

상호연결망 HCN(n, n)의 고장허용도 및 HCN(n, n)과 HFN(n, n) 사이의 임베딩

이 형 옥[†] · 김 종 석^{††}

요 약

임베딩은 어떤 상호연결망 G 를 다른 상호연결망 H 에 사상시키는 것으로 연결망 G 에서 개발된 알고리즘을 다른 연결망 H 에서 시뮬레이션 할 수 있게 한다. 본 논문에서는 먼저 Hierarchical Cubic Network HCN(n, n) and Hierarchical Folded-hypercube Network HFN(n, n) 사이의 임베딩 방법을 제시한다. HCN(n, n)과 HFN(n, n)은 하이퍼큐브에서 제안된 성질을 가지면서 하이퍼큐브의 망비용(분지수 \times 지름)을 개선한 상호연결망이다. HCN(n, n)은 HFN(n, n)에 연장을 3, 밀집을 2로 임베딩되고 평균연장율이 2 이하임을 보인다. HFN(n, n)은 HCN(n, n)에 연장을 $O(n)$ 에 임베딩 되지만, 평균연장율이 2 이하임을 보인다. 마지막으로 HCN(n, n)의 고장허용도에 대해 논하고, HCN(n, n)이 최대 고장 허용도(maximally fault tolerant)를 가짐을 보인다.

The Fault Tolerance of Interconnection Network HCN(n, n) and Embedding between HCN(n, n) and HFN(n, n)

Hyeong-Ok Lee[†] · Jong-Seok Kim^{††}

ABSTRACT

Embedding is a mapping an interconnection network G to another interconnection network H . If a network G can be embedded to another network H , algorithms developed on G can be simulated on H . In this paper, we first propose a method to embed between Hierarchical Cubic Network HCN(n, n) and Hierarchical Folded-hypercube Network HFN(n, n). HCN(n, n) and HFN(n, n) are graph topologies having desirable properties of hypercube while improving the network cost, defined as degree \times diameter, of Hypercube. We prove that HCN(n, n) can be embedded into HFN(n, n) with dilation 3 and congestion 2, and the average dilation is less than 2. HFN(n, n) can be embedded into HCN(n, n) with dilation $O(n)$, but the average dilation is less than 2. Finally, we analyze the fault tolerance of HCN(n, n) and prove that HCN(n, n) is maximally fault tolerant.

키워드 : 상호연결망(interconnection network), 연결도(connectivity), 고장허용도(fault tolerance), 임베딩(embedding)

1. 서 론

컴퓨터 기술의 발전으로 종전에는 과학계산 분야로 한정되었던 컴퓨터의 사용 범위가 문자나 음성, 영상 등 새로운 형태의 정보를 처리하는 방향으로 넓어지고 있다. 컴퓨터를 이용하는 현대의 과학과 공학 분야의 문제들은 많은 계산을 수행하여야 하면서도 빠른 시간에 해를 구해야 하므로 기존의 컴퓨터보다 더욱 빠른 계산 능력을 갖는 고성능 컴퓨터에 대한 요구가 증가하고 있다. 최근 컴퓨터 설계에서 성능

향상을 위한 방법으로써 병렬 처리(parallel processing) 기술이 널리 사용되고 있다. 병렬 처리란 다수의 프로세서들이 여러 개의 프로그램 또는 한 프로그램의 분할된 부분들을 분담하여 동시에 처리하는 기술을 말한다.

병렬처리 컴퓨터는 크게 공유 메모리를 갖는 다중 프로세서(multiprocessor)시스템과 분산 메모리를 갖는 다중 컴퓨터(multicomputer)시스템으로 분류할 수 있다. 다중 컴퓨터 시스템의 각 프로세서들은 자신의 지역 메모리 장치를 갖고, 프로세서들은 정적인 상호 연결망(static interconnection network)에 의해 연결되어 있으며 이들 프로세서들 간의 통신은 상호 연결망을 통한 메시지 전송(message pass-

[†] 종신회원 : 순천대학교 컴퓨터학과 교수

^{††} 준회원 : 순천대학교 대학원 컴퓨터학과

논문접수 : 2002년 4월 24일, 심사완료 : 2002년 7월 2일

ing)에 의해 이루어지고 계산은 데이터 구동(data driven) 방식을 취한다[6, 15]. 상호 연결망의 구분은 노드간의 연결 관계가 고정되어 있는 정적인 상호 연결망과 노드간의 연결 관계가 조건에 따라 동작하는 동적인 상호 연결망으로 나눈다. 본 논문에서의 상호 연결망은 정적인 상호 연결망을 대상으로 한다. 상호 연결망은 각 프로세서를 노드로, 프로세서들 간의 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프로써 표현될 수 있다. 상호 연결망은 다음과 같이 무방향 그래프 $G=(V, E)$ 로 표현된다[7]. 여기서 $V(G)$ 는 노드들의 집합, 즉 $V(G) = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 이고, $E(G)$ 는 에지의 집합으로써 $V(G)$ 내의 임의의 두 노드 v 와 w 의 쌍 (v, w) 로서 에지 (v, w) 가 존재할 필요충분 조건은 노드 v 와 w 사이에 통신 채널이 존재하는 것이다. 다중 컴퓨터의 프로세서들을 연결하기 위한 상호 연결망 구조는 전체 시스템의 성능 및 시스템의 확장성에 큰 영향을 미친다. 따라서 상호 연결망에 대한 연구는 병렬 처리 컴퓨터 개발을 위한 기반으로 그 필요성은 계속 증가하고 있다. 지금까지 제안된 상호연결망은 메쉬, 하이퍼큐브[9, 15, 17], HCN[8, 18], HFN[5], 스타그래프[12] 등이 있으며, 상호 연결망을 평가하는 망 척도는 분지수(degree), 지름(diameter), 대칭성(symmetry), 확장성(scalability), 고장 허용도(fault tolerance), 방송(broadcasting) 및 임베딩(embedding) 등이 있다[2, 3, 10, 11, 14].

상호연결망의 고장허용도는 상호연결망을 구성하는 노드 또는 에지에서 고장이 발생하더라도 상호연결망이 연결되어 있어서 계속 동작이 가능한지를 평가하는 분야이다[7]. 임베딩은 상호연결망 G 의 프로세서와 통신링크를 다른 연결망 H 의 프로세서와 통신링크들로 사상하는 것으로서, 상호연결망 G 에서 개발된 알고리즘을 상호연결망 H 에서 효율적으로 실행시킬 수 있는지를 연구하는 분야중의 하나이다. 임베딩의 비용을 평가하는 척도는 연장을(dilation), 밀집율(congestion), 확장율(expansion) 등이 있다[2, 17].

본 논문에서는 하이퍼큐브를 기본 모듈로 갖는 HCN(n, n)과 Folded-하이퍼큐브를 기본 모듈로 갖는 HFN(n, n) 사이의 임베딩을 분석하고, HCN(n, n)에서 분지수-1개의 노드가 고장이 발생해도 HCN(n, n)이 연결되어 있음을 통해 최대고장허용도(maximally fault tolerant)를 가진다는 것을 증명한다. 임베딩에 있어서는 HCN(n, n)이 HFN(n, n)에 연장을 3, 밀집율 2로 임베딩 가능함을 보이고, 평균 연장이 2 이하임을 보인다. 그리고 HFN(n, n)이 HCN(n, n)에 임베딩하는 비용이 $O(n)$ 이지만, 평균 연장이 2 이하임을 보인다. 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 본 논문에서 제시하는 상호연결망에 대한 관련연구 분야를 살펴보

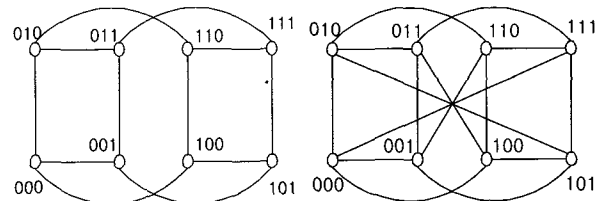
고, 제 3장에서는 HCN(n, n)의 연결도와 상호연결망 사이의 임베딩을 분석하며, 제 4장에서 결론을 맺는다.

2. 관련 연구

그래프의 임베딩(embedding)은 어떤 그래프가 다른 그래프 구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해, 어떤 특정한 그래프를 다른 그래프에 사상(mapping)하는 것이다. 그래프 G 의 그래프 H 에 대한 임베딩 f 는 다음과 같이 정의되는 함수의 쌍 (ϕ, ρ) 을 말한다. ϕ 는 G 의 정점 집합 $V(G)$ 를 H 의 정점 집합 $V(H)$ 에 대응시키는 함수이고, ρ 는 G 의 에지 $e=(v, w)$ 에서 $\phi(v)$ 와 $\phi(w)$ 를 잇는 H 상의 경로로 대응시키는 함수이다. 임베딩의 비용을 나타내는 척도는 연장을, 밀집율, 확장율 등이 사용되고 있다. 그래프 G 의 에지 e 의 연장은 H 상에서의 경로 $\rho(e)$ 의 길이를 말하고, 임베딩 f 의 연장은 G 의 모든 에지의 연장을 중 최대값이다. 그래프 H 의 에지 e' 의 밀집율은 e' 에 포함되는 $\rho(e)$ 의 개수를 말하고, 임베딩 f 의 밀집율은 H 의 모든 에지의 밀집율 중 최대값이다. 임베딩 f 의 확장율은 G 의 정점의 개수에 대한 H 의 정점의 개수의 비를 말한다.

지금까지 제안된 상호연결망을 노드 수를 중심으로 분류하면 $n \times k$ 개의 노드를 갖는 메쉬(mesh), 2^n 개 노드를 갖는 하이퍼큐브(hypercube), $n!$ 개 노드를 갖는 스타(star) 그래프 부류로 나눌 수 있고, 이들에 대한 단점을 개선한 여러 가지 연결망들이 제안되었다.

하이퍼큐브는 노드 및 에지 대칭이고 단순한 재귀적 구조를 가지고 있어서 각종 응용 분야에서 요구하는 통신망 구조를 쉽게 제공할 수 있는 장점이 있으며, Intel iPSC, nCUBE, Connection Machine CM-2, SGI Origin 2000 등의 시스템에서 사용되고 있다[15, 16]. 또한 임베딩 관점에 있어서 링, 트리, 피라미드, 메쉬 등과 같은 다른 연결망 구조들이 효율적으로 임베딩 될 수 있다는 장점이 있지만 분지수에 비해 지름과 노드간의 평균 거리가 짧지 않다는 단점이 있다. 이것은 하이퍼큐브가 에지를 효율적으로 사용하지



(a) 3차원 하이퍼큐브 (b) 3차원 Folded-하이퍼큐브

(그림 1) 하이퍼큐브와 Folded-하이퍼큐브

못함을 의미한다. 이러한 단점을 개선한 새로운 상호 연결망으로 Hierarchical Cubic Network[8, 18], Multiply-Twisted-Cube, Folded-hypercube[6], Hierarchical Folded-하이퍼큐브[5], 재귀원형군[16] 등이 있다.

n -차원 하이퍼큐브 Q_n 은 2^n 개의 노드와 $n2^{n-1}$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n -비트 이진수로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드의 주소가 정확히 1 비트만 다를 때 그들 사이에 에지가 존재한다. n -차원 하이퍼큐브는 분지수와 지름이 각각 n 을 가지면서 망비용(network cost)이 n^2 인 정규그래프이다.

Folded-하이퍼큐브는 기존 하이퍼큐브에서 각 노드의 주소가 보수관계에 있는 노드들간에 에지를 한 개 추가한 것으로서 하이퍼큐브의 지름을 절반정도 개선한 상호 연결망이다.

HCN(n, n)은 n -차원 하이퍼큐브를 기본 모듈로 하고, 각 기본모듈 내부의 노드가 n -차원 하이퍼큐브를 갖는다. HCN(n, n)은 2^{2n} 개의 노드와 분지수 $n+1$, 그리고 $(n+1)2^{2n-1}$ 개의 에지로 구성되어 있다. HCN(n, n)을 구성하는 노드 주소는 (I, J)로 표현하고, I 는 노드가 속한 기본 모듈을 나타내고 J 는 기본 모듈 내의 노드를 표현한다. 기본 모듈 안의 노드를 연결하는 에지는 내부 에지라 하고, 기본 모듈 사이의 노드를 연결하는 에지는 외부 에지라 한다. 외부 에지는 diameter link와 non-diameter link로 나눈다. diameter link는 조건 $0 \leq I \leq (2^n-1)$ 와 $0 \leq J \leq (2^n-1)$ 을 만족하는 노드 (I, I)와

〈표 1〉 하이퍼큐브와 그 변형된 연결망에서의 망 비용

연결망	망척도	노드수	분지수	지름	망 비용
하이퍼큐브 Q_{2n}		2^{2n}	$2n$	$2n$	$4n^2$
Folded-하이퍼큐브		2^{2n}	$2n+1$	n	$2n^2+n$
HCN(n, n)		2^{2n}	$n+1$	$n+1 - \frac{(n+1)}{3} \lfloor +1$	$\cong \frac{4}{3}n^2 + \frac{8}{3}n$
HFN(n, n)		2^{2n}	$n+2$	$2 \times \lceil \frac{n}{2} \rceil +1$	$\cong n^2+3n$

(J, J) 사이의 외부 에지를 말하는데 I 와 J 는 보수적 성격을 지닌다. diameter link가 아닌 외부 에지는 non-diameter link로서, (I, J)와 (J, I)를 연결하는 에지이다. HCN(n, n)에서 제안된 알고리즘으로 Routing, Ascend/Descend 알고리즘 등[8, 18]이 있다.

HFN(n, n)의 구조는 HCN(n, n)의 정의에서 다음 두 가지의 에지 변형을 적용하여 구성된 그래프이다. 첫째, 하이퍼큐브 대신에 Folded-하이퍼큐브를 기본 모듈로 사용한다. 둘째, HCN(n, n)의 diameter link를 제거한다. 따라서 HFN(n, n)은 노드 2^{2n} 개, 분지수 $n+2$, 전체 에지 수는 $(n+2)2^{2n-1} - 2^{n-1}$ 로 구성된다.

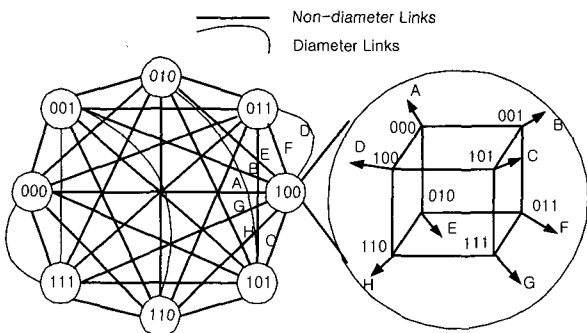
3. 고장 허용도와 임베딩

3.1 HCN(n, n)의 연결도

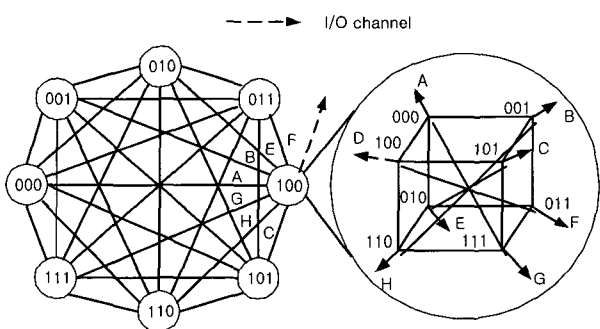
노드(에지) 연결도는 상호연결망을 노드 중복 없이 둘 이상의 부분으로 나누기 위해 제거해야 할 최소 노드(에지)의 개수이다. 주어진 상호 연결망에서 임의의 $k-1$ 개 이하의 노드가 제거되더라도 상호 연결망이 연결되어 있고, 적절한 k 개의 노드가 제거되었을때 상호 연결망이 분리되면 그 상호 연결망의 연결도를 k 라 한다. 노드 연결도와 분지수가 같은 상호 연결망을 최대 고장 허용도(maximally fault tolerance)를 가졌다고 한다[1]. 상호연결망 G 의 노드 연결도, 에지 연결도, 분지수를 각각 $k(G)$, $\lambda(G)$, 그리고 $\delta(G)$ 로 하고, $k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 인 사실이 알려져 있다[16]. 본 논문에서는 HCN(n, n)이 최대고장허용도를 가짐을 보이기 위해 HCN(n, n)의 노드 연결도와 분지수가 동일함을 보이고, 그 결과를 통해 HCN(n, n)이 최대고장허용도를 가짐을 보인다.

정리 1 $k(\text{HCN}(n, n)) = n+1, (n \geq 2)$

증명 HCN(n, n)에서 임의의 n 개 노드를 제거해도 HCN(n, n)이 분할되지 않음을 보인다.



(그림 2) HCN(3,3)



(그림 3) HFN(3,3)

HCN(n, n)의 노드를 표현하는 (I, J) 에서 I 는 기본모듈 자체 주소이고, J 는 기본모듈 내부의 노드 주소이다. HCN(n, n)의 기본모듈은 2^n 개의 하이퍼큐브 Q_n 로 구성되어 있고, 기본모듈 내부의 노드 (I, J) 는 non-diameter link에 의해 다른 모듈의 노드 (J, I) 에 연결되어 있거나($1 \leq I, J \leq 2n, I \neq J$), 또는 diameter link에 의해 다른 모듈의 노드 (\bar{I}, \bar{J}) 에 연결되어 있으며($1 \leq I = J \leq 2n$), HCN(n, n)의 각 노드당 분지수는 $n+1$ 이다.

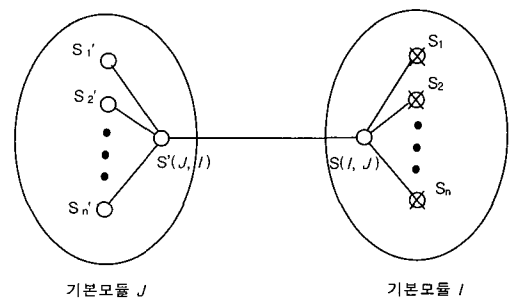
HCN(n, n)에서 X 는 고장이 발생한 노드들이고, $|X| = n$ 인 $V(\text{HCN}(n, n))$ 의 부분집합이라 하자. HCN(n, n)에서 고장 노드 집합 X 를 제거한 그래프가 연결된 그래프(connected graph)임을 통하여 $k(\text{HCN}(n, n)) \geq n+1$ 임을 보인다. HCN(n, n)의 노드를 S 라 하고, HCN(n, n)에서 고장 노드 집합 X 를 제거한 그래프를 $\text{HCN}(n, n)-X$ 로 나타낸다. HCN(n, n)에서 제거될 노드 X 의 위치에 따라 2가지로 나누어 HCN(n, n)- X 가 항상 연결된 그래프임을 보인다.

경우 1. 고장 노드 집합 X 가 HCN(n, n)의 한 기본모듈에 위치한 경우 : HCN(n, n)의 노드 S 의 주소를 (I, J) 라 할 때, HCN(n, n)의 분지수 $n+1$ 에서 노드 S 를 포함하는 기본모듈 I 의 주소를 갖는 하이퍼큐브 Q_n 내의 노드로 연결되는 분지수는 n 이다. 노드 S 에 인접한 n 개의 노드가 제거될 노드 X 와 동일하다면 노드 S 를 포함하는 기본모듈 I 는 2개의 구성요소로 분할된다. 즉, 하이퍼큐브 $Q_n - X$ 연결망과 노드 S 로 분할된다. 그러나 노드 S 를 포함하는 기본모듈 I 의 모든 노드는 $I \neq J$ 인 경우 non-diameter link에 의해 다른 기본모듈 J 에 있는 노드 (J, I) 와 연결되어 있고, $I = J$ 인 경우 diameter link에 의해 기본모듈 \bar{I} 에 있는 노드 (\bar{I}, \bar{J}) 에 연결되는 하나의 에지가 존재한다. 그리고 노드 (J, I) 와 노드 (\bar{I}, \bar{J}) 는 다른 기본모듈의 내부에지와 non-diameter link나 diameter link에 의해 연결되어 있다. 따라서 HCN(n, n)에서 어느 한 개의 기본모듈 내에서 n 개의 고장 노드 집합 X 가 위치하는 경우 HCN(n, n)- X 는 항상 연결되어 있다. 만약 기본모듈 I 의 어떤 노드 S 에 인접한 n 개의 노드 중 a 개만 고장 노드 집합 X 에 속하고, 고장 노드 집합 X 에 속하는 $n-a$ 개의 고장 노드가 기본모듈 I 의 노드 S 가 아닌 다른 노드와 인접한 노드일 때 HCN(n, n)이 연결된 그래프임을 위의 경우를 통해 쉽게 알 수 있다.

경우 2. X 가 두 개 이상의 기본모듈에 위치한 경우 : HCN(n, n)에서 고장난 노드가 2개 이상의 기본모듈 I 와 J 에 분산되어 있다고 할 때, 한 개의 기본모듈 I 또는 J 에서

고장이 발생하는 노드는 많아야 $n-1$ 개이다. HCN(n, n)에서 기본모듈 내의 각 노드당 분지수는 n 이므로, 기본모듈 I (또는 J)의 노드 S 에서 인접한 $n-1$ 개의 노드를 제거해도 노드 S 는 노드 S 를 포함하는 기본모듈 I 의 한 노드와 연결되어 있음을 경우 1에 의해 쉽게 알 수 있다. 제거할 나머지 한 개의 노드가 S 를 포함하지 않는 기본모듈 J 의 노드라 해도 HCN(n, n)- X 는 연결되어 있음을 쉽게 알 수 있다.

그러므로 HCN(n, n)에서 어떤 위치에 있는 고장 노드 집합 X 를 제거하여도 HCN(n, n)는 항상 연결되어 있으므로 $k(\text{HCN}(n, n)) \geq n+1$ 이고, HCN(n, n)은 분지수가 $n+1$ 인 정규연결망이므로 $k(\text{HCN}(n, n)) \leq n+1$ 이다. 따라서 $k(\text{HCN}(n, n)) = n+1$ 이고, HCN(n, n)은 최대고장허용도를 갖는다. □



(그림 5) 경우 1의 예

3.2 HCN(n, n)과 HFN(n, n) 사이의 임베딩

HCN(n, n)의 임의의 노드 V 의 주소는 (K, L) 로써, 기본모듈을 나타내는 $K(=k_1 k_2 \dots k_n)$ 와 기본 모듈 내부의 노드는 $L(=l_1 l_2 \dots l_n)$ 으로 표현한다. HFN(n, n)의 임의의 노드 W 의 주소는 (I, J) 로써, 기본 모듈을 나타내는 $I(=i_1 i_2 \dots i_n)$ 와 기본 모듈 내부의 노드는 $J(=j_1 j_2 \dots j_n)$ 으로 표현한다. HCN(n, n)을 HFN(n, n)에 임베딩 할 때, HCN(n, n)의 노드 V 를 HFN(n, n)의 노드 W 로 사상하는 것은 노드 V 의 기본모듈 $K(=k_1 k_2 \dots k_n)$ 를 노드 W 의 기본모듈 $I(=i_1 i_2 \dots i_n)$ 로 사상하고, 노드 V 의 모듈 내부 주소 $L(=l_1 l_2 \dots l_n)$ 을 노드 W 의 모듈 내부 주소 $J(=j_1 j_2 \dots j_n)$ 로 사상함을 의미한다.

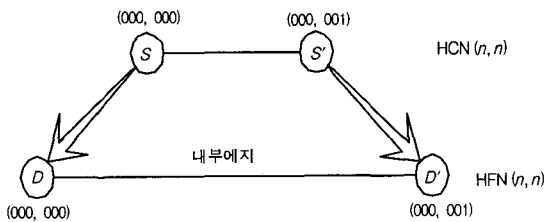
정리 2 HCN(n, n)은 HFN(n, n)에 연장을 3, 밀집을 2로 임베딩 가능하다.

증명 HCN(n, n)의 노드를 $S(=s_1 s_2 \dots s_n, s_{n+1} \dots s_{2n})$ 라 하고, 노드 S 와 인접한 노드를 $S'(=s'_1 s'_2 \dots s'_n, s'_{n+1} \dots s'_{2n})$ 라 하자. HFN(n, n)의 임의의 두 노드를 $D(=d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, d_{n+1} \dots d_{2n})$ 와 $D'(=d'_1 d'_2 \dots d'_n, d'_{n+1} \dots d'_{2n})$ 라 하자.

HCN(n, n)에서 노드 S 와 인접한 S' 를 HFN(n, n)의 노드

중 노드 S, S'와 동일한 비트스트링을 갖는 노드를 각각 D와 D'라 할 때, HCN(n, n)의 노드 S를 HFN(n, n)의 노드 D로 HCN(n, n)의 노드 S'를 HFN(n, n)의 노드 D'로 사상한다. 이때 HFN(n, n)의 노드 D의 비트스트링에서 D'의 비트스트링을 생성하는데 적용되는 HFN(n, n)의 에지의 개수를 통하여 연장율을 분석한다. 또한, HFN(n, n)의 한 에지를 공유하는 HCN(n, n)의 에지의 개수를 통하여 밀집율을 분석한다. HCN(n, n)의 노드 S와 인접한 S'의 비트스트링에 따라서 아래의 경우로 나눌 수 있다.

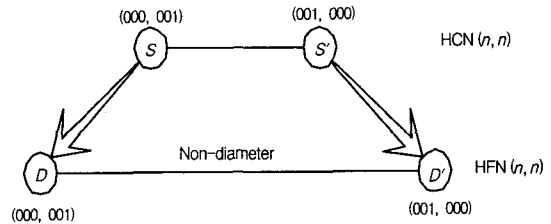
경우 1. $s_1 s_2 \dots s_n = s'_1 s'_2 \dots s'_n$ 이고 $s_{n+1} \dots s_{2n} \neq s'_{n+1} \dots s'_{2n}$ 일 때 : HCN(n, n)의 노드 S(= $s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1} \dots s_{2n}$)가 사상된 HFN(n, n)의 노드 D의 비트스트링은 $(d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n})$ 이고, 노드 S'(= $s'_1 s'_2 \dots s'_n s'_{n+1} \dots s'_{2n}$)가 사상된 노드 D'의 비트스트링은 $(d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, d_{n+1} \dots \bar{d}_j \dots d_{2n})$ 이다($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 따라서 HCN(n, n)과 HFN(n, n)의 노드를 표현하는 비트스트링은 $s_i = d_i$, ($1 \leq i \leq 2n$)이고, $s'_i = d'_i$, ($1 \leq i \leq 2n$)이다. HFN(n, n)에서 노드 D와 D'의 비트스트링에서 오직 j, ($n+1 \leq j \leq 2n$) 번째에 있는 비트만 보수 관계이므로, 노드 D와 D'는 HFN(n, n)에서 동일한 기본 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고, HFN(n, n)의 에지 정의에 의해 j번째 위치에서 1 bit가 서로 다른 노드 D와 D'는 서로 인접한 노드이다. 따라서 노드 D와 D'는 하나의 내부 에지로 연결되어 있으므로, HCN(n, n)의 노드 S와 S'를 HFN(n, n)의 노드 D와 D'에 각각 사상할 때 연장율 1로 임베딩 가능함을 알 수 있다. 밀집율 분석은 다음과 같다. HCN(n, n)에서 동일한 기본모듈 I 내부에서 서로 인접한 노드 S와 S'는 HFN(n, n)에서도 동일한 기본 모듈 I의 노드 D와 인접한 D'로 사상되므로 위의 경우에서 HFN(n, n)의 내부에지는 연장율 1임을 알 수 있다.



(그림 6) 경우 1($s_1 s_2 \dots s_n = s'_1 s'_2 \dots s'_n$ 이고 $s_{n+1} \dots s_{2n} \neq s'_{n+1} \dots s'_{2n}$)

경우 2. $s_1 s_2 \dots s_n \neq s'_1 s'_2 \dots s'_n$ 이고 $s_1 s_2 \dots s_n = s'_{n+1} \dots s'_{2n}$ 이고 $s_{n+1} \dots s_{2n} = s'_1 s'_2 \dots s'_n$ 일 때 : HCN(n, n)의 노드 S가 사상된 HFN(n, n)의 노드 D의 비트스트링은 $(d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n)$ 이고, 노드 S'가 사상된 노

드 D'의 비트스트링은 $(d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n}, d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n)$ 이다($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 D와 D'의 비트스트링에서 $d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n \neq d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n}$ 이므로 D와 D'는 HFN(n, n)의 서로 다른 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고, HFN(n, n)의 정의에 의해 노드 D와 D'는 non-diameter link로 연결됨을 알 수 있다. 따라서 노드 D와 D'는 하나의 non-diameter link로 연결되어 있으므로, HCN(n, n)의 노드 S와 S'를 HFN(n, n)의 노드 D와 D'에 각각 사상할 때 연장율 1에 사상 가능하다. 밀집율 분석은 다음과 같다. HCN(n, n)의 노드 S의 주소를 (I, J)라 할때, 노드 S'의 주소는 (J, I)이므로, 노드 S와 S'는 서로 다른 기본모듈의 노드들이고, HFN(n, n)의 노드 D와 D'도 서로 다른 모듈에 위치하면서 서로 인접한 노드이므로 밀집율이 1임을 알 수 있다.

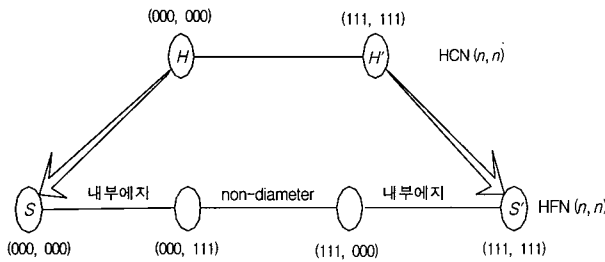


(그림 7) 경우 2($s_1 s_2 \dots s_n \neq s'_1 s'_2 \dots s'_n$ 이고 $s_{n+1} \dots s_{2n} = s'_{n+1} \dots s'_{2n}$)

경우 3. $s'_1 s'_2 \dots s'_n = s'_{n+1} \dots s'_{2n}$ 이고 $S = \bar{S'}$ 일 때 : HCN(n, n)의 노드 S가 사상된 HFN(n, n)의 노드 D의 비트스트링은 $(d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n)$ 이고, 노드 S'가 사상된 노드 D'의 비트스트링은 $(\bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_i \dots \bar{d}_n, \bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_i \dots \bar{d}_n)$ 이다. 노드 D와 D'가 보수관계에 있으므로 D와 D'는 HFN(n, n)의 서로 다른 모듈 내부에 있는 노드이다. 노드 D의 비트스트링은 $(d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n)$ 에서 노드 D'의 비트스트링은 $(\bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_i \dots \bar{d}_n, \bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_i \dots \bar{d}_n)$ 을 생성하기 위한 라우팅 경로는 다음과 같다. HFN(n, n)의 노드 D(= $(d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n)$)에서 folded 에지에 의해 인접한 노드 $(d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, \bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_i \dots \bar{d}_n)$ 에 연결하고, 노드 $(d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, \bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_i \dots \bar{d}_n)$ 에서 non-diameter link에 의해 연결된 노드 $(\bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_i \dots \bar{d}_n, d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n)$ 로 연결하고, 노드 $(\bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_i \dots \bar{d}_n, d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n)$ 에서 folded 에지에 의해 연결된 모듈 내부의 노드 $(\bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_i \dots \bar{d}_n, \bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_i \dots \bar{d}_n)$ 로 연결한다. 따라서 노드 D(= $d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n$)에서 노드 D'(= $\bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_i \dots \bar{d}_n, \bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_i \dots \bar{d}_n$)까지 라우팅 경로는 경로길이 3이고, 다음과 같다. 노드 D

$(= d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n, d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n) - (d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n, d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n) - (d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n, d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n) - D' (= \overline{d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n}, \overline{d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n})$ 이다. 따라서 HCN(n, n)의 노드 S 와 S' 를 HFN(n, n)의 노드 \bar{D} 와 D' 에 각각 사상할 때 연장율이 3 이하임을 알 수 있다.

밀집을 분석은 다음과 같다. 위의 증명의 경우 3에서 사용된 노드 $(d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n, \overline{d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n})$ 와 $(\overline{d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n}, d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n)$ 를 연결하는 non-diameter link는 경우 2에서 사용된 non-diameter link이므로, HFN(n, n)의 에지에서 노드 $(d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n, \overline{d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n})$ 와 $(\overline{d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n}, d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_n)$ 를 연결하는 에지는 HCN(n, n)의 2개 에지가 경유한다. 즉, 첫 번째 에지는 $S = (I, J)$ 이고, $S' = (J, I)$ 이다. 두 번째 에지는 $S = (I, I)$ 이고 $S' = (\bar{I}, \bar{I})$ 이다. 따라서 HCN(n, n)의 노드 S 와 S' 를 HFN(n, n)의 노드 D 와 D' 에 각각 사상할 때, HFN(n, n)에서 (I, J) 와 (J, I) 를 연결하는 에지는 HCN(n, n)에서 2개의 에지가 경유하므로 밀집율이 2이하이다.



(그림 8) 경우 3($s'_1 s'_2 \cdots s'_n = s'_{n+1} \cdots s'_{2n}$ 이고 $S = \overline{S'}$)

이상의 3가지 경우에서 증명한 바와 같이 HCN(n, n)을 HFN(n, n)에 연장율 3, 밀집율 2로 임베딩 가능하다. □

따름정리 3 HCN(n, n)의 HFN(n, n)에 대한 임베딩의 평균 연장율은 2 이하이다.

증명 HCN(n, n)을 HFN(n, n)에 임베딩 했을 때, 임베딩의 평균 연장율은 HCN(n, n)의 모든 에지의 연장율을 합하여 전체 에지 개수로 나눈 값이다. HCN(n, n)의 노드는 HFN(n, n)의 노드와 일-대-일 사상되고, HCN(n, n)의 에지 중 연장율 3을 갖는 에지는 2^{n-1} 개이고, 나머지 에지는 연장율 1을 갖는다는 것을 정리 2에 의해 알 수 있다. HCN(n, n)의 전체 에지 개수는 $k = (n+1)2^{2n-1}$ 이다. 따라서 평균 연장율은 $(3 * 2^{n-1} + 1 * ((n+1) * 2^{2n-1} - 2^{n-1})) / k$ 즉, $1 + \frac{1}{(n+1) * 2^{n-1}}$ 이므로 대략 2보다 적은 값을 갖는다. □

정리 4 HFN(n, n)을 HCN(n, n)에 임베딩하는 비용은 $O(n)$ 이다.

증명 HFN(n, n)의 노드를 $D = (d_1 d_2 \cdots d_n, d_{n+1} \cdots d_{2n})$, $D' = (d'_1 d'_2 \cdots d'_n, d'_{n+1} \cdots d'_{2n})$ 라 하고, HCN(n, n)의 노드를 $S = (s_1 s_2 \cdots s_n, s_{n+1} \cdots s_{2n})$ 와 $S' = (s'_1 s'_2 \cdots s'_n, s'_{n+1} \cdots s'_{2n})$ 라 하자. HFN(n, n)의 노드 D 를 HCN(n, n)의 노드 S 로 HFN(n, n)의 노드 D' 를 HCN(n, n)의 노드 S' 로 사상했을 때, S 의 비트스트링에서 S' 의 비트스트링을 생성하는데 적용되는 HCN(n, n)의 에지의 개수를 통하여 연장율을 분석한다. 노드 D 와 인접한 D' 의 비트스트링에 따라서 아래의 경우로 나눌 수 있다.

경우 1. $d_1 d_2 \cdots d_n = d'_1 d'_2 \cdots d'_n$ 이고 $d_{n+1} \cdots d_{2n} = \overline{d'_{n+1} \cdots d'_{2n}}$ 일 때 : HFN(n, n)의 노드 D 가 사상된 HCN(n, n)의 노드 S 의 비트스트링은 $(s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_n, s_{n+1} \cdots s_j \cdots s_{2n})$ 이고, 노드 D' 가 사상된 노드 S' 의 비트스트링은 $(s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_n, \overline{d'_{n+1} \cdots d'_{2n}})$ 이다($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 S 와 S' 의 비트스트링에서 1부터 n 번째까지의 비트스트링이 같으므로 노드 S 와 S' 는 HCN(n, n)의 동일한 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있다. HCN(n, n)의 기본 모듈은 하이퍼큐브인데, 하이퍼큐브 내의 임의의 한 노드에서 $d_{n+1} \cdots d_{2n} = \overline{d'_{n+1} \cdots d'_{2n}}$ 이므로 n 개의 비트스트링을 보수로 변환하기 위해서는 n 개의 에지가 필요하다. 따라서 HFN(n, n)의 노드 D 와 D' 를 HCN(n, n)의 노드 S 와 S' 에 각각 사상할 때 연장율 n 으로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우 2. $d_1 d_2 \cdots d_n = d'_1 d'_2 \cdots d'_n$ 이고 $d_{n+1} \cdots d_{2n} \neq d'_{n+1} \cdots d'_{2n}$ 일 때 : HFN(n, n)의 노드 D 가 사상된 HCN(n, n)의 노드 S 의 비트스트링은 $(s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_n, s_{n+1} \cdots s_j \cdots s_{2n})$ 이고, 노드 D' 가 사상된 노드 S' 의 비트스트링은 $(s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_n, \overline{s_j \cdots s_{2n}})$ 이다($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 S 와 S' 의 비트스트링에서 오직 j 번째에 있는 비트만 서로 보수 관계이므로, 노드 S 와 S' 는 HCN(n, n)의 동일한 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고, HCN(n, n)의 정의에 의해 노드 S 와 S' 는 서로 인접한 노드이다. 따라서 HFN(n, n)의 노드 D 와 D' 를 HCN(n, n)의 노드 S 와 S' 에 각각 사상할 때 연장율 1로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우 3. $d_1 d_2 \cdots d_n \neq d'_1 d'_2 \cdots d'_n$ 이고 $d_1 d_2 \cdots d_n = d_{n+1} \cdots d_{2n}$ 이고 $d_{n+1} \cdots d_{2n} = d'_1 d'_2 \cdots d'_n$ 일 때 : HFN(n, n)의 노드 D 가 사상된 HCN(n, n)의 노드 S 의 비트스트링은 $(s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_n, s_{n+1} \cdots s_j \cdots s_{2n})$ 이고, 노드 D' 가 사상된 노드 S'

의 비트스트링은 $(s_{n+1} \cdots s_j \cdots s_{2n}, s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_n)$ 이다 ($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 S 와 S' 의 비트스트링에서 $s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_n \neq s_{n+1} \cdots s_j \cdots s_{2n}$ 이므로 S 와 S' 는 HCN(n, n)의 서로 다른 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고, HCN(n, n)의 정의에 의해 노드 S 와 S' 는 non-diameter link로 연결됨을 알 수 있다. 따라서 HFN(n, n)의 노드 D 와 D' 를 HCN(n, n)의 노드 S 와 S' 에 각각 사상할 때 연장율 1로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

이상의 3가지 경우에서 증명한 바와 같이 HFN(n, n)의 노드를 HCN(n, n)의 노드로 일-대-일 사상하는데 최대 연장율은 n 이므로, 임베딩의 비용은 $O(n)$ 이다. □

따름정리 5 HFN(n, n)의 HCN(n, n)에 대한 임베딩의 평균 연장율은 2 이하이다.

증명 HFN(n, n)을 HCN(n, n)에 임베딩 했을 때, 임베딩의 평균 연장율은 HFN(n, n)의 모든 에지의 연장율을 합하여 전체 에지 개수로 나눈 값이다. HFN(n, n)의 노드는 HCN(n, n)의 노드와 일-대-일 사상되고, HFN(n, n)의 에지 중 연장율 n 을 갖는 에지는 2^{2n-1} 개이고, 나머지 에지는 연장율 1을 갖는다는 것을 정리 4에 의해 알 수 있다. HFN(n, n)의 전체 에지 개수는 $k = (n+2)2^{2n-1} - 2^{n-1}$ 이다. 따라서 평균 연장율은 $(n * 2^{2n-1} + 1 * ((n+2) * 2^{2n-1} - 2^{n-1})) / k$ 즉, $\frac{(2n+1) * 2^{2n-1} - 2^{n-1}}{(n+2) * 2^{2n-1} - 2^{n-1}} < 2$ 이므로 2 보다 적은 값을 갖는다. □

4. 결 론

상호 연결망으로 널리 알려진 하이퍼큐브는 재귀적 구조, 노드 및 에지 대칭성, 간단한 라우팅 알고리즘, 다른 연결망과의 임베딩 등 여러 가지 장점이 있지만 노드 수의 증가에 비해 지름이 상대적으로 길다는 단점이 있다. 이러한 단점을 개선한 상호연결망으로 Folded-하이퍼큐브, Multiply Twisted Cube, HCN, HFN 등이 제안되었다.

본 논문에서는 하이퍼큐브보다 망비용이 개선된 HCN(n, n)이 최대 고장 허용도를 가짐을 보였다. 이러한 결과는 HCN(n, n)의 임의의 노드에서 분지수 -1개 이하의 고장이 발생해도 HCN(n, n)이 연결되어 있음을 알 수 있다. 또한 임베딩 분석에 있어서는 HCN(n, n)과 HFN(n, n) 사이의 임베딩을 분석하였다. 임베딩 결과는 HCN(n, n)을 HFN(n, n)에 연장율 3, 밀집율 2로 임베딩 가능함을 보였고, 평균 연장율이 2 이하임을 보였다. Folded-하이퍼큐브를 기본 모듈로 갖는 HFN(n, n)의 성질로 인해, HFN(n, n)을 HCN(n, n)에 임베

딩하는 비용은 $O(n)$ 임을 보였고, 평균 연장율이 2 이하임을 보였다. 이러한 결과는 HCN(n, n)에서 수행 가능한 알고리즘(routing, Ascend/Descend 알고리즘 등)이 HFN(n, n)에서 적은 비용을 추가함으로써 효율적으로 이용될 수 있음을 의미한다.

참 고 문 헌

- [1] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, "On Group Graphs and Their Fault Tolerance," IEEE Trans. Comput., Vol.c-36, No.7, pp.885-888, July, 1987.
- [2] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, "A Group-Theoretic Model for Symmetric Interconnection Network," IEEE Trans. Comput., Vol.38, No.4, pp.555-565, 1989.
- [3] W. J. Dally, "Virtual-Channel Flow Control," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.3, No.2, pp.194-205, March, 1992.
- [4] K. W. Doty, "New Designs for Dense Processor Interconnection Networks," IEEE Trans. Computer, Vol.c-33, No.5, May, 1984.
- [5] D. R. Duh, G. H. Chen and J. F. Fang, "Algorithms and Properties of a New Two-Level Network with Folded Hypercubes as Basic Modules," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.6, No.7, pp.714-723, 1995.
- [6] A. El-Amawy and S. Latifi, "Properties and Performance of Folded Hypercubes," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.2, No.1, pp.31-42, 1991.
- [7] T-Y. Feng, "A Survey of Interconnection Networks," IEEE computer, pp.12-27, December, 1981.
- [8] K. Ghose and K. R. Desai, "Hierarchical Cubic Networks," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.6, No.4, pp.427-436, 1995.
- [9] F. Harary, J. P. Hayes, and H-J. Wu, "A Survey of the Theory of Hypercube Graphs," Comput. Math. Appl., Vol.15, pp.277-289, 1988.
- [10] K. Hwang and F. A. Briggs, Computer Architecture and Parallel Processing, 4th Printing, MacGraw-Hill International Editions, New York, 1988.
- [11] F. T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, 1992.
- [12] V. E. Mendia and D. Sarkar, "Optimal Broadcasting on the Star Graph," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.3, No.4, pp.389-396, 1992.

- [13] J-H. Park, Circulant Graphs and Their Application to Communication Networks, Ph. D. Thesis, Dept. of Computer Science, KAIST, Taejon Korea, 1992.
- [14] D. A. Reed and R. M. Fujimoth, Multicomputer Networks : Message-Based Parallel Processing, MIT Press, 1987.
- [15] A. S. Vaidya, P. S. N. Rao and S. R. Shankar, "A Class of Hypercube_like Networks," Proc. of the 5th IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing, pp.800-803, Dec., 1993.
- [16] P. Wiley, "A Parallel Architecture Comes of Age at Last," IEEE Spectrum, Vol.24, pp.46-50, 1987.
- [17] A. Y. Wu, "Embedding of Tree Networks into Hypercubes," J. Parallel and Distributed Computing, Vol.2, pp.238-249, 1985.
- [18] S-K. Yun and K-H. Park, "Comments on 'Hierarchical Cubic Networks'," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.9, No.4, pp.410-414, 1998.



이 형 옥

e-mail : oklee@sunchon.ac.kr

1994년 순천대학교 전자계산학과(학사)
1996년 전남대학교 전산통계학과(석사)
1999년 전남대학교 전산통계학과(이학박사)
1999년~2002년 한국전산원 선임연구원
2002년~현재 순천대학교 컴퓨터교육과
천임강사

관심분야 : 병렬 및 분산처리 알고리즘, 그래프이론, 상호연결망, 계산이론



김 종 석

e-mail : rockhee@sunchon.ac.kr

1995년 순천대학교 전자계산학과(학사)
2001년 순천대학교 컴퓨터과학과(석사)
2001년~현재 순천대학교 컴퓨터과학과
박사과정

관심분야 : 병렬 및 분산처리 알고리즘, 그래프이론, 상호연결망, 계산이론