

유한요소-전달강성계수법을 이용한 골조 구조물의 과도응답해석

Transient Response Analysis of Frame Structures Using the Finite Element-transfer Stiffness Coefficient Method (FE-TSCM)

최 명 수† · 문 덕 홍* · 김 성 진**

Myung-Soo Choi, Deok-Hong Moon, and Seong-Jin Kim

(2002년 3월 25일 접수 ; 2002년 7월 26일 심사완료)

Key Words : Transient Response Analysis(과도응답해석), Transfer Stiffness Coefficient Method(전달강성계수법), Newmark Method(뉴마크법), Direct Integration Method(직접적분법), Frame Structure(골조 구조물)

ABSTRACT

In order to decrease remarkably the computation time and storage used in the direct integration method without the loss of accuracy, authors suggest a new transient analysis algorithm. This algorithm is derived from the combination of three techniques, that is, the transfer technique of the transfer stiffness coefficient method, the modeling technique of the finite element method, and the numerical integration technique of the Newmark method. In this paper, the transient analysis algorithm of a frame structure is formulated by the proposed method. The accuracy and computation efficiency of the proposed method are demonstrated through the comparing with the computation results by the direct integration method for three computation models under various excitations.

1. 서 론

최근 산업의 발달과 더불어 기계나 토목분야의 구조물은 점점 복잡, 거대화되거나 초정밀화 되고 있다. 따라서 이러한 구조물의 설계 시에 정적 해석과 더불어 동적 해석의 중요성이 점차 증가되고 있다. 동적 해석은 크게 자유진동해석과 강제진동해석으로 나눌 수 있고, 강제진동해석은 정상상태응답을 구하는 주파수응답해석과 시간의 경과에 따라 구조물의 응답을 구하는 과도응답해석이 있다.

구조물에 갑작스런 충격력이나 지진 등이 작용할 경우 구조물의 안정성을 확보하기 위하여 설계시에

과도응답해석을 수행할 필요가 있다. 이산화 모델링된 기계나 구조물의 과도응답을 얻기 위해, 가장 널리 사용되는 방법이 모드중첩법(mode superposition method)과 직접적분법(direct integration method)이다.⁽¹⁾ 모드중첩법은 고유치해석을 먼저 수행한 후, 진동모드를 중첩하여 계의 동적응답을 구하므로, 대규모 계가 주로 소수의 저차 진동모드로 거동을 하는 경우, 계의 응답을 구하는데 효과적이다. 그러나 모드중첩법의 적용은 선형계로 제한된다. 그리고 계의 감쇠 형태에 따라 적용이 곤란한 경우가 많다.

직접적분법(DIM)은 계의 응답을 구하기 위해, 많은 수의 진동모드가 고려되어야 할 경우에 적합한 해석 기법이다. 예를 들어, 짧은 시간에 강한 충격력이 계에 가해지는 경우, 그리고 파동전파(wave propagation) 문제를 해결하는 경우에 유용하다. 직접적분법은 비선형계에 대한 해석이 가능하고, 계의 감쇠가 비례감쇠가 아닌 경우에도 적용할 수 있으므로, 모드중첩법에 비해 해석기법의 적용성면에서 우수하다. 그러나 직접

† 책임저자, 정회원, 부경대학교 기계공학부
E-mail : vibsound@hanmail.net
Tel : (051) 620-1577, Fax : (051) 620-1574

* 정회원, 부경대학교 기계공학부

** 부경대학교 대학원 제어기계공학과

적분법은 동적 하중을 받는 복잡한 구조물을 해석할 경우, 계산이 비효율적인 경우가 많다. 왜냐하면, 복잡한 구조물의 과도해석을 정확히 수행하기 위해서는 해석대상 구조물의 요소 분할수를 증가시켜야 하고, 이는 계산에 필요한 행렬의 크기를 증가시키므로, 계산량이 크게 증가되는 원인이 된다. 따라서 직접적분법으로 복잡한 구조물의 과도응답을 정확히 수행하기 위해서는, 기억용량이 크고 계산속도가 빠른 컴퓨터를 필요로 하는 단점이 있다.

이러한 직접적분법의 단점을 극복하기 위하여, 다양한 연구가 수행되어 왔고, 그 중 Yamakawa 등은⁽²⁾ 상기의 단점을 극복하기 위하여 전달행렬법(transfer matrix method)에⁽³⁻⁵⁾ 수치적분법⁽⁶⁾ 결합한 증분전달행렬법(incremental transfer matrix method)을, Ohga는⁽⁷⁾ 유한요소법(finite element method)과⁽⁸⁾ 전달행렬법의 장점을 결합한 유한요소-전달행렬법^(9,10) 과도응답해석에 적용하였다. 이 방법들은 계의 자유도가 증가해도 행렬의 乘數가 증가될 뿐, 행렬의 차원은 변화하지 않으므로, 컴퓨터의 기억용량면에서 유리한 점이 많으므로 퍼스널 컴퓨터에서도 효과적인 방법이다. 그러나 기존의 전달행렬법을 확장시킨 상기 방법들은 과도해석 시에 응답의 정확성을 높이기 위해 시간 간격(Δt)를 작게하면, 수치계산에서 안정적으로 해를 구하지 못하는 문제가 발생한다.^(11,12) 그리고 구조물이 아주 긴 경우, 구조물의 중간에 경탄성 지지나 힌지가 존재하는 경우에는 기존의 전달행렬법과는 다른 복잡한 알고리즘을 추가 사용하지 않으면 해석을 수행하기가 곤란한 단점이 있다.⁽¹³⁾

Inoue는⁽¹²⁾ 영향계수의 전달에 기본 개념을 두고 있는 전달영향계수법(transfer influence coefficient method)에⁽¹⁴⁾ 시간적분법의 개념을 도입하여 대규모 구조물의 응답해석을 수행할 수 있는 알고리즘을 제안하였다. 그러나 이 방법은 일관성 질량행렬(consistent-mass matrix)을 사용할 수 없고, 계에서 구조감쇠와 같은 절점(node) 사이의 상대감쇠를 고려할 수 없으며, 격자형 구조물(lattice-type structure)과 같은 폐루프 계(closed-loop system)를 해석할 수 없는 취약점이 있다.

저자들은 모델링 및 해석의 적용성 면에서 우수한 직접적분법의 장점을 그대로 유지하면서, 계산의 효율성 면에서는 비능률적인 직접적분법의 단점을 보완한 유한요소-전달강성계수법을 제안하고자 한다. 이는

강성계수의 전달에 기본 개념을 두고 있는 전달강성계수법(transfer stiffness coefficient method)과⁽¹⁵⁻¹⁹⁾ 유한요소법의 모델링 기법과 아울러 뉴마크법(Newmark method)을⁽⁶⁾ 사용한 수치적분기법을 결합한 알고리즘이다.

본 연구에서는 골조 구조물에 대한 과도응답해석 알고리즘을 정식화하고 수치해석적으로 우수성을 검토하고자 한다. 그리고 다양한 동적 하중이 주어지는 골조 구조물에 대하여 과도응답해석을 수행하고, 제안된 방법의 결과와 기존의 직접적분법에 의한 결과를 비교·검토하여, 제안된 해석 기법의 유용성을 검토하고자 한다.

2. 골조 구조물의 과도응답해석 알고리즘

다양한 형태의 골조 구조물에 대한 과도응답해석 알고리즘을 유한요소-전달강성계수법으로 정식화하기 위하여, Fig. 1과 같은 평면 골조 구조물을 해석모델로 채택하였다.

2.1 모델링

평면 골조 구조물은 다수의 부재요소(member element), 기초지지 스프링과 감쇠기로 구성된 기초지지요소(base support element), 집중 질량 그리고 굴곡부(crooked part)로 구성된다. 구조물의 좌단과 우단, 외력의 작용점, 기초지지요소의 결합점, 그리고 굴곡부는 모두 절점(node)이 되도록 분할하고, 좌단에서 우단으로 각 절점을 절점 0, 절점 1, ..., 절점 n 이라고 한다.

골조 구조물의 면내진동을 해석할 경우, 각 절점의 변위벡터 \mathbf{u} 는 종변위 x , 횡변위 y 그리고 각변위 θ 로 구성되고, 힘벡터 \mathbf{f} 는 축력 F_x , 전단력 F_y 그리고 모멘트 N 으로 구성된다. 현 알고리즘에서는 구

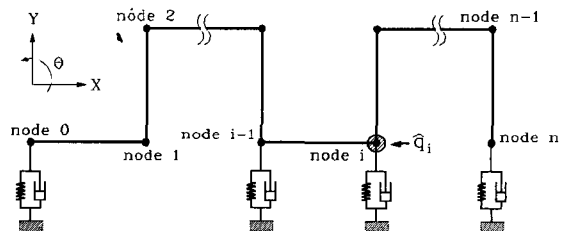


Fig. 1 Analytical model

조물 좌단과 우단의 경계조건을 절점 0과 절점 n 에 부착될 기초지지 스프링으로 모델링한다. 예를 들면, 좌단의 경계조건이 자유인 경우에는 절점 0의 기초지지 스프링의 스프링상수가 0이 되고, 경계조건이 구속인 경우에는 스프링상수가 ∞ 가 된다.

2.2 뉴마크법

수치 적분법의 하나인 뉴마크법을 간단히 정리하면 다음과 같다.⁽⁶⁾ 시간 t 에서 절점의 속도벡터 $\dot{\mathbf{u}}(t) = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{\theta}(t)\}$ 와 가속도벡터 $\ddot{\mathbf{u}}(t) = \{\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{\theta}(t)\}$ 는 시간 t 에서의 변위벡터 $\mathbf{u}(t) = \{x(t), y(t), \theta(t)\}$ 와 시간 간격 Δt 이전의 변위, 속도, 가속도벡터로 구성된 벡터 $\mathbf{Z}_A(t-\Delta t)$ 와 $\mathbf{Z}_V(t-\Delta t)$ 로 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}(t) + \mathbf{Z}_V(t-\Delta t) \quad (1a)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{u}(t) + \mathbf{Z}_A(t-\Delta t) \quad (1b)$$

여기서

$$\mathbf{Z}_V(t-\Delta t) = -\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}(t-\Delta t) + (1-\frac{\gamma}{\beta}) \dot{\mathbf{u}}(t-\Delta t) + (1-\frac{\gamma}{2\beta}) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}(t-\Delta t) \quad (2a)$$

$$\mathbf{Z}_A(t-\Delta t) = -\frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{u}(t-\Delta t) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}(t-\Delta t) + (1-\frac{1}{2\beta}) \ddot{\mathbf{u}}(t-\Delta t) \quad (2b)$$

이고, 매개변수 β 와 γ 는 수치적분의 정확성과 안정성을 얻기 위해 결정되는 상수로써, 수치계산 시에는 각각 0.25와 0.5를 대입하였다.

2.3 강성계수행렬과 힘보정벡터의 정의

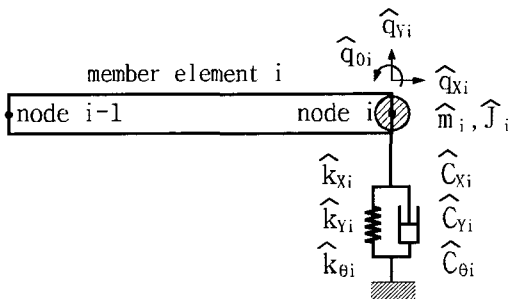


Fig. 2 Subsystem

Fig. 1과 같은 해석모델은 Fig. 2와 같은 부분계와 Fig. 3과 같은 굴곡부의 조합으로 생각할 수 있다. 부분계는 일정단면을 갖는 직선 부재요소와 기초지지요소로 구성되고, 기초지지요소는 부재를 기초로부터 지지하는 X축과 Y축 방향의 병진 스프링(스프링상수 (\hat{k}_x, \hat{k}_y))과 회전 스프링(\hat{k}_θ), 그리고 점성 감쇠기(감쇠계수 $\hat{C}_x, \hat{C}_y, \hat{C}_\theta$)로 구성된다.

전달과정을 쉽게 설명하기 위하여, 절점을 해석적으로 절점의 좌측과 우측으로 나누어 생각한다. Fig. 2에서 i 번째 부재요소와 i 번째 절점 사이의 결합점을 절점 i 의 좌측이라 하고, i 번째 부재 다음에 올 $i+1$ 번째 부재요소와 i 번째 절점 사이의 결합점을 절점 i 의 우측이라 한다. 절점 i 좌우측의 힘벡터와 변위벡터 사이의 관계를 강성계수행렬 \mathbf{S} 및 힘보정벡터 $\mathbf{e}(t)$ 를 이용하여 다음 식과 같이 정의한다.

$$\bar{\mathbf{f}}_i^i(t) = \bar{\mathbf{S}}_i^i \bar{\mathbf{u}}_i^i(t) + \bar{\mathbf{e}}_i^i(t) \quad (3a)$$

$$\mathbf{f}_i^i(t) = \mathbf{S}_i^i \mathbf{u}_i^i(t) + \mathbf{e}_i^i(t) \quad (3b)$$

$$\mathbf{f}_i^{i+1}(t) = \mathbf{S}_i^{i+1} \mathbf{u}_i^{i+1}(t) + \mathbf{e}_i^{i+1}(t) \quad (3c)$$

여기서 하첨자 i 는 절점 i 를 뜻하고, 상첨자 i 는 상태량을 정의할 때 사용된 좌표계가 i 번째 부재요소의 국부좌표계(local coordinate system)와 동일함을 나타낸다. 그리고 기호 $\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{S}, \mathbf{e}$ 위에 -가 붙은 것은 절점의 좌측을, 동일 기호위에 -가 없는 것은 절점의 우측을 의미한다.

2.4 좌표 변환

$i+1$ 번째 부재요소가 i 번째 부재요소로부터 반시계 방향으로 α_i 만큼 기울어져 있다면, i 번째와 $i+1$ 번째 국부좌표계로 나타낸 절점 i 의 변위벡터와 힘벡

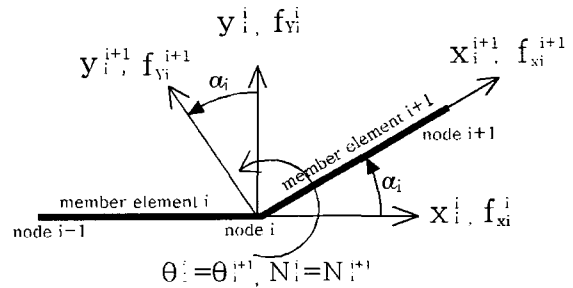


Fig. 3 Positive directions of state variables according to local coordinate systems

터의 정방향은 Fig. 3과 같다. 그리고 두 국부좌표계로 나타낸 절점 i 의 변위벡터와 힘벡터의 좌표변환식은 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_i^{i+1}(t) = \mathbf{R}(\alpha_i) \mathbf{u}_i^i(t) \quad (4a)$$

$$\mathbf{f}_i^{i+1}(t) = \mathbf{R}(\alpha_i) \mathbf{f}_i^i(t) \quad (4b)$$

여기서

$$\mathbf{R}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) & 0 \\ -\sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

이고, 좌표변환행렬 $\mathbf{R}(\alpha_i)$ 는 다음과 같은 성질을 가진다.

$$\mathbf{R}(-\alpha_i) = \mathbf{R}(\alpha_i)^T = \mathbf{R}(\alpha_i)^{-1} \quad (6)$$

여기서 상첨자 T 는 행렬의 전치(transpose)를 뜻하고, -1 은 역행렬을 나타낸다.

2.5 강성계수와 힘보정벡터의 전달식

시간 t 에서 i 번째 부재요소에 대한 운동방정식을 간단히 정리하면 식 (7)과 같다.

$$\mathbf{M}_i \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^L(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^R(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{C}_i \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^L(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_i^R(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{K}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^L(t) \\ \mathbf{u}_i^R(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^L(t) \\ \mathbf{f}_i^R(t) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서 \mathbf{M}_i , \mathbf{C}_i , \mathbf{K}_i 는 i 번째 부재요소에 대한 질량행렬과 감쇠행렬 그리고 강성행렬이고, $\mathbf{u}_i^{L,R}$, $\dot{\mathbf{u}}_i^{L,R}$, $\ddot{\mathbf{u}}_i^{L,R}$ 및 $\mathbf{f}_i^{L,R}$ 는 i 번째 부재요소 좌우측의 변위벡터, 속도벡터, 가속도벡터 및 힘벡터이다. 식 (7)을 현 알고리즘에 적합하도록 수정하면 다음과 같다.

$$\mathbf{A}_i \mathbf{u}_{i-1}^i(t) + \mathbf{B}_i \bar{\mathbf{u}}_i^i(t) + \mathbf{w}_{i-1}(t) = \mathbf{f}_{i-1}^i(t) \quad (8a)$$

$$\mathbf{C}_i \mathbf{u}_{i-1}^i(t) + \mathbf{D}_i \bar{\mathbf{u}}_i^i(t) + \bar{\mathbf{w}}_i(t) = \bar{\mathbf{f}}_i^i(t) \quad (8b)$$

여기서

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{i-1}^i(t) \\ \bar{\mathbf{f}}_i^i(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{f}_i^L(t) \\ \mathbf{f}_i^R(t) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i-1}^i(t) \\ \bar{\mathbf{u}}_i^i(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^L(t) \\ \mathbf{u}_i^R(t) \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{A}}_i & -\tilde{\mathbf{B}}_i \\ \tilde{\mathbf{C}}_i & \tilde{\mathbf{D}}_i \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_i & \tilde{\mathbf{B}}_i \\ \tilde{\mathbf{C}}_i & \tilde{\mathbf{D}}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \mathbf{M}_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C}_i + \mathbf{K}_i,$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{i-1}(t) \\ \bar{\mathbf{w}}_i(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\tilde{\mathbf{w}}_i^L(t) \\ \tilde{\mathbf{w}}_i^R(t) \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_i^L(t) \\ \tilde{\mathbf{w}}_i^R(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{M}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{Z}_{A_i}^L(t-\Delta t) \\ \mathbf{Z}_{A_i}^R(t-\Delta t) \end{Bmatrix} + \mathbf{C}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{Z}_{V_i}^L(t-\Delta t) \\ \mathbf{Z}_{V_i}^R(t-\Delta t) \end{Bmatrix}$$

이다.

절점 $i-1$ 우측의 강성계수행렬 \mathbf{S}_{i-1}^i 과 힘보정벡터 $\mathbf{e}_{i-1}^i(t)$ 를 알고 있다면, 절점 i 좌측의 강성계수행렬 $\bar{\mathbf{S}}_i^i$ 및 힘보정벡터 $\bar{\mathbf{e}}_i^i(t)$ 를, 식 (3a), (8) 그리고, 식 (3c)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식으로부터, 식 (10)과 같이 구할 수 있다. 즉, 식 (10)은 i 번째 부분계에서 절점 $i-1$ 우측과 절점 i 좌측사이의 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 필드(field) 전달식이 된다.

$$\bar{\mathbf{S}}_i^i = \mathbf{D}_i + \mathbf{C}_i \mathbf{V}_i \quad (10a)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_i^i(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{G}_i^{-1} \{ \mathbf{w}_{i-1}(t) - \mathbf{e}_{i-1}^i(t) \} + \bar{\mathbf{w}}_i(t) \quad (10b)$$

여기서 \mathbf{V}_i 와 \mathbf{G}_i 는 다음과 같다.

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{B}_i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{S}_{i-1}^i - \mathbf{A}_i \quad (11)$$

Fig. 2에서 외력이 작용하는 절점 i 에 집중질량, 기초지지 스프링 및 점성감쇠기가 존재한다면, 절점 i 에서 힘벡터의 평형방정식과 변위벡터의 연속조건을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_i^i(t) + \hat{\mathbf{M}}_i \dot{\mathbf{u}}_i^i(t) + \hat{\mathbf{C}}_i \mathbf{u}_i^i(t) + \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{u}_i^i(t) \\ = \mathbf{f}_i^i(t) + \hat{\mathbf{q}}_i^i(t) \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i^i(t) = \mathbf{u}_i^i(t) \quad (12b)$$

여기서

$$\hat{\mathbf{M}}_i = \begin{bmatrix} \hat{m} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{m} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{J}_i \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}}_i = \begin{bmatrix} \hat{C}_x & 0 & 0 \\ 0 & \hat{C}_y & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_\theta \end{bmatrix}_i,$$

$$\hat{\mathbf{K}}_i = \begin{bmatrix} \hat{k}_x & 0 & 0 \\ 0 & \hat{k}_y & 0 \\ 0 & 0 & \hat{k}_\theta \end{bmatrix}_i, \quad \hat{\mathbf{q}}_i^i(t) = \begin{bmatrix} \hat{q}_x(t) \\ \hat{q}_y(t) \\ \hat{q}_\theta(t) \end{bmatrix}_i \quad (13)$$

이고, 식 (13)의 \hat{m} 과 \hat{f} 는 집중 질량과 질량관성모멘트를 뜻하고, \hat{q}_x 와 \hat{q}_y 는 X축과 Y축 방향의 외력 그리고 \hat{q}_θ 는 외력 모멘트이다.

절점 i 의 좌측에서 절점 i 의 우측으로 강성계수행렬과 힘보정벡터의 전달을 고려해보자. 식 (3a), (3b) 그리고 식 (12)로부터, 절점 i 우측의 강성계수행렬 \mathbf{S}_i^i 와 힘보정벡터 $\mathbf{e}_i^i(t)$ 는 식 (14)와 같이 구할 수 있다. 즉, 식 (14)는 절점 i 좌측과 절점 i 우측사이의 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 포인트(point) 전달식이 된다.

$$\mathbf{S}_i^i = \bar{\mathbf{S}}_i^i + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \hat{\mathbf{M}}_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \hat{\mathbf{C}}_i + \hat{\mathbf{K}}_i \quad (14a)$$

$$\mathbf{e}_i^i(t) = \bar{\mathbf{e}}_i^i(t) - \hat{\mathbf{q}}_i^i(t) + \hat{\mathbf{M}}_i \mathbf{Z}_{A0}(t - \Delta t) + \hat{\mathbf{C}}_i \mathbf{Z}_{V0}(t - \Delta t) \quad (14b)$$

절점 i 에 굴곡부가 있다면, 강성계수행렬과 힘보정벡터를 좌표변환을 해야 한다. 이는 식 (3b), (3c), (4) 그리고 식 (6)으로부터 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_i^{i+1} = \mathbf{R}(a_i) \mathbf{S}_i^i \mathbf{R}(a_i)^T \quad (15a)$$

$$\mathbf{e}_i^{i+1}(t) = \mathbf{R}(a_i) \mathbf{e}_i^i(t) \quad (15b)$$

Fig. 1의 해석모델에 대하여 강성계수행렬과 힘보정벡터를 순차적으로 전달하기 위해서는 먼저 절점 0의 \mathbf{S}_0^0 와 $\mathbf{e}_0^0(t)$ 를 알아야 한다. 이들은 좌단의 경계조건과 힘의 평형식으로부터 구할 수 있다. 즉, 구조물의 좌단에서의 경계조건을 절점 0의 기초지지 스프링으로 고려하였으므로, 절점 0 좌측의 힘벡터 $\bar{\mathbf{f}}_0^0(t)$ 는 해석적으로 영벡터로 간주할 수 있다. 따라서 첫 번째 부재의 국부좌표계로 나타낸 절점 0에서의 힘의 평형식과 식 (3c)에 $i=0$ 을 대입한 식으로부터 절점 0의 강성계수행렬 \mathbf{S}_0^0 와 힘보정벡터 $\mathbf{e}_0^0(t)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_0^0 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \hat{\mathbf{M}}_0 + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \hat{\mathbf{C}}_0 + \hat{\mathbf{K}}_0 \quad (16a)$$

$$\mathbf{e}_0^0(t) = \hat{\mathbf{M}}_0 \mathbf{Z}_{A0}(t - \Delta t) + \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{Z}_{V0}(t - \Delta t) - \mathbf{q}_0^0(t) \quad (16b)$$

따라서 식 (16)을 시작으로 식(10), (14), (15)를 연속적으로 적용하면, 최종적으로 구조물 끝단인 절점 n 의 강성계수행렬 \mathbf{S}_n^n 과 힘보정벡터 $\mathbf{e}_n^n(t)$ 를 구할 수 있다.

2.6 변위벡터의 전달식

식(3c)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식과, 식 (8a)와 식 (11)로부터, i 번째 부재요소 좌우측 변위벡터의 관계식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\mathbf{u}_{i-1}^i(t) = \mathbf{V}_i \bar{\mathbf{u}}_i^i(t) + \mathbf{G}_i^{-1} \{ \mathbf{w}_{i-1}(t) - \mathbf{e}_{i-1}^i(t) \} \quad (17)$$

구조물 우단의 경계조건을 절점 n 의 기초지지 스프링으로 모델링하였으므로, 절점 n 의 우측은 경계조건이 자유($\mathbf{f}_n^n(t) = \mathbf{0}$)인 것으로 간주할 수 있다. 따라서 $\mathbf{f}_n^n(t) = \mathbf{0}$ 와 식 (3b)에 $i=n$ 을 대입한 식으로부터 우단의 변위벡터 $\mathbf{u}_n^n(t)$ 을 아래와 같이 절점 n 우측의 강성계수행렬 및 힘보정벡터로부터 구할 수 있다.

$$\mathbf{u}_n^n(t) = -(\mathbf{S}_n^n)^{-1} \mathbf{e}_n^n(t) \quad (18)$$

따라서 식 (18)을 시작으로 절점에서 변위벡터의 연속조건인 식 (12b)와 식 (17) 그리고 좌표변환식인 식 (4a)를 연속적으로 적용하면, 모든 절점의 변위벡터를 우단에서 좌단으로 순차적으로 계산할 수 있다.

2.7 힌지를 갖는 경우

Fig. 4와 같이 절점 i 에서 두 부재가 탄성 스프링으로 연결된 경우, 절점 i 좌측과 우측의 변위벡터는 불연속($\bar{\mathbf{u}}_i^i(t) \neq \mathbf{u}_i^i(t)$)이 되고, 힘벡터의 관계식은

$$\mathbf{f}_i^i(t) = \bar{\mathbf{f}}_i^i(t) = \check{\mathbf{P}}_i^i \{ \mathbf{u}_i^i(t) - \bar{\mathbf{u}}_i^i(t) \} \quad (19)$$

가 된다. 여기서 강성행렬 $\check{\mathbf{P}}_i^i$ 는 X축과 Y축 방향의 병진 스프링과 회전스프링의 스프링상수(k_x, k_y, k_θ)로 구성되는 3×3 의 대각행렬이다. 탄성 연결부의 좌측에서 우측으로의 전달식은 식 (3), (9), (19)로부터 다음과 같이 유도할 수 있다.

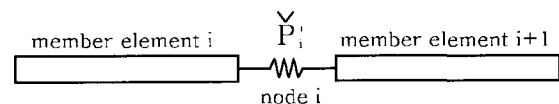


Fig. 4 Elastic connection part

$$S_i^i = \{(\bar{S}_i^i)^{-1} + (\bar{P}_i^i)^{-1}\}^{-1} \quad (20a)$$

$$e_i^i(t) = \{(\bar{S}_i^i)^{-1} + (\bar{P}_i^i)^{-1}\}^{-1} (\bar{S}_i^i)^{-1} \bar{e}_i^i(t) \quad (20b)$$

따라서, i 번째 부재와 $i+1$ 번째 부재사이에 Fig. 4와 같은 탄성 연결부가 있을 경우에는 식 (14) 대신에 식 (20)을 사용하여 강성계수행렬 및 힘보정벡터를 전달할 수 있다.

탄성 연결부 양측의 변위벡터는 불연속이므로, 변위벡터의 전달식은 식 (3b)와 식 (19)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{u}_i^i(t) = u_i^i(t) - (\bar{P}_i^i)^{-1} \{S_i^i u_i^i(t) + e_i^i(t)\} \quad (21)$$

골조 구조물의 중간에 힌지가 존재하는 경우에는, 절점 i 좌우측의 병진 방향 변위벡터가 연속이고 회전방향의 변위는 불연속이 되므로, 현 알고리즘에서는 절점 i 에 힌지가 존재하는 경우에는 \bar{P}_i^i 의 병진 스프링상수 \hat{k}_x, \hat{k}_y 에 ∞ 에 가까운 아주 큰 값을, 회전 스프링상수 \hat{k}_θ 에 0에 가까운 아주 작은 값을 대입한 후, 식 (20)을 이용하여 강성계수행렬과 힘보정벡터를 전달하고, 변위벡터의 계산 시에는 식(21)을 이용한다. 회전방향 스프링상수에 0을 대입하지 않은 이유는 0을 대입하면 전달식에서 행렬 \bar{P}_i^i 의 역행렬을 계산할 수 없기 때문이다.

3. 수치계산 결과 및 검토

유한요소-전달강성계수법과 직접적분법을 비교하기 위하여, 골조 구조물의 과도응답을 계산할 수 있는 프로그램을 각각 만들었다. 그리고 퍼스널 컴퓨터 (CPU: PentiumIII 1 GHz, memory: 512 MB)상에서 스프링과 감쇠기로 지지된 굴곡형 구조물과 힌지를 갖는 문형 구조물 등을 대상으로 과도응답을 계산한 후, 그 결과를 비교·검토하였다.

3.1 굴곡형 구조물의 과도응답해석

Fig. 5에 나타난 계산 모델 I은 구조물의 좌우단과 굴곡부가 병진방향의 스프링과 점성 감쇠기로 지지된 굴곡형 구조물이다. 구조물은 전체 길이 1.5 m, 직경 0.01 m, 밀도 7860 kg/m³, 종탄성계수 206 GPa 이고, 전체 구조물을 총 60개의 부재요소로 분할하였다. 병진방향 스프링의 스프링상수는 모두 10⁵ N/m이

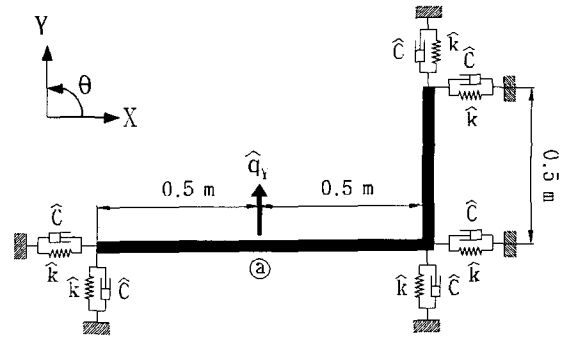


Fig. 5 Computation model I

Table 1 Natural frequencies for model I(unit: Hz)

Method \ Order	FE-TSCM	FEM
1st	25.099	25.099
2nd	71.525	71.525
3rd	81.829	81.829
4th	106.832	106.832
5th	122.623	122.623

고, 감쇠계수는 모두 10 N·s/m이다.

Table 1은 계산 모델 I의 고유진동수를 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법(FEM)으로 계산한 결과이다.

시간 간격 Δt 를 0.001초로 하여, Fig. 5의 ③점에 Y축 방향의 조화 강제외력 $\hat{q}_i(t) = Q \cos \Omega t$ ($Q = 10$ N)가 작용할 때, ③점의 Y축 방향의 과도응답을 외력의 진동수 ($\Omega = 10, 20, 25$ Hz)별로 계산한 결과가 Fig. 6이다. 유한요소-전달강성계수법과 직접적분법의 결과가 잘 일치하였다. Fig. 6에서 가진 진동수가 25 Hz인 경우, 과도응답이 크게 증가하는 이유는 Table 1에서 알 수 있듯이 가진 진동수 25 Hz가 구조물의 1차 고유진동수 부근이기 때문이다. 그리고 가진 진동수가 10 Hz와 20 Hz인 경우에는 응답이 0.2초 간격으로 주기성을 보여 주고 있는데, 이는 계의 과도응답은 제차해와 비제차해의 합이므로, 여기서는 약 25 Hz의 1차 고유진동수로 진동하는 제차해와 각각 10 Hz와 20 Hz의 가진진동수로 진동하는 비제차해가 0.2초 간격으로 중첩되기 때문이다.

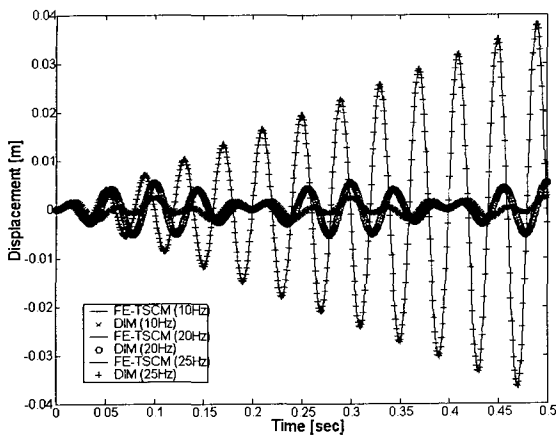


Fig. 6 Transient response of point (a) of computation model I under harmonic excitation

3.2 문형 구조물의 과도응답해석

Fig. 7의 계산 모델 II는 Fig. 8의 I형강(W200×200)으로 구성된 일반적인 문형 구조물이다. 구조물은 전체 길이 20 m, 단면적 $6.624 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, 단면2차모멘트 $3.584 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, 밀도 7860 kg/m^3 , 종탄성계수 206 GPa이고, 구조감쇠는 강성의 0.5%로 고려하였다. 구조물 양단의 경계조건은 단순지지이고, 전체 구조물을 총 400개의 부재요소로 분할하였다.

Table 2는 계산 모델 II의 고유진동수를 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 계산한 결과이다.

시간 간격 Δt 를 0.005초로 하여, Fig. 7의 (a)점에 Y축 방향의 조화 강제외력 $\hat{q}_y(t) = Q \cos \Omega t$ ($Q = -2000 \text{ N}$)가 작용할 때, (a)점의 Y축 방향의 과도응답을 외력의 진동수 ($\Omega = 5, 7, 9 \text{ Hz}$)별로 계산한 결과가 Fig. 9이다. 유한요소-전달강성계수법의 계산 결과들이 기존의 직접분법의 결과와 잘 일치하였으므로, 제안된 방법의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

Fig. 7의 (a)점에 Y축 방향으로 -10000 N의 스텝 하중이 작용할 때, (a)점의 Y축 방향의 과도응답을 계산한 결과가 Fig. 10이다. 그리고 Fig. 7의 (a)점에 -10 N·s의 충격량이 주어질 때, (a)점의 Y축 방향의 과도응답을 계산한 결과가 Fig. 11이다. Fig. 10과 Fig. 11의 응답을 관찰해 보면 약 9 Hz의 진동을 하는데, 이는 Table 2에 나타난 계산 모델 II의 2차 고유진동수에 해당된다. 응답에서 1차 고유진동수로 진동하지 않는 이유는 응답점이 골조구조물의 1차 진동의 절이 되기 때문이다.

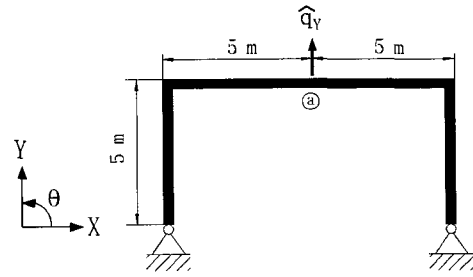


Fig. 7 Computation model II

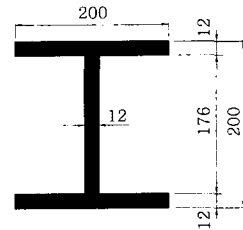


Fig. 8 Cross section of model II (unit: mm)

Table 2 Natural frequencies for model II (unit: Hz)

Order	Method	FE-TSCM	FEM
1st		2.471	2.471
2nd		9.230	9.230
3rd		24.462	24.462
4th		29.824	29.824
5th		38.898	38.898

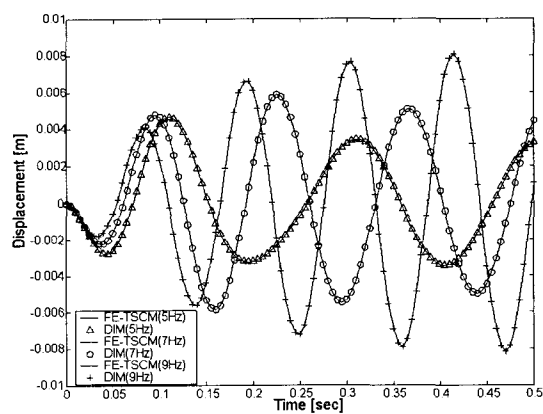


Fig. 9 Transient response of point (a) of computation model II under harmonic excitation

다양한 하중들에 대하여 유한요소-전달강성계수법과 직접적분법으로 문형 구조물의 과도응답을 해석한 결과가 잘 일치하였다.

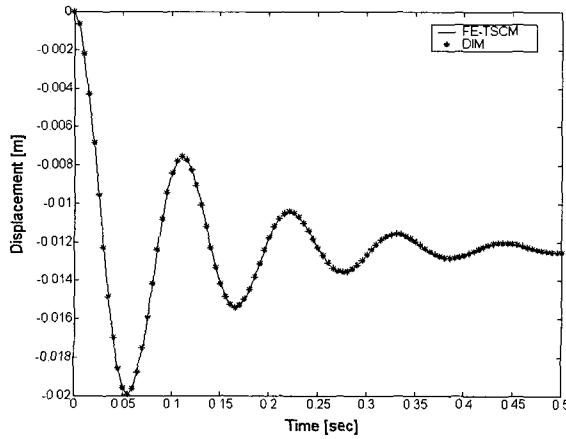


Fig. 10 Transient response of point (a) of computation model II under step excitation

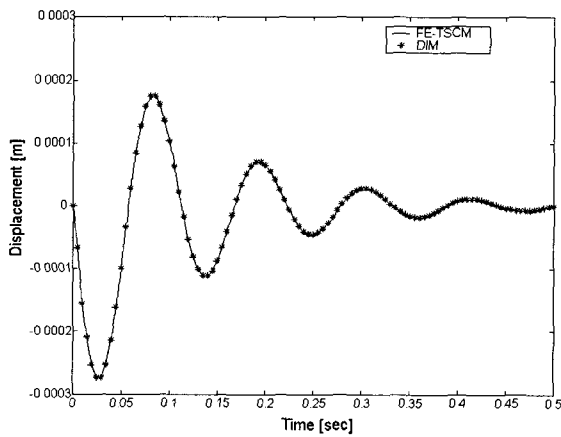


Fig. 11 Transient response of point (a) of computation model II under impulse excitation

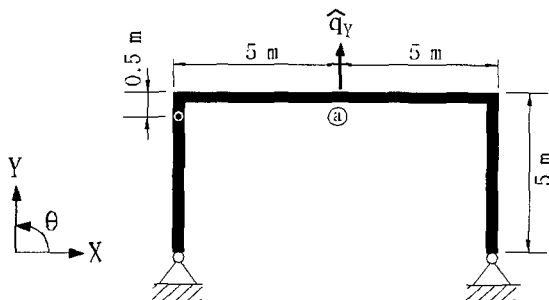


Fig. 12 Computation model III

Table 3 Natural frequencies for model III (unit: Hz)

Order \ Method	FE-TSCM	FEM
1st	1.414	1.414
2nd	7.620	7.620
3rd	23.722	23.722
4th	28.738	28.738
5th	34.935	34.935

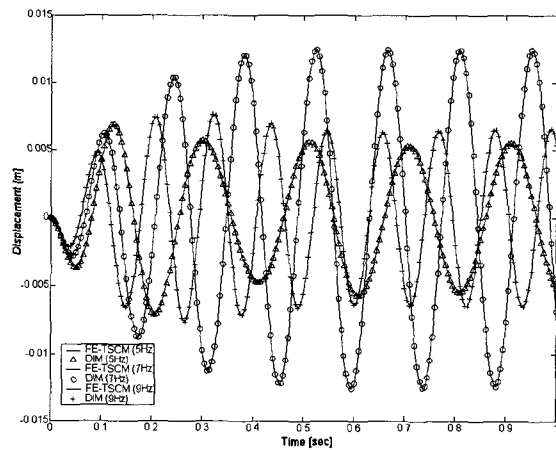


Fig. 13 Transient response of point (a) of computation model III under harmonic excitation

3.3 힌지를 갖는 문형 구조물의 과도응답해석

Fig. 12의 계산 모델 III은 힌지를 갖는 문형구조물이다. 구조물의 물성치는 계산 모델 II와 동일하다. 힌지는 골꼭점에서 0.5 m 떨어져 있다. Table 3은 계산 모델 III의 고유진동수를 계산한 결과이다.

시간 간격 Δt 를 0.005초로 하여, Fig. 12의 (a)점에 Y축 방향의 조화 강제외력 $\hat{q}_y(t) = Q \cos \Omega t$ ($Q = -2000$ N)이 작용할 때, (a)점의 Y축 방향의 과도응답을 외력의 진동수 ($\Omega = 5, 7, 9$ Hz)별로 계산한 결과가 Fig. 13이다. 유한요소-전달강성계수법과 직접적분법의 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 12의 (a)점에 Y축 방향으로 -10000 N의 스텝 하중이 작용할 때, (a)점의 Y축 방향의 과도응답을 계산한 결과가 Fig. 14이다. 그리고 Fig. 12의 (a)점에 -10 N·s의 충격량이 주어질 때, (a)점의 Y축 방향의 과도응답을 계산한 결과가 Fig. 15이다. 힌지를 갖는

문형 구조물에 대해서도 다양한 하중들에 대한 유한요소-전달강성계수법과 직접적분법의 계산 결과가 잘 일치하였다.

기존의 직접적분법과 본 연구에서 제안된 유한요소-전달강성계수법의 요소 모델링이 동일하므로, 양 방법을 이용한 과도응답해석의 결과는 일치해야 한다. 따라서 앞에서 제시한 과도응답 결과를 통해, 다양한 하중을 받는 골조 구조물의 과도응답해석에 유한요소-전달강성계수법이 신뢰성있는 해석기법임을 확인할 수 있었다.

본 해석기법은 구조물 중간에 힌지가 존재하면, 병진 스프링상수에 ∞ 에 가까운 아주 큰 값을, 회전 스프링상수에 0에 가까운 아주 작은 값을 대입한 후,

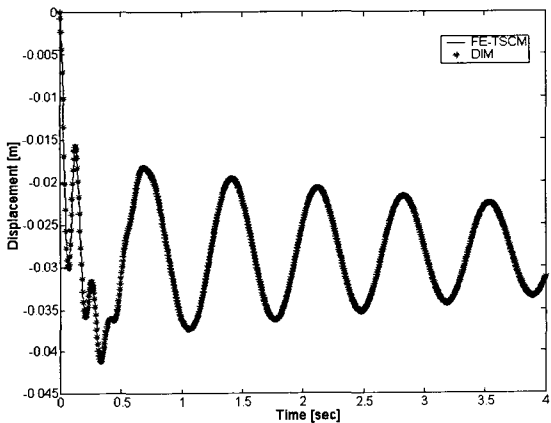


Fig. 14 Transient response of point (a) of computation model III under step excitation

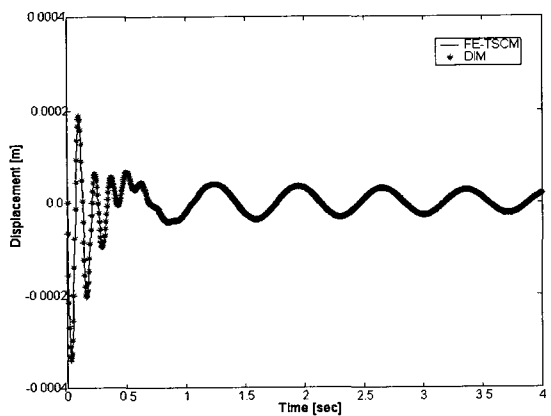


Fig. 15 Transient response of point (a) of computation model III under impulse excitation

전달 계산을 수행하면 된다. 그러나 본 해석기법과 유사점이 많은 전달행렬법에서는 구조물에 힌지가 존재하면, 본 해석기법처럼 힌지를 스프링의 연결로 간단히 모델링하면, 수치계산시에 문제가 발생할 경우가 많다. 따라서 전달행렬법에서는 구조물의 중간에 힌지가 존재할 경우에는 복잡한 알고리즘을 추가하지 않으면 안되므로, 전달행렬법의 장점중 하나인 해석기법의 간편성을 잃어버린다.

3.4 계산시간 비교

유한요소-전달강성계수법과 직접적분법의 계산 처리 능력, 즉 계산시간을 비교한 것이 Table 4이다. Table 4는 힌지를 갖는 문형 구조물이 조화외력(진동수 7 Hz)을 받을 때, Fig. 13의 응답을 구하기 위하여, 0.005초의 시간 간격으로 1초까지 과도응답을 구하는 데 소요된 계산시간이다. Table 4에서 골조 구조물의 모델링에 사용된 부재 분할수가 적을 경우에는 양 방법의 차이는 크지 않지만, 계의 자유도수와 관계가 깊은 부재 분할수가 증가할수록 유한요소-전달강성계수법이 계산시간면에서 직접적분법보다 훨씬 우수함을 알 수 있었다.

Table 4에서 부재의 분할수를 400으로 할 때, 양 방법으로 Fig. 13의 과도응답을 0.005초, 0.25초, 0.5초, 0.75초 및 1초까지 구하는데 소요된 계산시간을 나타낸 것이 Table 5이다. 직접적분법은 계산 초기에 상당한 시간이 소요되는 것을 알 수 있는데, 그 이유는 다음과 같다. 첫째, 직접적분법은 골조 구조물을 구성하는 각 부재요소의 국부(local) 질량행렬 및 강성행렬(크기 6×6)을 이용하여 전체(global) 질량행렬과 강성행렬(크기 1203×1203)을 만드는 과정에서 많은 시간이 소요된다. 둘째, 직접적분법에서는 전체 행렬 크기의 거대 행렬의 역행렬 계산이 2회 필요하고

Table 4 Comparison of computation times for computation model III (unit: sec)

Number of member elements	FE-TSCM	DIM
120	7.47	8.24
200	12.36	29.06
320	19.60	96.67
400	24.44	164.67

Table 5 Comparison of computation times according to response time (unit: sec)

Response time	FE-TSCM	DIM
0.005	0.71	109.52
0.250	6.59	123.09
0.500	12.52	136.93
0.750	18.51	150.77
1.000	24.44	164.67

여기서 많은 시간이 소요된다. 반면에 유한요소-전달강성계수법은 전달의 개념을 이용하므로 전체 질량행렬이나 강성행렬을 구할 필요가 없고, 전달 계산하는 횟수는 많지만, 강성계수행렬의 크기가 3×3 이므로, 상대적으로 계산시간을 많이 줄일 수 있었다. 그리고 유한요소-전달강성계수법은, 직접적분법과는 달리 전체 질량행렬이나 강성행렬 등을 일시에 사용하지 않으므로, 컴퓨터의 기억용량면에서 유용함을 알 수 있었다.

4. 결 론

대부분의 기계나 구조물에는 다양한 동적하중이 작용하므로, 계의 안정성을 확보하기 위하여 설계시에 과도응답해석을 수행할 필요가 있다. 이산화 모델링된 계의 과도응답을 구하기 위해 직접적분법을 이용하면, 모델링 및 해석의 적용성 면에서 우수하지만, 계산시간이나 컴퓨터 기억용량의 면에서는 비능률적이므로, 저자들은 이 점에 착안하여 기존의 직접적분법의 장점을 유지하면서 단점을 해결할 수 있는 새로운 해석 기법인 유한요소-전달강성계수법을 제안하였다.

이 논문에서는 유한요소-전달강성계수법을 이용하여 골조 구조물에 대한 과도응답해석 알고리즘을 정식화하였다. 제안된 방법이 전달식을 이용하므로 컴퓨터의 기억용량면에서 직접적분법에 비해 유용함을 알 수 있었다. 그리고 조화 외력, 충격하중 및 계단 하중과 같은 다양한 동적 하중이 작용하는 골조 구조물을 대상으로 과도응답해석을 수행한 결과, 기존의 직접적분법과 동일한 계산정도를 유지하면서 계산시간면에서는 우수함을 알 수 있었다.

제안된 방법은 골조형 구조물을 비롯한 다양한 직

선형 구조물의 과도해석에 적합하며, 추후 평판형 구조물이나 셸형 구조물과 같은 비직선형 구조물에 적용할 수 있는 알고리즘의 확장이 필요하다고 사료된다.

참 고 문 헌

- (1) Tedesco, J. W., Mcdougal, W. G. and Ross, C. A., 1999, Structural Dynamics Theory and Application, Addison-Wesley, California, Chap. 12 and 13.
- (2) 平見尙隆, 平野藤己, 山川宏, 1986, “増分傳達マトリックス法を用いた構造物の非線型動的應答解析,” 日本機械學會論文集(C), 第 52 卷, 第 484 號, pp. 3168 ~3174.
- (3) Pestel, E. C. and Leckie, F. A., 1963, Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, New York.
- (4) 이형우, 박노길, 1998, “전달행렬법을 이용한 다단 차차계의 비틀림 진동 해석,” 한국소음진동공학회지, 제 8 권, 제 3 호, pp. 504~512.
- (5) 전오성, 2002, “회전축요소의 전달행렬의 이용과 진동해석,” 한국소음진동공학회논문집, 제 12 권, 제 2 호, pp. 161~169.
- (6) Rao, S. S., 1990, Mechanical Vibration(2nd ed.), Addison-Wesley, California, chap. 11.
- (7) Ohga, M. and Shigematsu, T., 1987, “Transient Analysis of Plates by a Combined Finite Element-Transfer Matrix Method,” Computers and Structures, Vol. 26, No. 4, pp. 543 ~549.
- (8) Petyt, M., 1990, Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University, New York.
- (9) Dokainish, M. A., 1972, “A New Approach for Plate Vibration: Combination of Transfer Matrix and Finite Element Technique,” Trans. ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 94, No. 2, pp. 526~530.
- (10) 김태중, 2000, “유한요소-전달행렬법에 의한 스크롤 압축기 크랭크축의 과도 동적 해석,” 한국소음진동공학회지, 제 10 권, 제 1 호, pp. 97~106.

- (11) Kumar, A. S. and Sankar, T. S., 1986, "A New Transfer Matrix Method for Response Analysis of Large Dynamic Systems," Vol. 23, No. 4, pp. 545~552.
- (12) 井上卓見, 末岡淳南, 藤本俊郎, 1996, "大規模構造物の時刻歴應答解析," 日本機械學會論文集(C), 第 62 卷, 第 604 號, pp. 4558~4566.
- (13) 田中基八郎, 三枝省三, 1988, 振動モデルとシミュレーション, 應用技術出版, 東京, pp. 105~110.
- (14) 井上卓見, 末岡淳南, 藤本俊郎, 1994, "傳達影響係數法による二次元, 三次元樹狀構造物の線形強制振動解析," 日本機械學會論文集(C), 第 60 卷, 第 572 號, pp. 1159~1166.
- (15) 近藤孝廣, 綾部隆, 末岡淳南, 1996, "部分構造合成法を採用した傳達剛性係數法の提案," 日本機械學會論文集(C), 第 62 卷, 第 596 號, pp. 1277~1284.
- (16) 문덕홍, 최명수, 1999, "강성계수의 전달을 이용한 다양한 연결부를 갖는 구조물의 진동해석," 대한기계학회논문집 A권, 제 23 권, 제 2 호, pp. 344~356.
- (17) Moon, D. H. and Choi, M. S., 2000, "Vibration Analysis for Frame Structures Using Transfer of Dynamic Stiffness Coefficient Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 5, pp. 725~736.
- (18) 문덕홍, 최명수, 1998, "전달강성계수법에 의한 격자형 구조물의 자유진동 해석," 한국소음진동공학회지, 제 8권, 제 2호, pp. 361~368.
- (19) 문덕홍, 최명수, 1998, "전달강성계수법에 의한 격자형 구조물의 강제진동 해석," 한국소음진동공학회지, 제 8권, 제 5호, pp. 949~956.