서리 접촉을 가지고 있다.

Fig. 4는 해석을 행하였을 때 50 step이 경과한 후의 모습이다. 마찰각을  $10^\circ$ 로 입력했기 때문에 미끄러지는 것을 볼 수 있고 초기 상태와 다르게 두 개의 점-삼각형 접촉과 두 개의 모서리-모서리 접촉을 가지고 있다.

Fig. 5는 Fig. 4와 같은 조건에서 100 step이 경과한 후의 모습이다. 계속 미끄러지다가 위 블록의 무게중심이 아래 부분 모서리를 지나고 난 후 반시계 방향으로 회전하여 떨어지는 모습을 볼 수 있다. 현재의 접촉은 두 개의 모서리-모서리 접촉만 있는 상태이다.

Fig. 6은 Fig. 3의 블록으로 마찰각을  $25^\circ$ 에서  $28^\circ$ 까지 변화시키면서 면의 경사와 동일한 각도일 때 미끄러지는지를 시험한 결과이다. 측정점은 블록 A(Fig. 3)의 점 a의 z축 좌표로서 초기상태 좌표는 7.5이고 시간 스텝이 경과할수록 낮아진다. 마찰각이 경사각보다 클 때는 정지하여 초기상태에서 변화가 없고 마찰각이 경사각보다 작다면 계속 낮아질 것이다. 일정한 시간스텝을

**Table 1.** Mechanical properties used in chapter 4.1.

스프링의 강성	2 GN/m	시간스텝	0.1 sec
블록의 단위중량	2.7 t/m <sup>3</sup>	총 스텝	200
블록의 탄성계수	1 GPa	포아송비	0.24

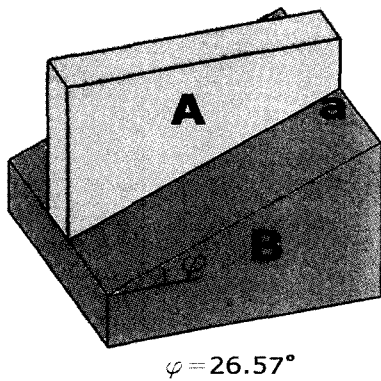
기준으로 마찰각을 변화시켰으므로 마찰각이 작을수록 많이 미끄러져서 작은 좌표값을 보일 것이다. Fig. 6에서 보면 마찰각이 경사각보다 작은 지점에서는 마찰각이 증가할수록 좌표값이 증가하다가 정확하게 26.57° 이상의 각도에서 미끄러짐이 정지하여 초기상태와 같은 7.5의 값을 나타낸다. 그러므로 이 해석이 정확하게 미끄러짐을 계산한다는 것을 알 수 있다.

**4.2 췌기의 미끄러짐에 대한 적용**

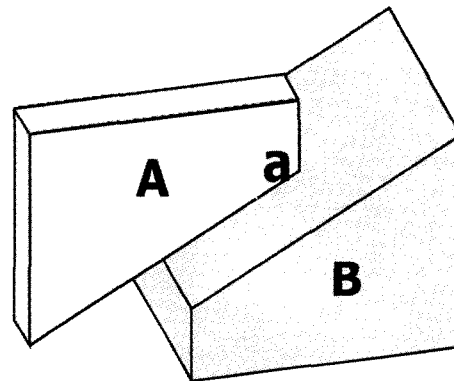
미끄러짐면이 2개일 때 미끄러짐을 정확히 계산하는 것을 판단하기 위해서 다음의 해석을 실시하였다. 물성

은 4.1의 해석과 같은 값으로 Table 1을 이용하였다.

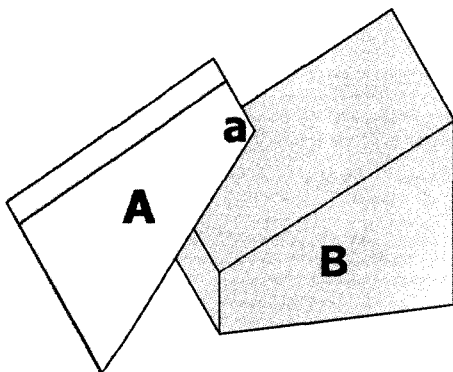
Fig. 7은 가로, 세로, 높이가 각각 -5~5까지 길이 10인 정사각형의 블록이 각각의 중심이 (0, 5, 0), (0, 5, -1.25), 경사가 40°, 60° 경사방향이 130°, 220°인 두 개의 불연속면에 의해 분리되어 4개의 블록이 된 해석 전 모습을 보여준다. Fig. 3~6의 해석에서는 하나의 면으로 미끄러지는 해석이지만 Fig. 7~9의 해석은 두 개의 면으로 동시에 미끄러지는 해석이다. Fig. 7의 췌기 모양 블록인 블록 B를 제외하고 나머지 블록들을 고정시키고 블록 B만 마찰각의 크기에 따라 움직이게 된다. 이 해석은 삼차원 개별요소프로그램인 3DEC과의 비교



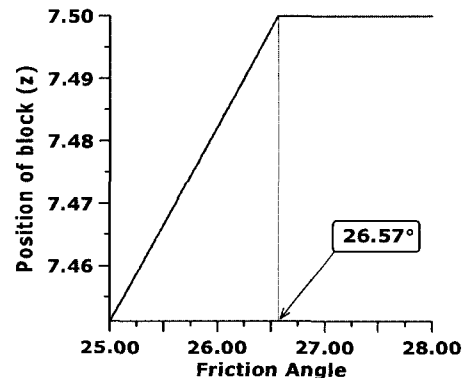
**Fig. 3.** Sliding of block A over block B(initial state).



**Fig. 4.** Sliding of block A over block B(after 50 steps).



**Fig. 5.** Sliding of block A over block B(after 100 steps).



**Fig. 6.** Position of block(z-coordinate of point a) as a function of friction angle(after 100 steps).

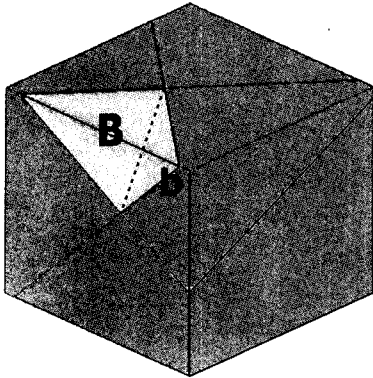


Fig. 7. Deformed block B of wedge sliding analysis (initial state).

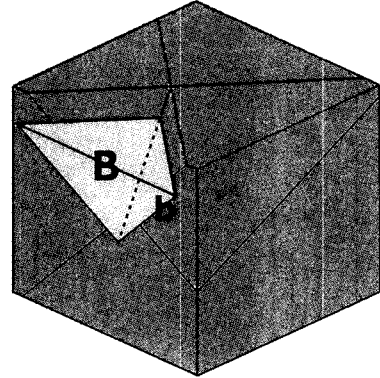


Fig. 8. Deformed block B of wedge sliding analysis (after 200 steps).

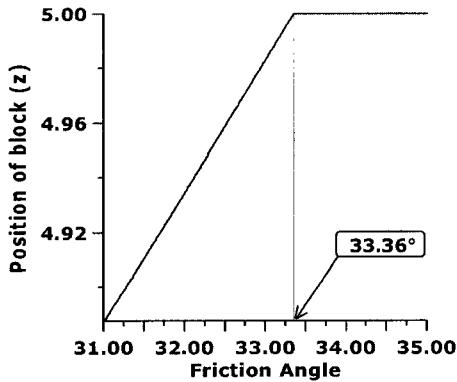


Fig. 9. Position of block (z-coordinate of point b) as a function of friction angle (after 200 steps).

를 위해 모델링하였으며 3DEC Version 2.0의 Verification Problem의 sliding wedge(Itasca, 1998)의 모델과 동일하다.

Fig. 8은 마찰각이 10°일 때 200 step 후 블록B가 미끄러지는 모습을 보여준다. 초기 상태일 때는 블록B가 양쪽 블록과 각각 3개씩 총 6개의 점-점 접촉이 있다가 미끄러지면서 블록B가 양쪽 블록과 각각 점-삼각형 접촉 2개, 모서리-모서리 접촉 1개씩 총 6개의 접촉상태로 변한다.

Fig. 9는 블록 B가 두 개의 평면과 마찰할 때 미끄러짐 각도를 계산하기 위해 마찰각을 31°부터 35°까지 변화시키면서 블록 B의 오른쪽 점 b의 z좌표를 측정하였다. Hoek and Bray(1979)에 의해 계산된 썩기의 임계 마찰각은 33.36°이고 3DEC에 의해 계산된 값(Itasca, 1998)은 이론값과 0.5%의 차이를 가지는 33.19°이며

본 연구에서 개발된 3D-DDA의해 계산된 값은 Fig. 9와 같이 이론값과 정확히 일치하는 33.36°로 계산되어 프로그램의 정확성을 확인하였다.

### 5. 결 론

Shi가 개발한 불연속 변형 해석(DDA)을 사면안정성 해석이나 수리해석과의 상호작용해석에 적용하기 위해 삼차원으로 이론을 확장하고 프로그램을 개발하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 해석을 위한 접촉을 거리에 따라 점-점, 점-모서리, 점-삼각형, 모서리-모서리 분류하였고 상태에 따라서 최종적으로 점(vertex)-삼각형(triangle), 모서리 위의 점(point)-삼각형(triangle) 형태의 접촉으로 분류하였다.
- 2) 삼차원 이론 전개를 위해 변위변수의 1차원 근사함수를 구하였으며 전체 포텐셜에너지최소화를 이용하여 변위를 구하기 위해 탄성부행렬, 초기응력부행렬, 점하중부행렬, 체적하중부행렬을 유도하였다.
- 3) 접촉을 고려한 해석이므로 두 블록의 수직, 전단 접촉, 마찰력 행렬을 유도하여 해석에 이용하였다.
- 4) 개발한 프로그램을 이용하여 일정한 경사를 가진 블록 위에 있는 블록의 미끄러짐에 대해서 적용한 결과 아래 두 블록사이의 마찰각이 블록의 경사각과 정확히 일치할 때 미끄러짐이 더 이상 발생하지 않고 정지하는 것을 확인하여 프로그램의 타당성을 검증하였다.
- 5) 삼차원 개별요소 상용 프로그램인 3DEC과의 비교를 위해 썩기의 미끄러짐을 해석하여 이론값과 정확히 일치하는 임계마찰각을 구하여 3DEC보다 좋은

계산결과를 얻었다.

- 6) 이상의 삼차원 이론확장과 검증을 바탕으로 향후 보다 많은 블록을 고려할 수 있는 사면안정성해석과 암반과 물의 상호작용을 고려한 지하 비축기지, 핵 폐기물저장시설 등에 대한 안정성 해석에 적용될 수 있을 것이다.

## 사 사

“이 논문은 1997년도 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 지원되었음” (KRF-97-005-E00039).

## 참고문헌

- 이연규, 1994, 록복트로 보강한 절리암반의 점소성거동에 관한 수치해석 모델 개발, 서울대학교 대학원 자원공학과 박사학위논문.
- Cai, Y., Liang, G.P., Shi, G. and Cook, N.G.W., 1996, Studying an impact problem by using LDDA method, Proceeding of the First International Forum on Discontinuous Deformation Analysis and Simulation of Discontinuous Media, Berkeley, CA, 288-294.
- Chen, M.H., Wang, C.Y., and Sheng, J., 1997, Static contact problems of discrete systems solved by the diffuse element method, Proceedings of the Second International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation, Kyoto, Japan, 323-342.
- Cundall, P.A., 1990, Numerical modelling of jointed and faulted rock, Proceedings of the International Conference on Mechanics of Jointed and Faulted Rock, Vienna, Austria, 11-18.
- Cudall, P.A., 1998, 2DEC User's manual, Itasca consulting group.
- Deng, X, 1997, Dynamic deformation and stress field analysis of fault, The Second International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation, Kyoto, 211-217.
- Goodman, R.E., Taylor, R.L., and Brekke, T.L., 1968, A model for the mechanics of jointed rock., Proceedings of ASCE, Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, Vol. 94, 637-660.
- Hock, E., Bray, J.W., 1977, Rock slope engineering, Institute of Mining and Metallurgy, London.
- Koo, C.Y. and Chern, J.C., 1996, The development of DDA with third order displacement function, Proceedings of the First International Forum on Discontinuous Deformation Analysis and Simulations of Discontinuous Media, Berkeley, 342-349.
- Lin, C.T., 1995, Extensions to the discontinuous deformation analysis for jointed rock masses and other blocky systems, Ph.D. dissertation, Dept. Civil Eng. and Arch. Eng., University of Colorado
- Lin, J.S., Chen, S, 1997, Soil slope stability using DDA, The Second International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation, Kyoto., 238-244.
- Ma, Y.M, Zaman, M. and Zhu, J.H., 1996, Discontinuous deformation analysis using the third order displacement function, First International Forum on Discontinuous Deformation Analysis and Simulations of Discontinuous Media, Berkeley, 383-394.
- Ma, Y.M., 1999, Development of discontinuous deformation analysis the first ten years(1986 to 1996), Third International Forum on Discontinuous Deformation Analysis and Simulations of Discontinuous Media, Vail, 17-32.
- MacLaughlin, M.M., 1997, Discontinuous deformation analysis of the kinematics of landslides, PhD. Dissertation, Civil Eng. U.C. Berkeley
- Ohnishi, Y., Chen, G. and Miki, S., 1995, Recent development of DDA in rock mechanics, Proceedings of the First International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation, Chungli, Taiwan, 26-47.
- Pande, G.N., and Beer, G., 1990, Numerical methods in rock mechanics., John Wiley & Sons Ltd., England.
- Pei J.M., 1999, Method of stability analysis of dam-foundation-plant system, Third International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation, Vail, 97-106.
- Sasaki, T., Morikawa, S., Ishii, D., Ohnishi, Y., and Yoshinaka, R., 1996, Comparison with DDA and FEM by jointed rock foundation models, First International Forum on Discontinuous Deformation Analysis and Simulations of Discontinuous Media, Berkeley, 432-439.
- Shi, G-H, and Goodman, R.E., 1984, Discontinuous deformation analysis, Proceedings of the 25th U.S. Symposium on Rock Mechanics, 269-277.
- Shi, G-H, 1988, Discontinuous deformation analysis: a new numerical model for the static and dynamics of block systems, PhD thesis, Civil Eng., University of California, Berkeley.
- Yeung, M.R., 1991, Application of Shi's discontinuous deformation analysis to the study of rock behavior, PhD. Dissertation, Civil Eng., U.C. Berkeley.
- Yeung, M.R., Klein, S.J. and Ma, Y.M., 1994, Application of discontinuous deformation analysis to the evaluation of rock reinforcement for tunnel stabilization, First North American Rock Mechanics Symposium, Austin, 607-614.

**장 현 익**

1994년 서울대학교 자원공학과 학사  
1996년 서울대학교 자원공학과 석사  
2001년 서울대학교  
지구환경시스템공학부 박사

Tel: 02-880-8701(311)

E-mail: janghi@rockeng.snu.ac.kr

현재 서울대학교 공학연구소 연수연구원

**이 정 인**

1963년 서울대학교 광산학과, 공학사  
1965년 서울대학교 광산학과, 공학석사  
1974년 일본 동경대 자원공학과,  
공학박사

Tel: 02-880-8708

E-mail: cilee@plaza.snu.ac.kr

현재 서울대학교 지구환경시스템공학부  
교수