

대수 교육과정의 변화에 관한 고찰 - 패턴에 기초한 대수 도입을 중심으로 -

김 성 준*

I. 서 론

대수 교육과정의 변화는 21세기가 요구하는 새로운 수학 교육과정과 함께 중요한 연구과제로 제시되는 문제 가운데 하나이다. 이 가운데 ‘패턴에 기초한 대수 도입’은 대수 교육과정 개선을 요구하는 목소리와 함께 대수에서 나타나고 있는 가장 중요한 변화로 볼 수 있다. 이러한 변화는 이미 미국, 영국, 호주 등의 교육과정에서 강조되고 있는 부분이다¹⁾(Stacey & Macgregor, 2001, p.141). 그러나 대수를 문자 사용과 동일하게 보는 사람들은 이러한 패턴을 통한 대수 도입 방식에 대하여 “어떻게 초등학교에서부터 문자 이전에 패턴을 통해 대수를 가르칠 수 있는가?”와 같은 문제를 제기하는데, 이것은 패턴에 기초한 대수 도입을 기존의 전통적인 대수 도입 방식에 따라 해석하기 때문에 발생하는 것이다. 대수 학습에서 문자는 핵심적인 역할을 하고 있으나, 그렇다고 해서 대수가 반드시 문자 사용 자체와 일치하는 것은 아니다. 흔히 문자 사용을 대수와 동일시하는 경우는 대수를 일반화된 산술 또는 표현 시

스템으로 보는 입장이며, 대수를 규칙들의 집합으로 본다면 이러한 문자 이외의 다른 무엇이 요구된다고 할 수 있다.

따라서 여기서 제시한 새로운 대수 교육과정은 어떤 면에서 보면 대수 자체보다 대수를 학습하는 데 도움이 되는 ‘대수적 사고’를 강조하기 위한 도입으로 볼 수 있다. 여기서 말하는 대수적 사고는 앞으로의 대수 학습에 도움이 되는 사고이자, 동시에 대수를 학습한 이후에 이를 통해 응용 가능한 사고로 볼 수 있다. 전자의 경우는 대수 학습의 전제조건으로, 후자의 경우는 대수 학습 이후의 내용과 관련된 것이다. 이러한 대수적 사고에 대한 해석은 대수에 대한 다양한 정의에서처럼 여러 형태로 파악되는 데, 이 글에서 주장하는 패턴에 기초한 대수 도입은 그 가운데 관계와 규칙을 강조한 것으로 볼 수 있다. 패턴을 파악하는 것은 주어진 패턴에 내재해 있는 관계를 파악하는 것이며, 동시에 규칙에 대한 논의를 통해 일반화를 하는 것이다. 따라서 새로운 교육과정에서 강조하는 것은 대수 해석에서 핵심이 되는 관계, 규칙, 그리고 일반화의 지도로 볼 수 있다. 따라서 새로운 교육과정 역시 문자 사용에

* 서울대 대학원

1) 미국의 경우 Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics(1989)에서, 영국은 the National Curriculum(1991)에서, 호주는 National Mathematics Profile(1993)에서 패턴이 강조되고 있다(Stacey & Macgregor, 2001, p.141). 또한 미국의 경우 Principles and Standards for School Mathematics(NCTM, 2000, p.37)에 제시된 Algebra Standards에서 계속해서 ‘패턴, 관계, 합수에 대한 이해’를 첫 번째로 강조하고 있으며, 또한 RME(Realistic Mathematics Education)를 번역한 Britannica 교과서 Algebra strand를 보면 패턴을 강조하는 ‘Patterns and Symbols’에서 시작하고 있음을 알 수 있다.

서 일반화된 수와 변수의 수준을 달성하는 그 목적으로 한다. 더불어 이것은 학생들이 앞으로 고등 대수를 학습하는 데 있어서 단계적인 도입을 통해 대수에 대한 자신감을 심어 주려는 시도로 볼 수 있다.

이러한 측면에서 볼 때 전통적인 대수 주제로 여겨져 왔던 대수식의 조작이나 방정식의 풀이와 함께 새로운 대수 교육과정은 앞으로 학교 대수에서 패턴과 관계의 이해를 강조하면서, 이를 통해 어떻게 대수적 사고를 말하고 표현할 것인가에 관한 문제가 핵심적인 내용으로 등장할 것이다. 이를 위해서 패턴을 통한 대수 교육과정의 개선은 대수에서 요구하는 수학적 사고를 염두에 두면서 진행되어야 하며, 동시에 패턴에 기초한 대수 지도에 대한 분명한 정의와 내용 등을 제시하는 것이 요구된다. 이 글은 이러한 요구에서 이미 진행되고 있는 이러한 대수 교육과정의 변화를 기술하고 비교하는 것을 그 목적으로 한다. 우선 이 글에서는 미국의 NCTM과 네덜란드의 현실주의 수학 교육(RME, Realistic Mathematics Education)에서 제시한 교육과정을 토대로 하여 패턴에 기초한 대수 도입이 어떻게 이루어지고 있는지를 살펴 볼 것이다. 그리고 이러한 논의를 통해 우리의 교육과정에서 등장하는 패턴과 비교하여, 우리의 경우 이러한 패턴이 대수와 연속선상에서 다루어지고 있지 않다는 점을 대수 지도와 관련된 하나의 문제점으로 지적할 것이다.

II. 대수 교육과정의 비교

전통적인 대수 교육과정은 학생들이 수를 대

신해서 문자 표현을 쓰고 이 표현들을 해석하거나 변환하는 것을 대수의 출발점으로 본다. 그러나 몇몇 연구자들은 특별한 기호들의 사용 보다 오히려 대수의 특징을 나타내는 것이 대수에서 더욱 중요하다는 점을 지적하고 있으며 (Stacey & Macgregor, 2001, p.141), 이 글은 이와 같은 인식에서 시작한다. 먼저 전통적인 대수 교육과정에서의 목적 및 그로 인해 학생들이 경험하는 어려움에 대하여 살펴보자.

대수 기호 사용은 수의 일반적인 성질과 수에서의 조작을 일반화시키는 것을 그 목적으로 한다. 이것은 대수적 사고 측면 가운데 일반성의 표현을 그 특성의 하나로 생각하고, 모든 학교수학에서 기호 표현을 통해 일반성을 확보하려는 것으로 볼 수 있다. 전통적인 대수 교육과정에서의 문제는 이러한 기호 조작이 갑작스럽게 이루어진다는 데 있다. 그리고 이렇게 이루어진 기호 사용은 함수, 명제, 변환, 집합 등으로 그 표현 대상이 확장되면서 더욱더 일반적인 성질들이 강조되고 있다. 이러한 도입 방식은 오늘날 많은 대수 교육과정에서 적용되고 있으나, 그러나 이 경우 대수를 학습하는 많은 학생들이 대수를 여전히 어려운 영역으로 인식하고 있다는 문제점을 안고 있다.

한 예로, Küchemann(1981)은 실험 연구를 통해 문자 사용의 수준을 여섯 단계로 나누고²⁾, 학생들은 문자를 일반화된 수나 변수로 해석하는 것이 문자를 미지수로 인식하는 것 보다 어려워한다는 사실을 밝혀냈다. 그의 연구는 전통적인 대수 교육과정에 근거해서 이루어진 것으로, 따라서 이 연구의 결과는 새로운 대수 교육과정의 필요성을 더욱 부각시킨다고 볼 수 있다. 다시 말해 대수에서 요구하는 진정한 문

2) Küchemann(1981, p.104)의 연구에서 제시된 문자 사용의 여섯 단계는 letter evaluated, letter not used, letter used as an object, letter used as a specific unknown, letter used as a generalized number, letter used as a variable로 구분된다.

자 이해의 수준은 5수준 곧, 일반화된 수 이상의 것인 데 비해, 이 연구는 전통적인 도입 방식으로는 이러한 수준에 도달하기 어렵다는 사실을 보여준다. 실제로 Küchemann은 자신의 연구에서 패턴을 통한 연습 경험들이 이러한 어려움을 극복하고 일반적인 관계를 파악하는 기초가 될 수 있음을 지적하면서, 패턴 경험과 이후 대수에서의 형식적, 조작적 사고로의 변화 가능성에 대하여 언급하고 있다(Küchemann, 1981, p.118).

따라서 대수 교육과정의 개선을 요구하는 움직임은 전통적인 도입 방식에서 드러난 많은 어려움을 개선하고, 대부분의 대수 교육과정에서 주장하는 ‘대수는 모든 학생들이 학습해야 한다’라는 주장에 맞추어 대수 교육과정을 개선하는 것을 그 목적으로 하고 있다. 오늘날 대수 교육과정에서, 패턴들을 표현하면서 일반적인 규칙들을 인식하고 설명하는 것은 이러한 대수 교육과정의 개선을 위한 하나의 대안으로 제시되고 있으며, 수학의 부분으로서 혹은 대수 전반에서 많은 관련을 맺으면서 강조되고 있다. 그리고 이러한 패턴에 대한 강조는 비단 대수에서만 이루어지는 것은 아니다. 실제로 수학의 역사를 짐작해서 나열한 Devlin(1996)의 주장에 따르면, 패턴은 20세기 수학의 전반적인 흐름으로 파악된다(김택현, 1999, pp.18-19, 재인용). 또한 수학의 진정한 힘을 표면적으로 서로 다른 상황 아래서 일관된 패턴을 찾아내어, 이를 조직화하여 새로운 문제를 해결하는 데 적용할 수 있는 것으로 본다면(이용률, 성현경, 1994, p.17), 이러한 맥락에서 패턴은 대수를 비롯한 수학 전반에서 강조되는 영역 가운데 하나가 될 것이다.

그렇다면 이러한 패턴에 기초한 도입방식과 전통적인 대수 도입 사이에 존재하는 교육과정상의 차이점에 대하여 생각해보자.

우선 문자 사용 측면에서 살펴보면, 전통적인 대수 도입은 문자 사용의 첫 단계로 미지수를 찾기 위한 절차와 대수식의 조작, 그리고 방정식의 풀이를 강조한다. 이에 비해 패턴을 바탕으로 한 도입은 두 양(변수)들 사이의 관계를 파악하기 위해 언어적인 측면을 강조하면서 문자를 도입하는 데, 이것은 대수와 대수 기호의 도입에 있어서 전통적인 도입 방식과 명백한 차이를 보이는 부분이다.

두 번째로 대수를 도입하는 시기에 있어서, 전통적인 대수 도입 방식은 중등 이후에서 대수 학습이 진행되는 반면, 패턴에 기초한 도입에서는 대수 학습과 관련된 내용이 초기에 지도 가능하다는 점을 들 수 있다. 그리고 패턴에 기초해서 대수를 초기에 도입하려는 이러한 시도는 미국, 영국, 호주를 비롯한 각국의 대수 교육과정에서 나타난 가장 중요한 변화로 볼 수 있을 것이다.

세 번째는 대수를 통해 이루어지는 일반성의 획득 순서에서 비롯되는 차이이다. 전통적 교육과정에서 학생들은 대수식을 단순화하면서 간단한 표현들을 나열하고, 미지수를 구하기 위해 방정식을 풀고, 그 과정에서 표현을 바꾸는 방법 등을 학습하면서 문자 사용 규칙에 대하여 학습한다. 이러한 문자 사용을 학습한 뒤에야 학생들은 변수와 함수에서 일반성의 개념을 비로소 다루게 된다. 이것은 패턴에 기초한 대수 도입에서 학생들이 경험하는 문자 사용 순서 및 규칙과는 많은 차이를 보인다. 새로운 도입 방식에 기초한 교육과정은 대수적 사고가 초등학년에서부터 공간적 패턴들과 수열의 일반적 규칙들을 경험함으로써 어떤 일련의 관계를 통해 일반성이 발달될 수 있음을 주장한다. 다시 말해 대수 문자의 사용과 이를 통한 일반성의 획득은 문자 자체에서 시작하는 것이 아니라, 패턴들과 관계들의 설명을 표현하는 가

운데 자연스럽게 강조되어야 한다는 주장이다. 따라서 패턴에 기초한 교육과정은 패턴의 일반화 과정에서 문자를 도입하고 있으며, 이 도입 방식은 함수적 관계들과 그것들을 이해하고 설명하기 위하여 일반성을 언어로 또는 문자로 표현하고 있다. 그리고 학생들은 이러한 이해를 바탕으로 해서 대수식을 단순화하고 방정식을 푸는 방법을 학습하게 된다.

여기서 패턴에 기초한 대수 교육과정이 전통적인 교육과정에서 목적으로 하고 있는 변수, 대수식, 방정식 등의 내용을 결코 간과하고 있는 것은 아니며, 어떤 의미에서 새로운 교육과정 역시 궁극적으로는 이러한 내용을 달성하기 위해 제시된 것으로 볼 수 있다. 문제는 이러한 목적을 달성하기 위해 도입하는 방식의 차이인 데, 우리는 다음 NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)에서 제시한 Standards(1989, 1998, 2000)와 RME(Realistic Mathematics Education)에 기초한 Britannica 교과서(1998)의 대수 도입방식을 통해 패턴에 기초한 대수 교육과정에 대하여 자세하게 살펴 볼 것이다.

III. 패턴에 기초한 대수 교육과정

일반적으로 대수에서 다루어지는 개념들은 변수, 함수, 방정식과 부등식, 그래프 등이며, 여기서 그 목적은 실수 체계를 포함해서 구조적 성질들을 밝히는 것이다. 그리고 이러한 개념들과 원리들은 양적 변수들 사이의 관계에서 추론을 이끌어내기 위해 기호 체계를 필요로 하고 있다. 따라서 양적인 패턴의 인식과 기호 표현은 대수에서 그 출발점이 된다. NCTM의 대수 교육과정은 이러한 배경에서 아동들의 대수 학습이 패턴에서부터 시작해야 함을 강조하

고 있다(1989, 1998, 2000).

이와 함께 Britannica 교과서의 이론적 근거가 되는 현실주의 수학교육 또한 아동들의 상식적인 수준으로 패턴을 대수 교육과정의 출발점으로 강조하고 있다. 현실주의 수학교육을 주창한 Freudenthal은 ‘자리지기’(placeholder)를 통한 형식적인 변수 개념의 획득은 의미가 없으며, 실세계의 변화하는 현상을 정리하는 수단으로서, 그리고 다양한 현상 가운데에서 관찰되는 패턴을 일반화하는 수단으로서 그 본질이 파악되는 과정을 강조하고 있다. 이는 곧 패턴이 대수의 수학화에 있어서 출발점이 될 수 있음을 의미하는 것이다.

다음에서 우리는 이러한 두 입장을 정리하고 있는 NCTM(1989, 1998, 2000)의 대수 교육과정 자료와 Britannica 교과서(1998)를 통해 새로운 대수 도입방식에 대한 논의를 보다 분명하게 하고자 한다.

1. NCTM의 패턴에 기초한 대수 교육과정

NCTM에서 내놓은 ‘Principles and Standards for School Mathematics’(2000, 이하 ‘Standards 2000’으로 표기)는 1989년 출판된 ‘Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics’(이하 ‘Standards’로 표기)의 내용을 21세기가 요구하는 새로운 내용과 방향에 맞추어 개편한 것으로, 우리는 이를 통해 앞으로 전개될 교육과정에서의 변화를 예상할 수 있을 것이다. ‘Standards 2000’에서 3장 ‘Standards for School Mathematics: Prekindergarten through Grade 12’에서는 수와 연산을 비롯한 대수, 기하, 측정 등 학교 수학의 10개 영역에 있어서 요구되는 규준을 제시하고 있는 데, 대수 영역에서 우선적으로 제시하고 있는 규준은 다음과 같은 4개

항목으로 정리할 수 있다³⁾(NCTM, 2000, pp.37-40).

Algebra Standard:

- 패턴, 관계, 그리고 함수를 이해한다
- 수학적 상황과 구조를 대수 기호를 이용해서 나타내고 분석한다
- 양적 관계를 나타내고 이해하기 위해 수학적 모델을 이용한다
- 다양한 맥락에서 변화를 분석한다

여기서 특기할만한 내용은 우리가 일반적으로 대수에서 강조해왔던 변수, 대수식, 방정식에 대한 언급 대신 패턴, 관계가 첫 번째 항목으로 제시되어 있다는 점이다. 이것은 단순한 변화 이상의 것이다. 왜냐하면 이러한 변화는 2장에서 지적했듯이 교육과정에 있어서 대수의 도입시기와 도입방법, 그리고 도입순서 등을 논의하는 데 있어서 결정적인 영향을 미치기 때문이다.

한편 Usiskin(1987)은 영국, 일본에서의 대수 도입 시기와 비교하면서 미국에서의 대수 도입 시기가 적절하지 못함을 지적하면서, 그는 8학년 이전에 대수가 교육과정에 도입되어야 함을 주장하고 있다. 물론 여기서 그가 주장한 내용이 굳이 패턴을 강조한다고 볼 수는 없지만, 패턴을 포함한 대수 학습을 비형식적인 방법으로 초기 학년에서부터 시작해야 한다고 주장하는 ‘Standards 2000’의 내용과 비교해볼 때 그 도입 시기에 대한 논의는 흥미로운 주제로 볼 수 있다. 또한 ‘Standards 2000’에서는 패턴, 함수 및 대수 개념의 초기 경험을 통해 학생들에게 이후 중·고등학교 과정에서 보다 강력한

기반을 갖도록 준비시키는 것을 학습 이행의 본질로 보고 있다. 그리고 두 번째 규준인 상황과 구조에 맞는 대수 기호 표현은 어떤 의미에서 보면 전통적인 대수 교육과정에서 말하는 문자 기호를 통한 대수를 강조하는 것으로, 패턴, 관계 및 함수에 대한 이해에 이어서 강조되고 있다. 그리고 다시 세 번째 규준에서 양적 관계를 표현하기 위한 모델링을 강조하는데, 이것 역시 관계 측면을 부각시킨 것으로 볼 수 있으며, 네 번째 맥락에서 변화를 분석하는 것 또한 함수와 관련해서 생각해볼 수 있을 것이다. 이처럼 ‘Standards 2000’은 전통적인 대수 도입방식과는 많은 차이를 보이고 있으며, 이것은 패턴에 기초한 대수 도입이 새로운 교육과정의 방향으로 제시되고 있음을 엿 볼 수 있는 대목이다.

이처럼 NCTM(1998, 2000)에서 패턴을 강조하는 것은 패턴을 통한 활동, 곧 아동들이 패턴을 만들고 인식하며, 그리고 패턴을 확장하는 것을 가장 자연스러운 활동으로 보기 때문이다. 이와 함께 NCTM은 패턴과 관련된 초기 과제로 규칙성⁴⁾을 확인하고, 다른 형태에서 동일한 패턴을 인식하고, 그리고 패턴을 통해 어떤 값을 예측하는 활동 등을 들고 있다. 그리고 문자를 사용한 전통적인 대수 교육과정과의 차이로 패턴과 관련된 초기 과제에서, 아동들은 수학적 상정 곧, 기호의 사용보다 언어로 규칙성을 자주 서술한다고 보고 있다. 이러한 맥락에서 볼 때 패턴에 기초한 대수 도입은 Usiskin이 주장한 바대로 기존의 대수 도입시기인 8학년이 아닌 더 이른 시기에도 가능하며, 따라서 학교대수 수업의 목적은 패턴을 통해

3) ‘Standards’(1989)에서는 K-4학년 규준 13으로 패턴과 관계를 제시하고 있으며(NCTM, 1989, p.15), 이와 함께 5-8학년 규준 8에서 패턴과 함수를 강조하고 있다(NCTM, 1989, p.65).

4) ‘Standards 2000’의 1998년판 Discussion Drafts에서는 유치원 전 단계에서부터 5학년까지는 규칙성, 관계, 함수로 대수 항목에 등장하다가 6학년 이후부터는 규칙성 대신 패턴이라는 용어로 교체된다. 이것은 패턴에 대한 인식에서 그 핵심을 규칙성의 파악으로 보기 때문이다.

이러한 언어화를 신장시키고 앞으로 중등 이후에서 학습할 대수 기호와 함께 대수의 일반화를 표현하는 데 익숙해지도록 충분한 경험을 제공하는 것으로 볼 수 있을 것이다.

이러한 패턴에 기초한 대수 도입을 보다 분명하게 살펴보기 위해서 NCTM에서 제시한 'Standards 2000'을 기준으로 하여 패턴에 대한 논의를 유치원 이전부터 5학년까지, 그리고 6학년부터 12학년까지로 나누어 각 수준에서 제시된 내용을 살펴보면 다음과 같다.

<유치원 이전부터 5학년까지의 대수 교육과정>

규칙성, 함수, 대수 등의 개념은 오랜 시간에 걸쳐 지속적으로 발달하는 데, 특히 아동들은 어렸을 때 규칙성, 함수, 대수 등과 관련된 예비 개념들을 발달시킨다. 형식적인 교육이 시작되기 전이라 하더라도, 다양한 규칙성의 인식과 비교는 아동들의 지적 발달에서 중요한 요소로 작용한다. 그리고 아동들이 구체적인 대상과 그림을 활용하여 수학적 상황을 표현하면서 기호와 친숙해지는 것은 이후 대수 학습에서 상정적 표현의 토대로 작용한다. 따라서 이 단계의 학습 목표는, 단순한 규칙성들을 분류하며, 분석하고, 예측하여 여러 가지 상황에서 변화를 기술하면서 수학적으로 표현하는 능력을 개발하는 동시에, 수와 연산에 대한 여러 성질을 직관적으로 이해하여 다양하게 적용하도록 하는 것이다. 특히 3-5학년에서의 대수적 아이디어는 수나 도형적인 규칙성을 구성 또는 확인하고, 규칙성을 말로 묘사하고 적용하는 가운데, 특별한 상황에서 항상 적용되는 일반성(또는 규칙)을 구성하고 확인하는 가운데, 규칙성을 묘사하고 예측을 하기 위하여 그래프를 사용하면서, 수의 성질을 탐구하는 가운데 이루어질 수 있다.

<6학년부터 12학년까지의 대수 교육과정>

6-8학년 대수 학습은 개념적인 활동과 절차적 활동이 혼합되어 나타난다. 대수는 패턴이나 함수 또는 관계로서, 일반화된 산술의 언어, 표상, 구조로서, 수학적 아이디어나 문제를 모델링하는 도구로서 생각할 수 있다. 이 단계에서 학생들은 표상과 기호를 이전 학습 경험에 비해 좀 더 형식적으로 다루게 되지만, 그러나 무엇보다도 앞서 학습한 패턴과의 연관성을 기초로 해서 개념 발달이 이루어진다. 다음으로 9-12학년 학교 수학의 핵심적인 측면은 수학 구조의 힘과 아름다움에 접근 가능하게 하는 것으로, 학생들에게 세계를 이해하는 강력한 도구를 제공하여 주는 것이다. 이 단계에서 학생들은 패턴을 통해 함수라는 수학적인 구성을 사용할 수 있게 되고, 동시에 대수라는 기호적인 언어를 사용하여 다양한 상황을 추론하고 기술하는 능력을 갖추게 되는 데 이것은 패턴을 통해 개발된 대수적 사고를 확장한 것으로 볼 수 있다.

이상에서 제시된 바대로 NCTM에서 제시하는 대수 교육과정은 그 중심에 패턴에 기초한 대수 학습을 강조하고 있으며, 그 시작은 유치원 이전부터 시작되고 있음을 알 수 있다.

다음으로 우리는 패턴에 기초해서 대수에 접근하는 것이 무엇인지를 살펴보고, 이러한 대수 교육과정이 실제로 대수 수업에서 어떻게 구체화되고 있는지를 살펴보기 위해 NCTM 저널에서 소개된 다음 두 논문을 인용하고자 한다. 우리는 이 글들을 통해 어떻게 패턴이 대수와 연결되고 있는지를 살펴볼 것이다.

먼저 '대수적 추론을 위한 도구로서의 패턴'(Patterns as Tools for Algebraic Reasoning, 1997)에서는 NSF(National Science Foundation) 지원에 의해 개발된 'Patterns in Numbers and

'Shapes'라는 수학교육과정에 대하여 언급하고 있다. 이 교육과정의 각 단원들은 패턴을 찾고 일반화하는 것을 그 목표로 하고 있으며, 이를 통해 대수적 사고의 기반을 세우는 것을 주요 학습내용으로 삼고 있다. 이를 위해 학생들은 문제를 해결하기 위해 주어진 이야기 상황에서 패턴을 알아내고, 처음엔 구어 형태로 패턴을 인식하고 다음으로 다른 방법을 사용하여 그것을 서술하며, 그리고 패턴을 일반화하는 활동을 한다. 이러한 활동을 통해 강조되는 것은 직접적인 대수의 내용 끝, 전통적인 대수 교육 과정에서 강조하는 변수, 대수식 등의 내용보다 앞서 논의했듯이 앞으로 이러한 내용을 학습하기에 앞서 요구되는 대수적 사고를 그 이면에 두고 있다. 여기서 말하는 대수적 사고는 서술된 상황으로부터 정보를 추출하고, 이러한 정보를 언어, 다이어그램, 표, 그래프, 식 등을 이용해서 수학적으로 표현하고, 이를 통해 앞으로 만나게 될 새로운 상황에서 미지수를 통해 문제를 해결하고, 추측을 시험하고, 함수 관계를 확인하는 데 수학 기호와 도구를 사용하는 것을 의미한다. 특히 이러한 과정은 형식적인 대수 기호대신 패턴 찾기를 통해 학생들이 자신의 말이나 자신의 기호로 의사 소통하는 등의 비형식적인 방법을 동원함으로써 대수적 사고의 폭을 넓히는 것을 그 목적으로 한다.

한 예로 '강 건너기' 문제⁵⁾를 통해 이 글은 이러한 과정을 보여주는 데, 학생들은 이러한 구체적인 이야기 상황에서 먼저 자료를 모으고 기록하는 가운데 반복되는 패턴을 찾기 시작한다. 어떤 학생들은 패턴의 아이디어를 확인하기 위해 구체적인 조작과 기록된 자료를 사용한다. 그리고 이 과정에서 찾아낸 패턴은 다른 상황에서 적용이 가능한지 생각해본다. 이러한

과정을 통해 패턴은 하나의 규칙으로 인식되며, 학생들은 패턴을 이용해서 다른 문제 상황을 해결하게 된다. 그리고 마지막으로 이러한 패턴은 일반화를 통해 보다 완전한 규칙이 된다. 곧 패턴을 일반화하면서 학생들은 대수적 사고의 힘을 이해하게 되는 것이다.

두 번째로 패턴 탐구를 통해 변수를 도입하는 논의를 살펴보자(Introducing the Variable through Pattern Exploration, 1998). 변수는 일반화를 표현하는 기본 도구인 동시에, 변수 개념의 이해는 대수의 성공에 있어 기본이 된다. 전통적인 교육과정에 따르면 학생들은 변수를 방정식에서 처음 접하게 되며, 여기서 변수는 미지수를 대표한다. 그러나 문제는 이러한 도입방식을 따르는 교과서들은 학생들이 스스로 변수 개념을 구성하고, 탐구하고, 경험할 기회를 주지 않는다는 데 있다. 따라서 이러한 도입방식은 변수와 관련된 이후 학습에서 많은 장애를 일으키게 된다. 이러한 문제를 보완하기 위해서 제시된 새로운 대수 교육과정은 학생들이 도형과 수의 패턴을 조사하고, 이 패턴을 서술하는 데 언어적 규칙을 형식화하고, 그 상황을 일반화하는 방법을 찾는 구체적인 활동들을 비형식적으로 제시하고 있으며, 이 글은 이와 같은 맥락에서 패턴을 통해 변수를 도입하려는 시도를 하고 있다. 그리고 변수 개념을 도입하기 위한 전형적인 패턴 활동으로 도형 활동을 제시하고 있다. 학생들은 스스로 구성하면서 나타나는 패턴들에 대하여 토론하고, 그리고 서로 비교한 후에, 구어 형태로 이 패턴을 표현하고, 이 과정에서 패턴을 서술하는 일반적인 규칙을 찾게 된다. 이 과정에서 학생들은 기호로 일반화를 기록하기보다 먼저 일상 언어로 일련의 규칙을 설명한다. 그러나 패턴

5) 어린이 2명과 어른 8명이 강을 건너야 한다. 그런데 보트에는 어린이 2명이 타거나, 또는 어린이 1명이 타거나, 어른 1명만이 탈 수 있다. 일행이 모두 강을 건너려면 강을 몇 번이나 건너야 하는가?

형태가 복잡해지면서 학생들은 구어적 형태의 반복 접근 대신 규칙을 형식적으로 표현하는 방법을 요구하게 된다. 그리고 마지막으로 그들은 도형 패턴을 통한 활동보다 패턴을 언어와 기호로 일반화하는 것이 필요하다는 것을 알게 된다. 이러한 비형식적인 과정에서 다양한 활동들을 통해 학생들은 주어진 패턴에 대하여 하나 이상의 규칙을 찾고, 규칙들을 비교하고, 새로운 규칙이 주어질 때마다 대응하는 새로운 패턴을 만드는 것을 익히게 된다. 그리고 찾아 낸 규칙을 서술하기 위해 이러한 비형식적인 활동들은 변수 개념의 도입에 대한 아이디어와 연결된다. 이를 통해 변수 개념이 확립되면, 학생들은 패턴을 나타내는 표현에서 이들 사이의 동치관계를 파악할 수 있게 된다. 더불어 대수식의 단순화에 대한 아이디어를 얻게 된다.

이상에서 우리는 패턴에 기초한 대수 도입방식이 구체적으로 어떤 것인지, 그리고 그것이 왜 요구되는지를 살펴보았으며, 이를 통해 앞으로의 대수 지도에서 패턴이 더욱 강조되어야 하는 이유를 살펴보았다. 무엇보다 학생들은 문제 상황을 탐구하면서 패턴을 이용하는 방법과 함께 대수적 사고를 개발하게 된다. 그들은 패턴을 보면서, 그것을 확장하고 일반화하며, 동시에 대수와의 연결 고리를 만들게 된다. 이를 통해 학생들은 전통적인 대수 교육과정에서 목표로 하는 일반적인 문자 사용을 비롯한 변수, 대수식, 그리고 방정식 등을 학습할 수 있는 계기를 마련하게 된다. 우리는 NCTM에서 패턴에 기초한 대수 도입을 통해 이러한 일련의 과정을 달성하는 것을 그 목적으로 한다고 볼 수 있다.

2. Britannica 교과서에서 제시된 패턴에 기초한 대수 도입방식

현실주의 수학교육에 따르는 Britannica 교과서는 5/6학년에서 8/9학년에 이르기까지 단계적으로 구성되어 있으며, 여기서 다루는 영역은 대수를 포함한 수, 기하, 통계 등이다. Britannica 교과서 대수 과정에서 가장 흥미로운 점은 기호나 문자의 도입이 학생들의 필요에 의해 이루어진다는 점이다. 이를 위해 Britannica 교과서에서 대수 도입 상황으로 설정하고 있는 것은 다름 아닌 패턴 탐구 활동이다. 곧 그들은 패턴을 이러한 대수 학습의 출발점으로 보고 있으며, 이러한 패턴이 변수, 대수식, 방정식 등의 형식적인 대수 학습으로 전개될 수 있음을 일련의 교과서를 통해 보여주고 있다. 여기서 주목할 점은, 패턴이 단순히 반복되는 그림을 의미하는 정도에 그치지 않고 여러 가지 구체적인 활동에서 대수 언어와 함께 일반성을 표현하는 방법을 포함한다. 따라서 패턴은 그 자체가 상황에 기초하는 것으로 그리고 맥락 가운데에서 파악된다.

대수 과정은 5/6학년에서 ‘패턴과 기호’로 시작하고 있으며 이것은 두 가지 흐름으로 진행되는 데 첫 번째는 6/7학년 ‘식과 공식’을 거쳐 ‘연산’으로, 7/8학년에서 ‘공식 만들기’로, 그리고 8/9학년에서 ‘패턴과 그림’으로 이어지는 것이며, 두 번째는 6/7학년 ‘식과 공식’과 ‘양 비교하기’를 거쳐, 7/8학년 ‘결정하기’, 그리고 8/9학년에 ‘방정식 그래프 그리기’와 ‘가장 적절한 값을 구하기’로 이어진다. 우리는 이 가운데 첫 번째 흐름을 따라가면서 어떻게 패턴이 식으로 그리고 연산과 공식으로 이어지면서 전개되는지, 그리고 패턴에 기초한 대수 도입방식이 구체적으로 어떤 것인지를 살펴보고자 한다.

5/6학년에서 다루는 ‘패턴과 기호’(pattern and symbols)에서는 패턴을 표현하기 위해 기호를 사용하고 기호의 열로 도입되는 패턴의 표현을

만들고 증명하여 이러한 패턴으로부터 관찰된 특징을 개괄, 종합, 일반화한다. 이러한 과정에서 재귀(recursion), 대칭(symmetry)의 개념과 치환의 사용이 등장하며, 이러한 현실적인 상황은 수 패턴, 짹수/홀수 개념, 기호적 표현들 사이의 관련성을 토대로 하고 있다. 그리고 ‘패턴과 기호’는 문자와 식을 도입하는 데 요구되는 중심 개념으로 상황을 표현하기 위한 기호의 사용과, 동치, 대칭과 반복, 치환, 역, 짹수/홀수, 패턴과 질서의 인식, 2의 거듭제곱의 형태로 된 수열을 제시하고 있으며, 전체 6개 절을 통해 이러한 내용들을 다루고 있다. 각 절은 현실과 관련해서 기호를 도입하고 있으며, 형식적인 기호 조작이 목적이 아님을 계속해서 강조하고 있다. 학생들 역시 분류하기, 구분하기 등의 구체적인 활동을 통해 패턴을 학습하며, 패턴은 대수 언어를 통해 일반성을 표현하는 하나의 도구로 사용된다.

한 예로 2의 거듭제곱이 어떻게 학습되고 있는지를 살펴보면 다음과 같다.

첫 번째 절에서 짹짓기(paring)가 나오는데, 학생들은 짹짓기를 통해 짹수/홀수의 개념을 우선적으로 학습하게 되고, 이러한 활동은 두 번째 절에서 다루었던 블록과 함께 세 번째 절로 이어져서 블록의 수에 따르는 가능한 경우의 수를 학습함으로써 2의 거듭제곱에 대한 개념으로 이어진다. 이것은 계속해서 다섯 번째 절을 통해 재귀적인 절차에서 다시 짹수/홀수, 2의 거듭제곱에 대한 아이디어를 확인하게 된다. 각 절은 독립적으로 존재하지 않으며 계속해서 그 내용을 서로 관련짓는 가운데 새로운 아이디어 곧, 역, 재귀, 반복 등이 상황에 포함되면서 진행된다.

이처럼 ‘패턴과 기호’는 문자와 식을 도입하

기에 앞서 필요한 기초적인 내용을 담고 있으며, 이 내용들은 이후 대수 계열에 있어서 합수, 방정식, 연산이라는 세부 계열로 나누어지기 위한 출발점이 된다. 그리고 모든 개념들은 형식적으로 도입되지 않으며 다른 과정과 서로 혼합되면서 심화되는 가운데 8/9학년에 가서야 비로소 형식화가 이루어진다. 예를 들어, 공식의 경우 계속 단어로 표현하고 있으며, 변수 역시 문자가 아닌 단어가 사용된다. 그리고 패턴의 규칙을 바탕으로 한 패턴의 단축이 연산에서 연산을 단축하는 전략과 연결되기도 한다. 다시 말해 ‘패턴과 기호’에서 사용되었던 tree-diagram과 화살표 언어를 통해 연산과정을 전개하고 패턴을 단축했던 일련의 내용들은 ‘연산’(operation)에서 연산과정을 단축시키는 전략으로 이어진다.

그 흐름을 보다 자세하게 살펴보면, 먼저 ‘식과 공식’(expressions and formulas)에서는 화살표 언어를 통해 연산과정을 열로 표현하면서 수학적인 표현과 공식의 비형식적인 형태가 도입된다. 여기서 화살표 언어는 문제 해결 과정에서 연산의 계열을 보여주는 수학적인 용어로 사용된다. 그리고 연산, 공식, 패턴을 표로 나타내고 연산의 순서에 대한 규칙의 필요성을 부각시킨다. 식과 공식을 구체적인 맥락에서 도입하여 단어로 된 변수를 사용하면서 동시에 계산의 순서를 개선하는 등 패턴과 규칙성의 재발명이 이어진다. ‘연산’(operations)에서는 첫 단원에서 양수와 음수의 성질을 탐구하기 위해 ‘패턴과 기호’에서 사용한 모눈종이를 다시 사용해서 패턴 학습을 연장시킨다. 그리고 다양한 모델과 상황을 통해 앞서 보았던 패턴과의 관련성 안에서 정수의 연산을 연습한다. 그리고 ‘공식 만들기’(building formulas)에서는 다시 ‘패턴과 기호’에서 사용했던 블록 패턴을 이용해서 다른 상황에서 공식을 다르게 표현함으로

써 대수식의 동치 및 분배법칙 등을 재발명시킨다.

이처럼 Britannica 교과서의 대수 교육과정은 일상적인 맥락에서 쉽게 볼 수 있는 패턴을 현상으로 파악하고 있다. 그리고 이를 통해 문자에 의한 변수의 도입과 연산, 음수를 도입하는 과정 등에 활용하고 있으며, 그 근원으로 패턴을 관찰하고 규칙을 찾는 활동을 강조하고 있다. 여기서 패턴을 대수 도입에 있어서의 현상 또는 상식으로 보는 것은 우리 주변을 둘러싸고 있는 현상이 어떤 일련의 규칙을 바탕으로 하여 만들어지기 때문이다. 이것은 패턴이 무엇인지, 패턴에 기초하는 것이 무엇인지에 대한 답변을 제시하는 것으로, 현실주의 수학교육에 근거한 Britannica 교과서는 우리의 직관이 이러한 패턴을 자연스럽게 받아들일 수 있다는 것을 가정하여 구성되었으며, 동시에 패턴에서부터 형식적인 대수 개념으로 이어지도록 교육과정을 구성함으로써, 패턴에 기초한 대수 교육과정을 제시하고 있다.

IV. 우리나라 교육과정에 나타난 패턴 제시의 문제점

우리나라 교육과정(7차)은 ‘문자와 식’ 단원과 ‘규칙성과 함수’ 단원에서 대수와 관련된 내용을 다루고 있다. 그 가운데 패턴과 관련된 내용은 주로 ‘규칙성과 함수’에서 다루어지고 있다. 그리고 이러한 단원 구분으로 인하여 패턴은 ‘문자와 식’에서는 거의 다루어지지 않고 있으며, 초등학교에서 제시되는 패턴 역시 각 단원에서 단편적인 문제로 사용될 뿐 교과 내용의 한 부분으로서 다른 영역과 연결되어 제시되지는 않고 있다. 이를 확인하기 위해 학교 교과서(7차 교육과정)에서 패턴에 관련된 내용

을 찾아보면 다음과 같다.

우선 규칙적인 배열에서 규칙을 찾는 즉, 두 세 종류의 사물을 가지고 규칙적으로 만든 배열이나 포장지의 무늬에서 규칙을 찾는 활동이 1학년에서 시작되지만 이러한 활동은 연속성을 갖고 이루어지지는 않는다. 이후 수표나 곱셈 표에서 규칙을 찾고 4학년에서는 삼각형과 사각형 모양의 바둑돌 배열, 수 카드로 하는 게임 등을 통해 규칙을 찾고 탐구하는 활동을 한다. 그리고 5학년에서는 여러 가지 이동을 통한 규칙적인 무늬 만들기로 어떤 패턴 속에서 규칙을 찾는 활동을 하고, 6학년에서 비와 비율, 대응 관계를 학습하고 이것은 중학교 1학년에서 함수를 도입하는 것과 연결되고 있다.

그러나 ‘문자와 식’에서는 이러한 패턴의 내용은 제시되지 않고 있으며, 따라서 대수를 도입하는 방식은 자연스럽게 전통적인 교육과정에 따라 문자와 식에서 문자, 대수식을 다루고 있으며 이어서 방정식의 학습으로 대수의 학습이 진행되고 있다. 그러나 이러한 전통적인 대수 교육과정의 경우 앞서 논의했듯이 대수 학습에서 목적으로 삼고 있는 일반화된 문자 이상의 변수 이해가 원활하게 이루어지지 못하고 있으며, 우리는 이러한 문제에 대한 논의가 현재의 교육과정 틀 안에서는 한계가 있다는 점을 이 글에서 지적하고 있다.

반면 7차 교육과정 이후 패턴은 초등학교에서부터 다양한 형태로 도입되고 있다는 점은 주목할 만하다. 그러나 이러한 패턴은 그 형태 자체가 상당히 제한적이며, 다른 영역과 연결되지 않은 채 여전히 단편적으로 지도되고 있는 것이 현실이다. 그리고 이러한 초등수학에서의 패턴은 이후 대수와 연결되어 제시되지 않는 것 또한 사실이다.

이러한 패턴과 관련된 우리 교육과정의 문제점은 6차 교육과정 이후 계속해서 지적된 것으

로 다음의 연구 결과는 이러한 문제점을 단적으로 보여주는 것들이다. 초등학교 4학년⁶⁾에서 제시된 패턴의 문제점을 살펴보기 위해, 교과서 분석(6차 교육과정)을 통해 지적된 내용들 (김상미, 1997, p.31)을 앞서 논의했던 패턴에 기초한 도입방식과 비교해보면 다음과 같다.

첫 번째 문제는 교과서에 나오는 패턴의 형태가 제한적으로 제시된다는 점이다. 곧, 기하적인 속성을 갖는 패턴을 드물게 찾아볼 수 있지만 이것 역시 기하적인 속성에 관심이 있다기보다는 도형의 개수를 구하여 수 패턴을 찾는 데에 초점을 두고 있다. 따라서 다양한 패턴에서 오는 기하적인 구조나 아름다움을 다루지 못하고 있다. 이와 함께 물리적 속성에 따른 패턴 역시 4학년 교과서에서는 찾아볼 수 없으며, 반복에 의한 패턴의 경우도 작은 몇 개의 합동 도형으로 닮음인 큰 도형을 만드는 그림에서 도형의 개수를 묻는 문제에서만 찾아볼 수 있을 뿐이다. 결국 4학년 교과서에 제시된 패턴은 수 패턴에 치중되어 있으며, 이것 역시 패턴의 인식보다는 계산 방법에 치중되어 있음을 알 수 있다. 이것은 앞서 다루었던 패턴에 기초한 도입방식에서 패턴을 제시하는 방법과는 분명한 차이를 보여준다. 다시 말해 우리의 교과서는 패턴 자체의 역할 곧, 다양한 형태의 패턴을 통한 패턴의 인식 수준을 제시하지 못하고 있으며, 단순히 패턴은 계산을 위한 과정으로 다루어지지 않고 있다. 이에 비해 패턴에 기초한 도입방식에서는 패턴이 다양한 형태를 통해 제시되고 있으며, 이러한 패턴은 직관에 기초한 자연스러운 상식의 수준에서부터 점진적으로 형식화를 위한 수준으로 구성되어 제시된다. 따라서 패턴은 계산을 위한 단순

한 도구로 다루어지기보다는 사고를 위한 도구, 특히 대수적 사고를 개발하기 위한 도구로 제시되고 있다.

두 번째로 패턴에서 강조점은 다양한 패턴의 인식과 새로운 자기의 패턴을 창조해 가는 데 있어야 하지만, 현행 수학 교과서에서 제시되는 형태는 모두 팔호 넣기 또는 퍼즐 문제에서 답을 구하는 것에 한정되어 있다. 이것은 패턴과 관련되어 교과서에서 찾아볼 수 있는 두 번째 문제점인 데, 이와 함께 패턴을 변형해 보거나 새로운 패턴을 만드는 활동들은 4학년 교과서에는 제시되어 있지 않다. 한편 7차 교육과정 이후 초등 학교에서부터 패턴은 자주 다루어지는 주제 가운데 하나이다. 그러나 이러한 패턴은 6차 교육과정에서의 문제점을 여전히 안고 있으며, 패턴은 단답형 문제 또는 퍼즐처럼 다루어지고 있으며, 패턴이 나오는 단원에서 그 교과 내용과의 관련성은 다루어지지 않고 있다. 이것은 Britannica 교과서에서 처음부터 일련의 학습 목적을 설정해 두고 패턴을 단계적으로 도입하는 것과는 대조를 이루는 것으로, 패턴에 기초한 도입방식의 경우 패턴은 단순한 퍼즐이 아닌 전체 교과 내용에 포함되어 제시되고 있다.

세 번째는 학교 교과서에서 수학적 패턴이 담고 있는 아이디어를 다른 영역에서 다룰 수 있는 기회를 교과서가 제공하지 못하고 있다는 점이다. 패턴의 탐구에서 얻을 수 있는 장점 중의 하나는 여러 가지 표상의 변환을 통하여 수학 내 영역간의 연결성은 물론, 실생활과의 연결성 또는 타 교과와의 연결성을 높일 수 있는 다양한 자료를 가진다는 것이다. 그러나 이러한 패턴들은 학교 교과서에서 그 연결성을

6) 이와 비슷한 연구로 초등학교 5학년 수학에서 수학적 패턴을 다루는 데 있어서의 문제점을 안종률의 논문 (1999, pp.36-37)에서 다음과 같이 찾아 볼 수 있다: 초등학교 5학년 수학에서 나타난 패턴의 내용은 관계적 속성에 따른 패턴으로 제한적이다./ 패턴을 변형하거나 새로운 패턴을 만들어 보는 활동은 없다./ 수학적 패턴을 통해 여러 가지 수학적 아이디어와 수학적 연결성을 실현시키지 못하고 있다.

찾아볼 수 없으며, 단지 규칙을 정하여 개수를 세어 보고 그들간에 수 패턴을 찾는 것만이 전체 패턴에서 공통적으로 제시되어 있다.

연결성은 특히 패턴에 기초한 대수 교육과정에서 강조하고 있는 부분이다. 결국 새롭게 제시되는 대수 교육과정은 패턴56에서 다루었던 내용을 확장해서 대수와의 연결성을 강조한 것으로 볼 수 있으며, 그리고 이러한 연결성이 실제로 확보될 때 전통적인 대수 교육과정과의 차별성이 부각될 수 있을 것이다. 한 예로 Britannica 교과서는 대수에서 사용된 다양한 패턴이 대수 영역이 아닌 기하, 수, 통계 영역에서 새로운 상황에 적용될 수 있음을 보여주고 있으며, 이는 기초적인 패턴 탐구가 여러 영역을 연결하는 역할을 함으로써 수학을 전체적인 안목에 따라 학습하는 계기를 제공한다.

요약하면 우리의 교육과정 구성은 규칙성을 찾는 활동이 단순히 함수 계열로 이어지는 경향을 보여 주는 것으로, 패턴은 전체 대수 교육과정에서 연결되어 제시되지 않고 있다. 그리고 한번 사용된 패턴은 다시 사용되거나 발전되지 않은 채, 하나의 상황에 적용 가능한 단편적인 지식으로 그치고 있으며 이것은 학습의 연결성 측면에서 문제점으로 지적될 수 있을 것이다.

이에 비해 NCTM 또는 Britannica 교과서에서 제시한 패턴의 탐구는 함수, 방정식, 문자 또는 변수의 도입과 음수에 대한 이해를 돋는 근원으로 사용되고 있다. 예를 들어 Britannica 교과서에서는 처음 사용되었던 패턴이 계속 사용되거나⁷⁾ 좀 더 복잡하게 만들거나 다른 도구 즉, 표, 차트, 그림 등과 관련시키면서 발전되

고 있다. 또한 이러한 것들은 기하 과정과 혼합되거나 다른 과정을 통해 상호 교환되기도 한다. 그리고 NCTM의 Addenda series(1994) 가운데, 'Patterns and Functions'(1994) 역시 각 단원의 출발을 패턴에 두고 패턴 인식을 통해 식과 그래프 등으로 확장해가고 있음을 알 수 있다. 따라서 NCTM 또는 Britannica 교과서에서처럼 대수 교육과정이 자연스럽게 학생들에게 지도되기 위해서는 주어진 상황에서 그 상황을 이해하도록 그 안에 내재된 패턴 및 관계를 보는 안목과 함께 대수 도입이 다루어져야 한다⁸⁾.

다음에서 다루고 있는 내용들을 패턴과 관련해서 우리의 교육과정과 NCTM 및 Britannica 교과서에서 제시하고 있는 방법을 비교하여 살펴본 것으로, 우리는 이를 통해 우리는 패턴이 대수 교육과정에서 어떤 방식으로 연결되어 진행될 수 있는지를 살펴볼 수 있을 것이다.

1. 짹수/홀수의 도입

우리나라의 교육과정에서 짹수/홀수 개념의 도입은 5-가 과정에서 약수와 배수를 다루면서 홀짝놀이를 통하여 이루어지고 있다. 교사용 지도서는 홀수와 짹수의 의미를 둘씩 짹을 짹은 활동을 통해 제시하고 있다. 그리고 1에서 50까지의 수 배열표를 보면서 짹수에 표시하는 활동을 통해 짹수가 2의 배수임을 알도록 지도하고 있다. 이것은 표면적으로는 활동을 통한 짹수 개념을 획득하는 것처럼 보이지만 사실 짹수 개념에 대한 의미보다는 '배수'라는 형식에 기대어 짹수 개념을 파악하는 것으로 볼 수 있다. 이러한 우리의 교과서와 Britannica 교과

7) 예를 들어 블록 또는 벽돌로 패턴을 만드는 활동은 중세의 성곽, 화단 꾸미기, 영화의 세트장 만들기 등에서 동일한 자료로 패턴을 계속 구성 발전시킬 수 있는 상황을 제시하는 것이다.

8) 이 글에서는 전통적인 대수 교육과정을 대체하기 위한 하나의 방안으로 패턴에 기초한 도입방식을 외국의 문헌들에서 제시된 교육과정에 근거해서 제안하고 있을 뿐 이 방법만을 유일한 대안으로 강조하는 입장은 아니다.

서('패턴과 기호')를 비교하면, Britannica 교과서에서도 짹짓기 활동을 통해 짹수를 도입하고 있는 점은 동일하지만, 이 활동은 2의 거듭제곱으로 계속 발전되고 있으며, 그리고 여러 패턴에서 이러한 활동을 통해 규칙을 찾는 방법이 계속 반성, 발전되고 있다는 점에서 차이를 보이고 있다.

2. 지수의 도입

NCTM의 Standards Addenda series 가운데 'Patterns and Functions(1994)'는 패턴에 기초한 대수 도입방식 지수와 유리수 패턴, 그래프와 함수 패턴 등 5개 영역으로 나누어 보여주고 있다. 그 가운데 지수 도입 부분을 보면, 우선 문제 상황에서부터 2의 거듭제곱에 대한 논의가 시작됨을 알 수 있다. 교사는 문제를 제기하고, 학생들로 하여금 문제를 이해하고 탐구하도록 하면서, 그 내용을 표를 통해 정리하고, 그리고 표에서 2의 거듭제곱을 설명하면서 지수를 도입한다. 이러한 문제 상황에서 관계를 파악하고 그 관계로부터 패턴을 통해 지수를 도입하는 절차는 단편적인 물음에 답하는 수준에 그치지 않고 계속해서 확장된다. 곧, 증가하는 지수 함수의 그래프 그리기, 귀납적 외삽법을 이용해서 0의 지수를 예측하기, 주어진 표를 통해 밑이 2인 지수의 합을 계산하기, 음의 지수 예측하기 등으로 지수는 확장되고, 그리고 마지막으로 또 다른 상황인 '하노이의 타워' 문제를 통해 다시 한번 앞서 학습했던 패턴을 적용해서 문제를 풀어나간다. Britannica 교과서의 경우 '패턴과 기호' 첫 번째 단원(paring)에서 다루어졌던 짹수/홀수의 개념은 3 절에서 2의 거듭제곱으로 이어지고 이것은 다시 5절에서 다른 상황에 적용되면서 거듭제곱에 대한 아이디어로 연결된다.

그러나 우리나라의 교육과정에서 지수는 8-가 과정 지수법칙에서 지수의 표기법 및 정의를 통해 도입되고 있다. 그리고 지수법칙을 공식화하고 지수법칙에 따라 문제를 해결하는 알고리즘에 따라 지수를 학습하고 있다. 이러한 도입방식은 NCTM과 Britannica 교과서에서 제시한 패턴을 통한 도입과는 분명한 차이를 보이는 것으로, 이후 지수를 그래프 또는 함수와 연결해서 학습하면서 지수법칙과의 관련성을 인식하지 못한 상태에서 단순한 조작만을 반복하는 문제를 놓는 한 원인으로 볼 수 있다.

3. 문자 도입

문자 도입은 우리나라의 경우 7-가 과정에서 '문자와 식' 단원을 통해 이루어진다. 우리의 경우 현실 상황에서 문자를 도입하려는 시도를 단원의 도입부에서 하고 있지만 이것은 단편적인 문제로 제시될 뿐, 대부분의 경우 형식적인 기호조작이 중심 내용으로 다루어지고 있다.

그러나 Britannica 교과서에서는 패턴의 규칙을 나타내기 위해 자연스럽게 기호를 도입하는 상황이 제시되며, 이러한 상황은 계속되면서 점진적으로 대수식 등을 통해 수학화된다. 우리의 경우 패턴을 탐구하는 활동이 있으나, 이러한 활동은 기호나 문자를 도입하여 대수적인 표현으로 발전되지 못하고 있으며, 단순히 규칙을 찾아서 그 값을 구하는 정도에 머물고 있다. 더불어 '규칙성과 함수' 단원에서 패턴은 규칙성을 찾기 위한 하나의 도구로 사용되고 있으나, 이것은 함수 학습 계열로서만 다루어질 뿐, 전체적인 대수 교육과정과의 관련성 측면에서 볼 때 패턴은 문자 도입과 대수식, 방정식, 함수 등으로 이어지는 대수 학습과 연결되지 못하고 있다.

4. 대수식의 도입

(대수)식과 관련하여 Britannica 교과서에는 패턴에서 사용했던 단어를 계속 그대로 사용하여 식을 표현하고 그것을 word formula라고 부르면서, 8/9학년에 가서야 비로소 문자로 된 식의 표현이 등장한다. 이에 비해 우리의 대수 교육과정은 7학년 과정에서 문자로 된 식이 처음부터 바로 도입되고 있으며, 곱셈, 나눗셈 연산을 생략하는 방법 등을 통해 대수식을 단순화하는 방법이 제시되어 있다. 문제는 이러한 도입 방식에서 문자 도입의 필요성 및 문자로 표현된 식이 어떻게 구성되는지 등을 교과서가 보여주고 있지 못하다는 데 있으며, 이것은 앞으로 대수식 및 방정식 조작 과정에서 여러 형태의 오류를 낳는 하나의 원인으로 볼 수 있다.

이상 살펴본 우리나라 교육과정에서의 패턴들은 3장에서 논의한 패턴에 기초한 대수적 도입과 비교해볼 때 많은 차이점을 보이고 있다. 이것은 우리의 대수 교육과정이 전통적인 도입 방식을 취하고 있는 동시에 패턴을 대수 학습과 연결해서 다루고 있지 않는 것과 관련해서 생각해 볼 수 있다. 패턴에 기초한 대수적 도입이 전통적인 대수 학습에서의 문제점을 해결하는 유일한 수단으로 볼 수는 없겠지만, 형식적인 대수 교육과정에서의 문제점에 대한 새로운 대안으로 생각할 수는 있을 것이다. 따라서 기존의 패턴을 단편적인 지식 수준에서 지도할 것이 아니라 ‘문자와 식’, ‘규칙성과 함수’ 등을 통해 전체적인 교과 내용과의 관련성을 갖고 지도해야 하며, 이러한 노력은 중등 수학에서 본격적으로 대수를 배우기 이전인 초등 수학에서부터 단계적으로 대수적 사고를 개발하려는

목적과 함께 강조되어야 할 것이다.

V. 결 론

이 글은 대수 학습에서 패턴 및 관계를 강조함으로써, 대수적 사고의 핵심이라고 할 수 있는 일반성의 획득이 가능하다는 사실을 보이고 있다. 이를 위해서 우리는 기존의 전통적인 대수 교육과정과는 다른 관점에서 새로운 교육과정의 필요성을 논의하였으며, 이는 곧 미지수와 방정식의 학습에 이어서 함수와 일반성이라는 주제를 학습하는 것과 패턴과 관계를 통해 일반성을 학습하는 것 사이에는 분명한 차이가 있음을 가정하였다.

이 글은 2장에서 이러한 차이를 전통적인 대수 교육과정과 패턴에 기초한 대수 도입방식으로 구분하여 그 비교를 시도하고 있다. 대수를 도입하는 방법들은 다양하게 존재한다.⁹⁾ 그리고 그 도입방식은 학생들의 학습과 관련하여 그들의 태도와 흥미 및 성취도에 많은 영향을 미칠 것으로 예상된다. 따라서 대수 도입방식을 선택하는 것은 대수 교육과정에서 가장 중요한 문제 가운데 하나로 생각할 수 있을 것이다. 이 글은 이러한 도입방식 가운데 실제로 NCTM과 Britannica 교과서에서 제시한 패턴에 기초한 도입방식을 3장에서 다루고 있다. 대수를 도입하면서 패턴에 기초한 도입방식과 관련된 교육과정 자료들(NCTM의 Standards)과 교재(Britannica 교과서)들의 내용들을 논의하는 가운데, 우리는 패턴으로부터 대수 규칙을 이끌어내는 것은 전통적인 대수 교육과정과는 분명한 차이가 있음을 확인하였다. 그리고 이러한 교육과정을 강조하는 문헌들은 하나같이 많은

9) 일반화를 통한 도입, 문제 해결적 도입, 모델링을 통한 도입, 함수적 도입 등 대수를 도입하는 방식은 다양하게 제시되어 있다(Bendnarz 외 2인, 1996).

학생들이 전통적인 대수 교육과정에서 실패하고 있다는 사실을 강조하고 있으며, 따라서 학생들에게 이와 같은 새로운 도입방식과 함께 변화 가능성을 제시함으로써 대수 학습을 개선하려는 것을 그 목적으로 하고 있다.

그리고 이 글에서 우리는 패턴과 대수의 연결을 다음과 같은 관점에서 논의하였다. 일반적으로 대수에서 중심 개념들은 변수, 함수, 방정식과 부등식, 그래프 등으로 볼 수 있다. 여기서 중심 원리들은 실수 체계와 실수 체계의 구조적 성질들이다. 이 개념들과 원리들은 양적 변수들 사이의 관계로부터 추론을 이끌어내고, 이를 설명하기 위한 기호 체계를 통해 결합되어 있다. 따라서 양적인 패턴의 표현은 대수에서 그 출발점에 놓일 수밖에 없다. 곧, 대수에서 패턴은 대수의 개념과 원리를 이해하기 위한 출발점이 된다. 이와 함께 학생들이 현실주의 수학교육에서 말하는 상식 곧, 수학에서의 직관을 대수 자체의 형식적인 성격에서 찾는다는 것은 거의 불가능하다. 따라서 이것은 현상에서 찾을 수 있는 상식적인 수준은 패턴에서 찾을 수 있음을 의미하는 것으로, 이러한 패턴이 대수의 수학화에서 출발점이 될 수 있음을 의미한다. 다시 말해 학생들은 문자 사용에 있어서 미지수와 변수보다는 구체적 대상을 통한 패턴 활동으로부터 그것들을 해석할 때, 문자를 보다 잘 이해할 수 있게 된다. 왜냐하면 구체적 대상에는 수와 문자가 모두 포함되어 있으며 문자를 형식적으로 다루는 것보다 쉽게 도입할 수 있기 때문이다. 그리고 그들은 패턴들을 인식하고 규칙을 개발하는 데 있어서 계산과 구어적 표현, 그리고 대수적 표현을 순차적으로 연결함으로써 전통적인 대수 교육과정과는 다른 대수의 모습을 만날 수 있을 것이다. 따라서 이러한 새로운 교육과정은 학생들

에게 수학적 상황들을 생각하게 하고 그 상황에 맞는 방법을 배울 수 있도록 구성되어야 한다.

이 글은 이러한 배경에서 패턴을 대수의 출발점으로 보는 교육과정에 대하여 논의하고 있으며, 구체적으로 이러한 새로운 도입방식을 통해 대수를 지도하는 NCTM의 교육과정과 Britannica 교과서의 내용을 살펴보았다.

그리고 4장에서 우리나라 대수 교육과정에서 패턴이 어떤 형태로 다루어지는지를 살펴보았으며, 앞서 논의한 NCTM의 교육과정 및 Britannica 교과서와 이를 비교하면서 패턴이 제시되는 과정상의 문제점을 지적하고 있다. 여기서 우리는 패턴이 함수 계열에서만 지도될 것이 아니라 대수와의 연결 또한 강조되어야 함을 주장하고 있다.

대수를 도입하는 방식은 어떤 형태로든 많은 변화가 필요하며, 이러한 변화는 교육과정의 변화와 맞물려 진행되어야 한다. 그러나 교육과정의 변화는 충분한 연구 배경을 통해 진행되어야 하는 데 비해, 실제로 대수에 있어서 패턴에 기초한 도입방식은 우리의 현실에서 보면 아직 그 연결성에 대한 충분한 근거를 마련하지 못한 상태에서 외국의 문헌에 의존하고 있는 것이 사실이다. 이와 함께 전통적인 교육과정이 많은 문제를 놓고 있는 현실에서 새로운 패턴에 기초한 도입방식이 이러한 문제를 완전히 해결했다는 연구 결과 또한 아직 충분하지 않은 상태이다. 따라서 우리의 교육과정에 맞는 패턴 도입 형태와 이와 함께 어떤 과정을 거쳐 패턴이 대수의 중심 개념인 변수와 대수식, 방정식으로 연결될 수 있는지에 대한 구체적인 연구가 학교수학을 중심으로 후속연구에서 제시되어야 할 것이다.

참고문헌

- 김상미(1997). 수학적 패턴에 관한 학습 프로그램 개발 연구: 초등학교 4학년을 대상으로. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.
- 김택현(1999). 패턴 활동으로 구성된 함수 단원 개발과 적용-중학교 1학년 함수단원을 중심으로-. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.
- 안종률(1999). 5학년 아동을 위한 수학적 패턴 프로그램 개발과 적용. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.
- 이용률·성현경(1994). 수학교육론. 서울; 교학연구사.
- 최신애(2000). 초등학교 수학학습에서의 패턴 탐구 활동에 관한 연구. 인천교육대학교 교육대학원 석사 학위 논문.
- Bendnarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Britannica(1998). *Patterns and symbols*. Encyclopedia Britannica Education Corporation.
- Britannica(1998). *Expressions and formulas*. Encyclopedia Britannica Education Corporation.
- Britannica(1998). *Operations*. Encyclopedia Britannica Education Corporation.
- Britannica(1998). *Building Formulas*. Encyclopedia Britannica Education Corporation.
- Britannica(1998). *Patterns and figures*. Encyclopedia Britannica Education Corporation.
- English, L. & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher*, 91-2, 166-170.
- Herbert, K. & Brown, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3-6, 340-345.
- Küchemann(1981). Algebra. In K. Hart, et al. (Eds.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. The CSMS Mathematics Team.
- NCTM(1989). *Standards and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM(1994). *Standards and evaluation standards for school mathematics. Addenda series, grade 5-8, patterns and functions*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM(1998). *Principles and standards for school mathematics, Discussion draft*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Stacey, K. & MacGregor, M. (2001). Curriculum Reform and Approaches to Algebra. In R. Sutherland, et al. (Eds.), *Perspectives on school algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Usiskin, Z. (1987). Why elementary algebra can, should, and must be an eighth-grade course for average students. In B. Moses (ed) *Algebraic Thinking, Grades (K-12)* (pp.40-48). NCTM.

A study on the change of algebra curriculum - Focusing on the introduction of algebra based on patterns -

Kim, Sung Joon (Seoul National University, Graduate School)

In this paper, we deal with the teaching of the approaching to algebra based on patterns. The change of algebra curriculum has been undergoing in many countries including USA, England, Australia. The traditional algebra curriculum starts with letters(variables), algebraic expressions, and equations. But these formal approaching method has many difficulties in teaching school algebra. Therefore the new algebra curriculum has to be needed, and the approaching to algebra

based on patterns has been focused. In this paper, we compare this new approaching to algebra based on patterns to the traditional algebra curriculum. Next we consider the NCTM algebra curriculums based on Standards (1989) and Standards 2000(2000), Britannica textbook series(1998) based on RME. Also we investigate our pattern approaching in our curriculum and discuss some problems from the perspective of the approaching to algebra based on patterns.