

미소 비대칭 링의 맥놀이 지도

Beat Maps of a Slightly Asymmetric Ring

김 석 현† · 박 석 균* · 박 기 영* · 서 백 수**

Seock-Hyun Kim, Seock-Gyun Park, Gy-young Park, and Baek-Su Suh

(2002년 3월 28일 접수 : 2002년 8월 1일 심사완료)

Key Words : Slightly Asymmetric Ring(미소 비대칭 링), Impulse Response(충격응답), Beat Phenomenon(맥놀이 현상), Beat Map(맥놀이 지도)

ABSTRACT

Analytical model of beat response is derived on a slightly asymmetric ring and the model is verified by experiment. The asymmetric ring is a simplified model used to explain the beat property of a Korean bell. The asymmetric ring has mode pairs having slight frequency difference in each radial mode. Each mode pair produces beat phenomenon by the interaction of the two close frequency components. Based on the analytical model, beat maps are first proposed and characteristics of beat on the circumference are detailly explained.

1. 서 론

우리 나라의 오랜 문화적 자산인 범종은 크기와 외양의 아름다움만이 아니라 우수한 음향 특성으로 국내외에 널리 알려져 있다. 한국 범종의 중요한 음향 특성으로는 기본음과 고차음의 주파수 성분들이 조화스럽게 어울리고 있는 점과 선명하고 적절한 주기의 맥놀이, 그리고 오래 지속되는 여운을 들 수 있다. 특히, 맥놀이는 소리가 작아졌다가 다시 커지는 과정을 반복함으로써 소리가 마치 살아서 숨을 쉬는 듯한 생명력을 느끼게 한다.⁽¹⁾ 맥놀이를 없애거나 제한된 범위 내에서만 허용하는 서양종에 비하여^(2,3) 범종에서는 선명하고도 적절한 주기의 맥놀이를 갖도록 설계하고 구조후에는 맥놀이의 교정 작업을 수행한다.⁽⁴⁾ 현재까지 맥놀이는 설계 및 구조 과정에서 질량 및

강성이 원주상에서 비대칭적으로 분포하는 것이 그 원인으로 알려져 있다.⁽⁴⁻⁶⁾ 맥놀이의 특성에 대해서는 주로 실험이나 유한 요소해석에 의한 수치적 방법으로 설명되어졌으며, 그 발생 기전에 대한 이론적 모델을 제시한 연구는 매우 드물다.^(7,8) 실험에 의하면, 맥놀이는 타격 위치에 따라 그 선명도가 다르게 나타난다. 또한, 최근의 측정 결과에 의하면, 맥놀이는 진동체의 표면 위치에 따라서도 그 특성이 다르게 분포하고, 그 결과, 방사되는 음향의 맥놀이도 위치에 따라 다르다는 사실이 보고된 바 있다.⁽⁹⁾ 이러한 현상은 매우 흥미있는 진동-음향 문제이나, 비대칭 셀 구조에 대한 정식화가 어려우므로 아직까지 구체적인 이론적 설명이 이루어지지 못하고 있다. 기존의 연구에 따르면, 미세한 비대칭성이 존재할 때, 링이나 원통셀은 매우 작은 고유진동수의 차이를 갖는 원주모드 쌍을 갖는다.⁽¹⁰⁻¹²⁾ 모드 쌍은 동일한 형태의 진동모드를 보이나, 모드별로 원주상에서 위상차를 갖는다. 이러한 모드쌍이 동시에 가진다면, 고유진동수 쌍이 서로 간섭하여 맥놀이를 발생시키는 것으로 분석되고 있다.⁽⁹⁾ 본 논문에서는 집중질량을 갖는 비대칭링을 대상으로 그 맥놀이 특성을 이론 모델을 통하여 규명하

† 책임저자, 정회원, 강원대학교 기계메카트로닉스공학부

E-mail : seock@kangwon.ac.kr

Tel : (033) 250-6372, Fax : (033) 257-4190

* 강원대학교 기계메카트로닉스공학부

** 강원대학교 지구환경공학부

고 실험적으로 확인한다. 비대칭 링을 대상으로 충격 응답해석을 수행하여 맥놀이의 수학적 모델을 제시한다. 이에 근거하여 맥놀이의 원주상 분포를 효과적으로 파악할 수 있는 맥놀이 지도(beat map)를 제시하고 타격 및 측정 위치에 따라 맥놀이 특성이 어떻게 다른지를 이론적으로 규명한다. 해석 모델을 사용한 맥놀이 지도와 측정데이터에 근거하여 작성한 맥놀이 지도를 비교하여, 맥놀이 해석모델의 신뢰도를 검증한다. 링 모델은 실제종의 축 상에서의 진동의 변화를 설명하지 못하는 한계는 있으나, 가장 중요한 원주상 비대칭성을 고려할 수 있으므로, 맥놀이 현상을 설명하는데 효과적인 모델이다. 연구결과는 범종의 맥놀이 특성을 이해하기 위한 중요한 단서가 되며, 주조 후에 수행되는 맥놀이의 평가 및 교정 작업에도 유용한 정보를 제공할 것이다.

2. 집중 질량을 갖는 링의 맥놀이 응답 모델

2.1 고유진동모드와 고유진동수

미세한 비대칭성을 갖는 링에 대하여, Allaei 등은⁽¹⁰⁾ 리셉턴스해석법으로 집중질량이나 강성 비대칭성을 갖는 링의 고유진동수와 모드를 해석적으로 구하였다. 홍진선 등은^(11,12) 집중 질량이나 국부적인 두께 감소를 갖는 비대칭 링의 고유진동수와 모드를 라플라스 변환법을 사용하여 이론적으로 규명하였다. 이들의 연구에 의하면, 비대칭성이 작을 때, 링의 반경방향의 진동모드는 미세한 차이의 고유진동수를 갖는 모드쌍으로 나타나고, 다음과 같은 형태의 함수로 근사화시킬 수가 있다.

$$U_{nL}(\theta) = \cos n(\theta - \phi) \quad (1)$$

$$U_{nH}(\theta) = \cos n(\theta - \phi - \pi/2n) \quad (2)$$

ϕ 는 비대칭성을 대표하는 집중 질량의 위치를 표시한다. 집중질량이 배(anti-node)에 위치하는 모드 U_{nL} (L모드)의 고유진동수 ω_{nL} 은 질량 부가 효과에 의하여 대칭링의 고유진동수 ω_n 보다 미세하게 작은 값을 갖는다. 반면에, 집중질량 부착 지점이 절점(node)이 되는 U_{nH} (H모드)의 고유진동수 ω_{nH} 는 질량 부가효과를 거의 받지 않으므로 대칭링의 고유진동수 ω_n 와 거의 같은 값을 갖는다. 작은 것에 의하여 강성이 저하되는 경우에도 동일한 상황이 발생하며, 국부적인 두께 증가에 의하여 비대칭이 발생하는 경

우에는 강성 부가 효과때문에 식 (1), 식 (2)의 L,H 모드는 위상이 서로 바뀐다.

2.2 맥놀이 응답의 수학적 모델

앞에서 구한 고유진동수와 모드를 사용하여 모드중첩원리(mode superposition principle)를 적용하면 강제 진동응답을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$w(\theta, t) = \sum_n \sum_{\gamma=L,H} \eta_{n\gamma}(t) U_{n\gamma}(\theta) \quad (3)$$

맥놀이 해석은 타격점 및 측정점과 절선배치 조건 사이의 관계에 따라 맥놀이 선명도가 원주상에서 어떤 차이를 보이는지를 규명하는 것을 목적으로 한다. 따라서 해석 모델에서 감쇠항은 포함시키지 않았다. 모드기여함수(modal participation factor)는 다음 식으로부터 결정된다.⁽¹³⁾

$$\rho h \sum_n \sum_{\gamma=L,H} (\ddot{\eta}_{n\gamma} + \omega_{n\gamma}^2 \eta_{n\gamma}) U_{n\gamma} = q \quad (4)$$

여기서, ρ 는 링재질의 밀도, h 는 링 두께, q 는 링 표면에 작용하는 면적당 힘을 의미한다. $U_{n\gamma}$ 는 식 (1)과 식 (2)의 모드쌍으로, 집중 질량이 부착된 위치 ($\theta = \phi$)를 기준위치로 한다면, $U_{n\gamma}$ 은 $\theta=0$ 에서 배를 갖는 U_{nL} 과 절점을 갖는 U_{nH} 로 다음과 같이 구성된다.

$$U_{n\gamma}(\theta) = \cos n(\theta - \phi_\gamma) \quad (5)$$

여기서, $\phi_\gamma = 0$ ($\gamma=L$), $\phi_\gamma = \frac{\pi}{2n}$ ($\gamma=H$)

충격응답을 구하기 위하여, 다음과 같이 원주상 한 점($\theta = \theta^*$)에 면적당 충격력을 작용시킨다.

$$q = \left(\frac{\hat{F}}{Rb}\right) \delta(\theta - \theta^*) \delta(t) \quad (6)$$

여기서, \hat{F} 는 충격량의 크기를 표시하고, R 은 링의 반경을, b 는 링의 폭을 의미한다. 식 (6)을 식 (4)에 대입하고, 모드의 직교성을 이용하면 다음과 같이 비연성화된 관계식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{\eta}_{n\gamma} + \omega_{n\gamma}^2 \eta_{n\gamma} = F_{n\gamma}(t) \quad (7)$$

여기서, $F_{n\gamma}(t) = \frac{\hat{F}}{\pi \rho h R b} \cos n(\theta^* - \phi_\gamma) \delta(t)$ (8)

양변을 라플라스 변환시키고 영의 초기조건을 부여하면, 모드별 기여함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\eta_{nr}(t) = \frac{2\hat{F} \cos n(\theta^* - \phi_\gamma)}{M\omega_{nr}} \sin \omega_{nr}t \quad (9)$$

여기서, $M=2\pi\rho hRb$ 는 링의 질량을 의미한다.

식 (9)를 식 (3)에 대입하면 변위응답 및 그 속도 응답을 다음과 같이 결정할 수가 있다.

$$w(\theta, t) = \sum_n \sum_{\gamma=L,H} \frac{2\hat{F} \cos n(\theta^* - \phi_\gamma)}{M\omega_{nr}} \times \cos n(\theta - \phi_\gamma) \sin \omega_{nr}t \quad (10)$$

$$\dot{w}(\theta, t) = \sum_n \sum_{\gamma=L,H} \frac{2\hat{F} \cos n(\theta^* - \phi_\gamma)}{M} \times \cos n(\theta - \phi_\gamma) \cos \omega_{nr}t \quad (11)$$

또는,

$$\dot{w}(\theta, t) = \sum_n \frac{2\hat{F}}{M} [\cos n\theta^* \cos n\theta \cos 2\pi f_{nL}t + \sin n\theta^* \sin n\theta \cos 2\pi f_{nH}t] \quad (12)$$

가속도 응답은,

$$\ddot{w}(\theta, t) = -\sum_n \frac{4\pi\hat{F}}{M} [f_{nL} \cos n\theta^* \cos n\theta \sin 2\pi f_{nL}t + f_{nH} \sin n\theta^* \sin n\theta \sin 2\pi f_{nH}t] \quad (13)$$

식 (12)와 식 (13)에서 ω_{nL} , ω_{nH} 의 차이는 작으므로, 충격응답에서 L, H 모드쌍은 서로 간섭하여 맥놀이를 발생시키게 된다. 따라서, 고유진동수와 모드쌍 정보만 주어지면, 식 (12)와 식 (13)을 이용하여 비대칭링의 맥놀이응답 분포를 구할 수 있다. 본 연구에서는 고유진동수 측정치를 식 (13)에 적용하여 맥놀이의 분포특성을 구하고 맥놀이의 측정결과와 비교한다.

3. 링의 진동 모드 및 고유진동수 측정결과

Table 1과 Fig. 1은 본 연구에 사용된 링의 제원을 보인다. Fig. 2의 충격시험법으로 비대칭링의 고유진동수 및 모드를 결정하였다. 링은 구속에 의한 추가적인 비대칭성을 최소화시키기 위하여 매우 유연한 고무줄로 매달고, 17g의 가속도계를 접착시켜 집중 질량의 비대칭 효과를 발생시킴과 동시에 가속도 신호를 측정하였다. 모드변수 추정에는 STAR Modal의 다항곡선피팅(polynomial curve fitting) 기능을 사용하였다.⁽¹⁴⁾ 고유진동수 측정치를 Table 2에 보인다.

질량 부가효과를 받는 L 모드의 진동수는 초기 대칭링의 진동수에 비하여 약간 감소되는 반면, H 모드는 대칭링의 진동수와 별 차이가 없는 것으로 보아 질량 효과를 거의 받지 않는 것을 알 수가 있다. 진동모드

Table 1 Dimensions of the ring specimen

Young's modulus (E)	$210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
Density (ρ)	7800 kg/m^3
Poisson's ratio (ν)	0.33
Total weight (M)	2737 g
Weight of point mass (M_p)	17 g
Radius of the ring (R)	196 mm
Thickness of the ring (h)	7 mm
Width of the ring (b)	40 mm

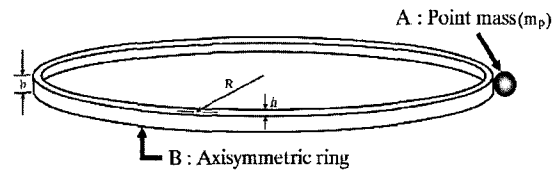


Fig. 1 Asymmetric ring with a concentrated mass

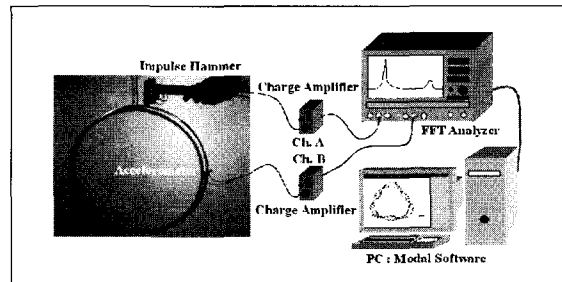


Fig. 2 Experimental set up for modal testing

Table 2. Measured frequencies of the ring model

Mode number (n)	Symmetric ring	Asymmetric ring	
	$f_n(\text{Hz})$	$f_{nL}(\text{Hz})$	$f_{nH}(\text{Hz})$
2	112.59	111.86	112.58
3	318.17	316.38	318.24
4	610.02	606.47	609.62
5	985.32	979.00	985.93

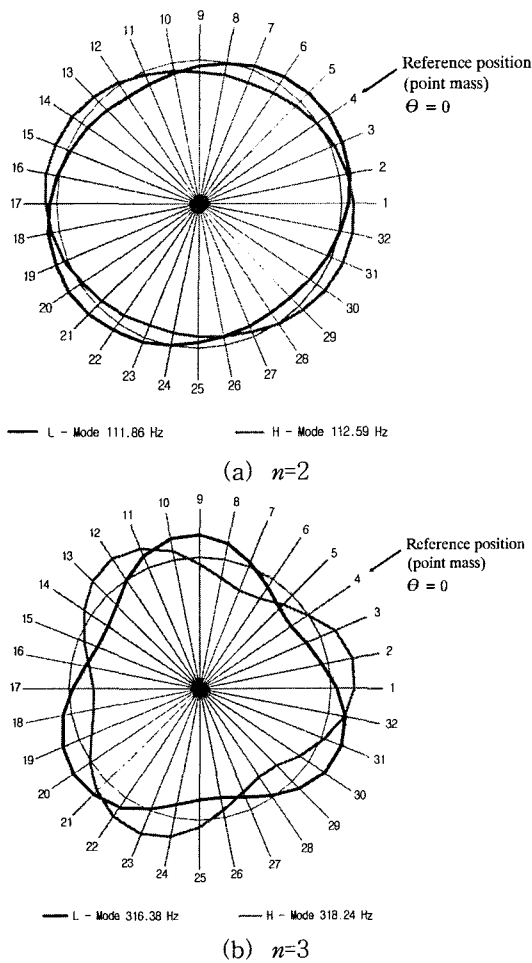


Fig. 3 Mode pairs of the asymmetric ring by modal testing. (point mass position : node 4)

의 측정 결과를 Fig. 3에 보인다. 집중 질량의 부착 위치는 4번 지점이며, 이 지점은 $n=2$, $n=3$ 모드 모두에서 L모드의 배, H모드의 절점이 된다. 모드쌍의 형태는 식 (1), (2)의 이론적 모드쌍에 매우 가깝다. 특히, 원주상에서 L, H 모드의 배와 절점 위치는 이론과 측정결과가 거의 일치하는 것으로 확인되었다.

4. 비대칭성에 의한 링의 맥놀이 특성

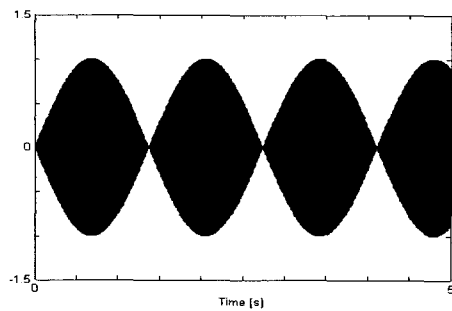
4.1 맥놀이 응답의 해석 및 측정 결과

범종의 경우, 고차 진동모드는 타격후 감쇠되어 곧 사라지고, $n=2,3$ 인 1,2차 굽힘 진동모드가 오래 지속되면서 음향을 지배한다. 특히, $n=2$ 모드가 선명한

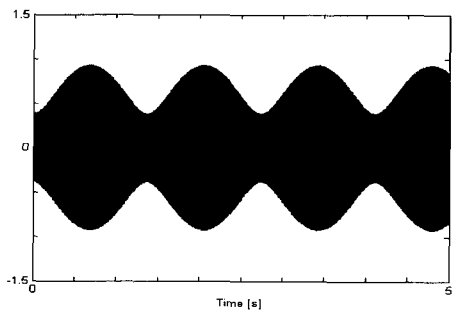
맥놀이를 보이면서 오랜 여운을 발생시킬 때, 종소리는 생명력을 느끼게 한다. 여기서는 $n=2,3$ 모드의 진동수 측정치를 식 (13)에 적용하여 각각의 맥놀이 응답을 구하고, 측정된 맥놀이와 비교한다. 식 (13)에서 n 차 진동모드만의 맥놀이를 고찰할 때는 다음과 같이 다른 항들을 제외시키고 n 차 관련 항만을 고려하여 무차원화시킨 응답을 구하는 것이 효과적이다.

$$\frac{\ddot{w}_n(\theta, t)M}{[4\pi \hat{F}_n]} = \cos n\theta^* \cos n\theta \sin 2\pi f_{nL} t + \sin n\theta^* \sin n\theta \sin 2\pi f_{nH} t \quad (14)$$

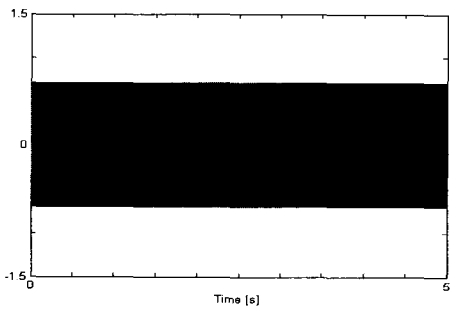
먼저, $n=2$ 인 모드쌍의 배의 정 중앙에 가까운 Fig. 3(a)의 6번 위치($\theta^* = \pi/8$)를 타격하였을 때, 맥놀이 응답을 검토한다. 이 위치는 L, H 모드가 동등하게 가진되므로, 범종에서는 선명한 맥놀이를 발생시키는 적합한 타격 지점으로 알려져 있다. Fig. 4는 주요 응답점에서의 맥놀이 해석 결과이다. L, H 모드가 동등하게 가진되었음에도 선명한 맥놀이가 발생하는 지점과 맥놀이가 전혀 발생하지 않는 지점이 존재하는 것이 흥미롭다. 또한, 그 중간에는 맥놀이가 불분명한 지점도 존재한다. 그 이유는 식 (14)의 해석 모델에서 L, H 주파수 성분의 크기를 결정하는데, 타격 위치만이 아니라 응답위치도 참여하고 있기 때문이다. 즉, L 주파수성분의 진폭, $\cos n\theta^* \cos n\theta$ 와 H 주파수성분의 진폭 $\sin n\theta^* \sin n\theta$ 가 같은 값을 갖는 위치에서는 두 주파수 성분의 크기가 완전히 같아지므로, 완전 보강과 완전 상쇄에 의하여 매우 선명한 맥놀이가 발생되며, 이러한 지점은 L, H 모드쌍의 절선 배치에 의하여 원주상에서 주기적으로 존재한다. 근접 음장에서 듣는 위치에 따라 맥놀이의 선명도가 다른 것이나, 음향의 맥놀이가 들려도 어떤 위치에서는 진동의 맥놀이가 잘 측정되지 않는 것은 바로 이러한 맥놀이의 분포특성 때문이다. 이전의 연구에서는 이러한 맥놀이의 분포특성에 대하여 언급된 바가 없었다. 이에 대하여는뒤에서 맥놀이 지도를 사용하여 보다 구체적으로 검토한다. Fig. 5는 $n=2$ 모드 진동 맥놀이의 측정 결과를 보인다. 신호분석기(01 dB, dBFA32)의 디지털 필터링 기능을 사용하여 100 Hz~120 Hz대역을 통과시켜 $n=2$ 진동수(112.59 Hz)만의 맥놀이를 구하였다. 또한, 식 (14)에 의한 해석결과와의 비교를 위하여 맥놀이 측정치의 진폭을 무차원화 시켰다. 즉, 맥놀이가



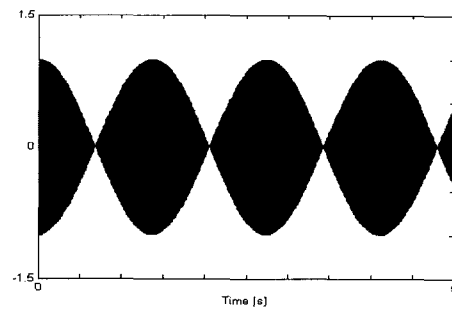
Node 2



Node 3



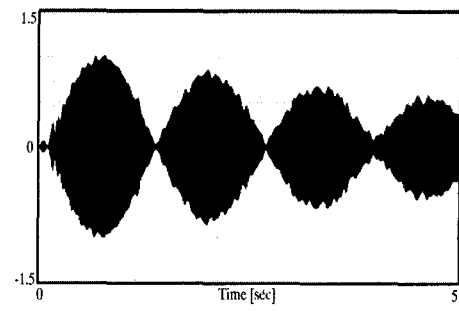
Node 4



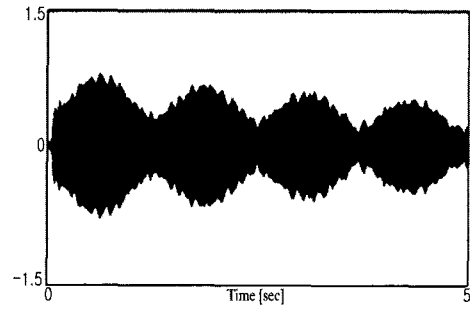
Node 6

Fig. 4 Calculated beats of $n=2$ mode (impact at 6)

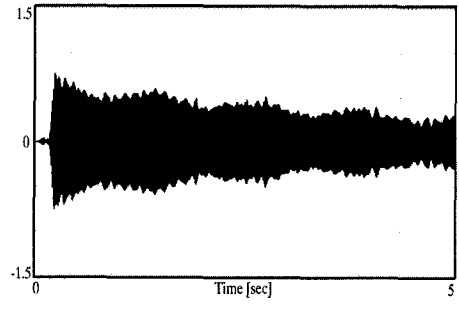
가장 선명한 2번 지점에서 측정된 맥놀이의 첫 번째 진폭을 기준값으로 사용하였다. 각 지점에서의 맥놀이 크기는 이 값으로 나누어진 무차원화된 값을 의미한



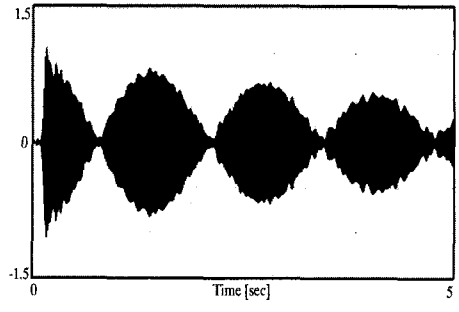
Node 2



Node 3



Node 4



Node 6

Fig. 5 Measured beats of $n=2$ mode (impact at 6, filtered at 110 Hz~120 Hz)

다. 선명한 맥놀이를 보이는 절점 2와 절점 6에서 구한 맥놀이 주기는 $n=2$ 모드쌍의 고유진동수의 차이 0.72 Hz의 역수인 1.39초가 된다. Fig. 4와 Fig. 5에서

볼 수 있듯이, 해석에서 고려하지 않은 감쇠항으로 측정치가 시간에 따라 진폭이 조금씩 감소하는 것을 제외하고는 모든 위치에서 맥놀이 주기와 선명성은 거의 일치한다. 두 결과가 잘 맞는 것은 해석에 사용한 모드쌍 식 (1), (2)가 실제의 모드에 매우 가깝다는 것을 반영한다. 다만, 4번 지점이 해석에서는 H모드의 절점이므로 맥놀이가 전혀 발생하지 않으나, 실제로는 H모드 절점과 완전히 일치하지 않아 측정에서는 미세한 맥놀이를 보인다. 해석모델로 맥놀이 분포를 예측하기 위해서는 주파수정보와 함께, 모드쌍의 수학적 모델인 식 (1), (2)가 실제에 근사해야 하는데, 이를 위해서는 비대칭성이 매우 작아야 한다. 이제까지 측정된 대부분의 범종의 맥놀이 주파수는 불과 1 Hz 이내이다. 이는 범종이 원주상에서 매우 작은 비대칭성을 가짐을 의미하며, 실제 측정되는 모드데이터^(4,6,9)도 수학적 모델 식 (1), (2)의 적합성을 뒷받침 한다. 결과적으로, 이는 본 해석 모델을 범종에 적용하여 원주상 맥놀이의 분포특성을 파악할 수 있음을 의미한다. 따라서, 타격위치, L, H 모드쌍의 절선 위치와 주파수 데이터가 확보되면 위치별 맥놀이 분포특성을 해석모델을 사용하여 파악할 수 있을 것이다.

4.2 맥놀이 지도의 작성

맥놀이의 분포특성은 원주상을 따라 맥놀이 지도를 (beat map)를 작성함으로써 보다 명확하게 설명된다. 맥놀이 지도는 타격점이 주어질 때, Fig. 4와 Fig. 5에서 구한 모드별 맥놀이 응답을 원주상을 따라 방사형으로 그린 그림으로, 맥놀이의 선명도와 크기를 한 눈에 파악할 수 있게 한다. Fig. 6은 6번 위치를 타격할 때, n=2 모드의 맥놀이를 원주상 32개 지점에 표시한 맥놀이 지도로, 해석에 의한 결과와 측정에 의한 결과를 비교한다. 6번과 같이 L, H 모드 배의 정중앙 위치는 범종에서 선명한 맥놀이를 발생시키는 최적의 원주상 위치로 알려져 있다. 이 지점을 타격할 때, 2,6,10,14,18,22,26,30 지점에서는 L, H 모드가 동등하게 응답하므로 가장 선명한 맥놀이를 보인다. 이러한 지점은 $\pi/4$ 의 주기로 반복되는데, n=2 에서 L, H 모드의 배와 절점이 원주상에서 $\pi/4$ 의 주기로 분포하는 것이 그 이유이다. 해석 및 측정 결과는 감쇠효과만 제외하고는 매우 잘 맞는다. 다음은 31번 지점을 타격하여 H모드를 더 크게 가진시키는 경우 (Fig. 3참조)의 맥놀이 지도를 Fig. 7에 보인다. 범종

에서 이러한 지점은 맥놀이 관점에서 적합치 못한 위치로 알려져 있다. 흥미로운 점은 타격점이 L, H 모드의 정중앙이 아님에도 불구하고 선명한 맥놀이가 발생하는 지점이 규칙적으로 분포한다는(3,5,11,13,19, 21,27,29지점) 점과, 그 맥놀이 진폭은 Fig. 6에 비해서 현저히 작다는 점이다. 먼저, 맥놀이가 선명한 이유는, 식 (14)의 L, H 두 주파수성분에서 가진항과 응답항의 곱이 동일하게 나오기 때문이고, 맥놀이의 크기가 작은 것은 두 주파수성분의 진폭이 동일하기는 하나 모두 작은 값으로 나오기 때문이다. 이러한 특성에서도 해석과 측정 결과는 감쇠효과 이외에는 거의 일치한다. 다음에는 L 모드의 절점인 32번 ($\theta = -\pi/4$) 위치를 타격하는 경우로, 범종에서는 가장 부적합한 타격 위치가 된다. 그 결과를 Fig. 8의 맥놀이 지도로 표시한다. 원주상의 모든 점에서 맥놀이는 발생되지 않으며, H모드의 주파수로만 진동한다. 맥놀이 없는 H모드의 응답의 크기는 원주상에서 $\pi/4$ 의 주기로 변하고, 진동이 발생되지 않는 지점도 존재한다. 결과적으로 모든 위치에서 맥놀이가 발생되지 않으므로, 진동과 음향 모두에서 맥놀이를 관찰할 수 없게 된다. 이러한 원리는 n=3 이후의 고차 모드에도 동일하게 적용된다. Fig. 9는 n=3 모드에서 L, H 모드쌍의 배의 정중앙인 32번 위치(Fig. 3 b 참조)를 타격할 때, n=3 모드만의 맥놀이 응답을 보인다. 측정신호는 310 Hz~330 Hz대역을 필터링하여 구하였다. 맥놀이는 n=3모드쌍의 주파수 차이 1.86 Hz의 역수인 0.54초의 주기를 갖는다. 4,12,20,28번 지점은 L 또는 H모드의 절점과 정확하게 일치하는 관계로, 해석과 실험 모두에서 맥놀이가 발생하지 않는다. 실제로 맥놀이가 발생하지 않는 지점은 $\pi/6$ 의 주기로 분포한다. 그 이유는 Fig.3 (b)에서 L, H모드의 절점이 $\pi/6$ 의 주기로 존재하기 때문이다. 반면에 3,5,8,13,16, 19,21,24,27,32번 지점은 L, H 모드쌍이 거의 동일하게 반응하는 위치이므로, 뚜렷한 맥놀이를 보이며, 이 점에서 해석과 실험치는 거의 일치한다. 선명한 맥놀이가 발생하는 지점은 Fig. 3 (b)에서 L, H 모드가 동일한 진폭을 보이는 지점으로, $\pi/6$ 의 주기로 분포한다. 이러한 지점에서는 두 모드가 동등하게 응답하여 동등하게 가진되는 타격조건과 맞물려 두 주파수 성분이 같은 크기로 발생되고 그 결과, 선명한 맥놀이를 보이게 된다. 이러한 결과를 종합해 보면 n 차 진동 모드에서는 $\pi/2n$ 의 주기로 원주상에 선명한 맥

놀이가 분포하고, 그 강도는 모드쌍의 배(또는 절점)의 정중앙을 타격할 때가 가장 크다는 것을 알 수 있다. 범종에서 맥놀이를 지배하는 $n=2$ 와 $n=3$ 모드는 종의 축상에서는 위상의 변화가 없고 하부로 내려오면서 진동의 크기가 증가한다. 또한, 원주상에서의 모드형상은 링과 거의 동일하다. 따라서, 타격지점과 L, H 모드쌍에 관한 데이터만 확보된다면, 링의 맥놀이 지도 작성법을 이용하여 범종의 맥놀이 지도를 그리는데도 어려움이 없을 것이다.

5. 결 론

집중 질량을 갖는 비대칭 링을 대상으로 맥놀이 응답의 수학적 모델을 제시하고 실험을 수행한 결과 다음의 결론을 얻었다.

(1) 집중 질량에 의한 비대칭성은 작은 진동수의 차이를 갖는 L, H 모드쌍을 발생시키고, 모드쌍은 원주상에서 $\pi/2n$ 의 위상 차이를 가진다. 이러한 모드쌍

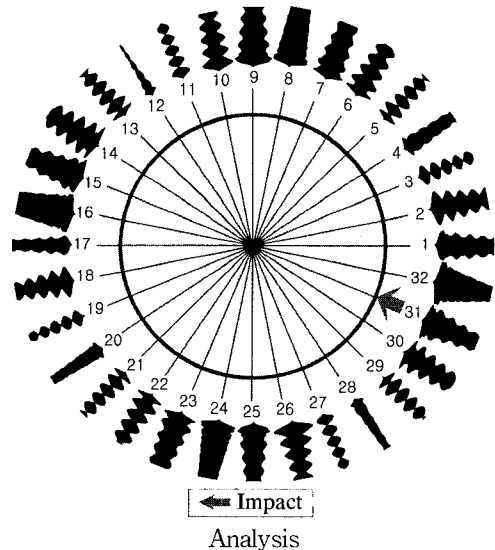
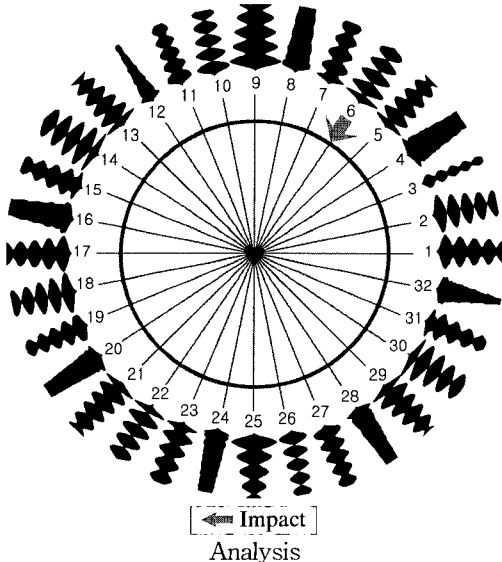
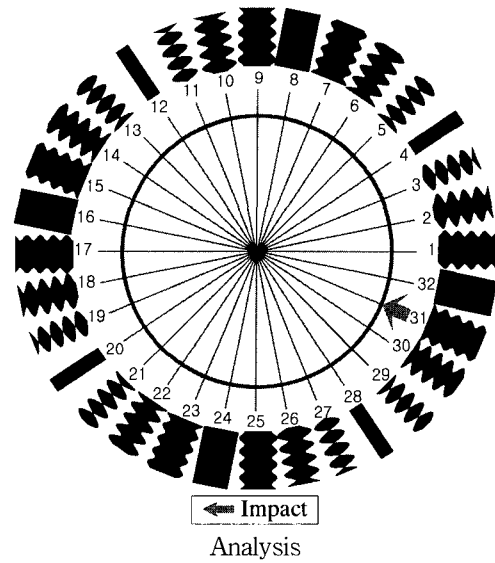
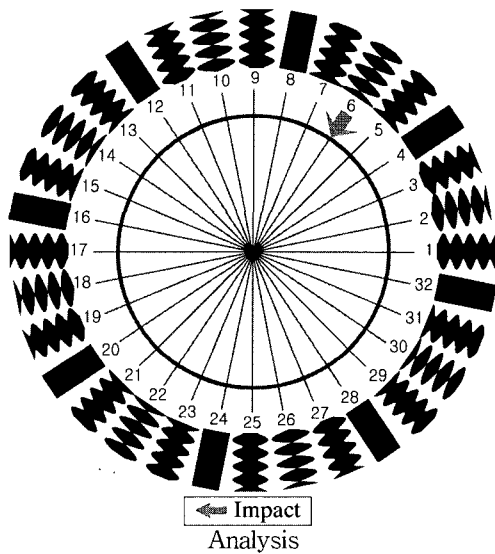


Fig. 6 Beat maps of $n=2$ mode under the impact at node 6 ($\theta = \pi/8$)

Fig. 7 Beat maps of $n=2$ mode under the impact at node 31 ($\theta = -5\pi/16$)

은 서로 간섭하여 맥놀이를 발생시키고, 그 진동수 차이의 역수가 맥놀이의 주기가 된다.

(2) L, H 모드쌍의 배의 정중앙을 타격하여 모드쌍을 대등하게 가진할 때, 역시 모드쌍이 대등하게 응답하는 L, H 모드 배의 정중앙에서 선명한 맥놀이가 발생하며, 이러한 위치는 원주상에서 $\pi/2n$ 의 주기로 분포한다. 또한, 정중앙을 타격하지 않더라도 선명한

맥놀이가 발생하는 위치가 존재하나, 그 강도는 정중앙을 타격하는 경우에 비하여 작다. L, H 모드쌍의 한 절점상을 타격하는 경우, 원주상의 모든 위치에서 맥놀이는 발생하지 않는다.

(3) 비대칭 링에서 L, H 모드쌍의 이론모델 및 측정결과는 거의 일치하였고, 그 결과 해석과 측정에 의한 맥놀이 지도는 거의 동일하게 나타났다. 따라서,

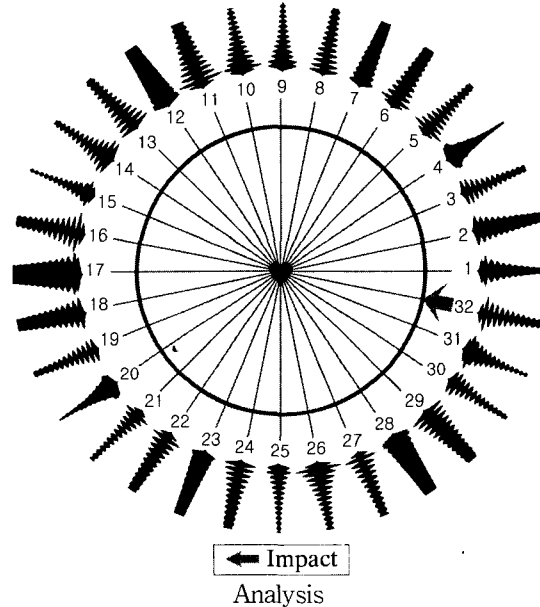
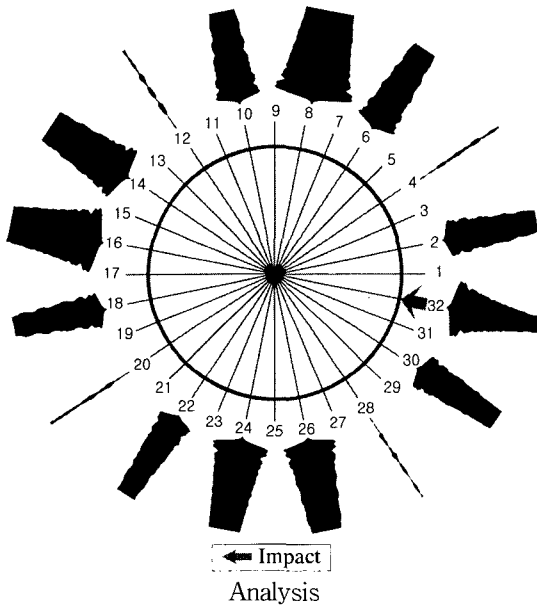
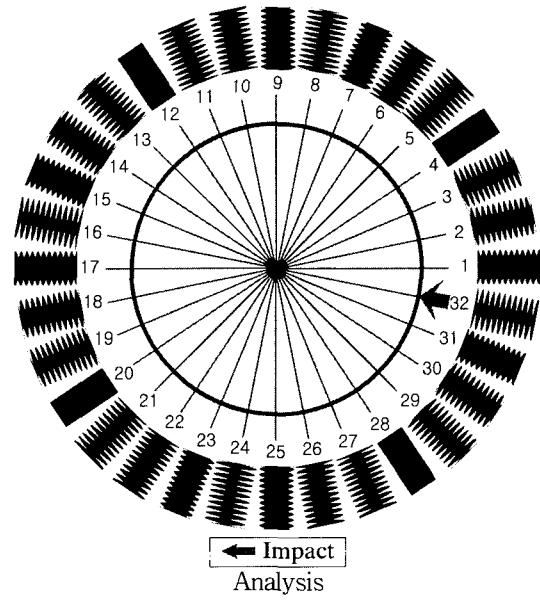
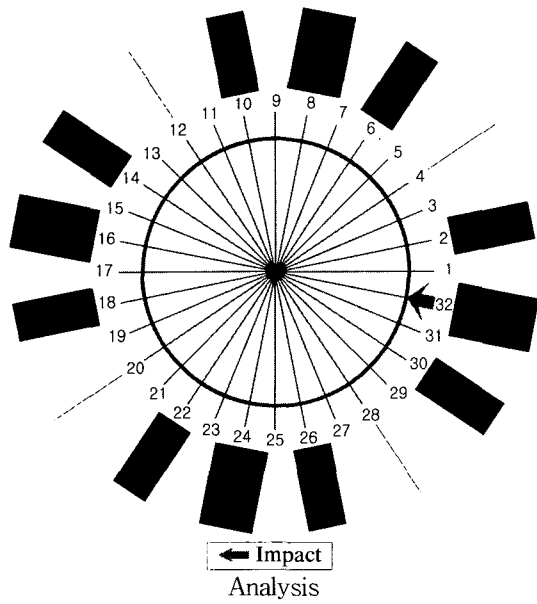


Fig. 8 Beat maps of $n=2$ mode under the impact at node 32 ($\theta = -\pi/4$)

Fig. 9 Beat maps of $n=3$ mode under the impact at node 32

원주상에서 링과 동일한 모드형상을 갖는 범종에서도 L, H 모드쌍의 모드 데이터만 확보된다면, 해석모델을 이용한 맥놀이 지도의 작성이 가능하다.

참 고 문 헌

- (1) 염영하, 1984, “한국종의 연구”, 한국정신문화연구원 연구논총 84-14.
- (2) Charnley, T. and Perrin, R., 1978, “Studies with An Eccentric Bell”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 58(4), pp. 517~525.
- (3) Rossing, T. D., 1987, “Vibration of Bells”, *Applied Acoustics* 20, pp. 41~70.
- (4) Lee, J. M., Kim, S. H., Lee, S. J., Jeong, J. D. and Choi, H.G., 2002, “A Study on the Vibration Characteristics of a Large Size Korean Bell”, *Journal of Sound and Vibration*, Accepted and in Press.
- (5) 전성하, 이장무, 염영하, 김석현, 1989, “한국종의 진동 및 음향에 관한 연구”, *대한기계학회지*, 제 13 권 제 3 호, pp. 397~403.
- (6) 김양한, 박연규, 김영기, 1997, “성덕대왕 신종의 3차원 진동신호 측정 및 분석 결과”, *한국음향학회지*, 제 16 권, 제 6 호, pp. 41~47.
- (7) Perrin, R., 1977, “A Group Theoretical Approach to Warble in Ornamented Bells”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 52, pp. 307~313.
- (8) Kim, S. H., Soedel, W. and Lee, J. M., 1994, “Analysis of the Beating Response of Bell Type Structures”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 173(4), pp. 517~536.
- (9) 김석현, 김정현, 정지덕, 이장무, 2002, “성덕대왕신종의 진동 및 음향 특성”, *한국소음진동공학회는 논문집*, 제 12 권 제 7 호, pp. 534~541.
- (10) Allaei, D., Soedel, W. and Yang, T. Y., 1986, “Natural Frequencies and Modes of Rings That Deviate from Perfect Axisymmetry”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 111(1), pp. 9~27.
- (11) 홍진선, 김석현, 이장무, 1987, “집중질량을 갖는 원환의 자유진동 해석”, *대한기계학회지*, 제 11 권 제 1 호, pp. 170~176.
- (12) Hong, J. S. and Lee, J. M., 1994, “Vibration of Circular Rings with Local Deviation”, *ASME Transactions Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61(2), pp. 317~322.
- (13) Soedel, W., 1993, “Vibration of Shells and Plates”, Marcel Dekker.
- (14) STAR System Users Guide, 1983, Spectral Dynamics, Inc.