

와동에 입사하는 충격파의 반사 및 투과 (II)

- 이론적 모델 -

장 세 명[†] · 이 수 갑^{*}

(2002년 4월 22일 접수, 2002년 7월 12일 심사완료)

Shock Reflection and Penetration Impinging into a Vortex (II)

- Theoretical Model -

Se-Myong Chang and Soogab Lee

Key Words: Shock-Vortex Interaction(충격파-와동 간섭), Quadrupole(4 극자), Reflected Wave(반사 파), Transmitted Shock(관통 충격파)

Abstract

A theoretical model on shock-vortex interaction is investigated using a numerical technique to solve Navier-Stokes equations. The shock-vortex interaction generated by this model based on the classical Rankin vortex is precisely investigated for a benchmark problem: Dosanjh and Weeks experiment. In terms of shock dynamics, the interaction is categorized to three stages: shock distortion, shock split, and shock-shock interaction. The quadrupolar structure of the sound source produced by the interaction is far supported with the present model, and the difference between experiment and theoretical model is also discussed in this paper.

1. 서 론

이전의 논문⁽¹⁾에서 저자들은 충격파-와동 간섭에서 발생하는 약한 파동들 - 반사파(reflected wave) 및 관통 충격파(transmitted shock) -을 실험적 모델을 사용하여 관찰·해석하였다. 이 연구에서 이들 약한 파동들은 와동 둘레에서 압축-팽창-압축-팽창의 4 극자 압력 분포를 만드는 기본 요소로 작용한다. 본 연구에서는 이러한 정성적

사실을 바탕으로 보다 정량적인 결론을 얻을 수 있도록 실험 모델을 더욱 체계화시킨 이론적 모델을 제시하고, Navier-Stokes 방정식의 수치 해석을 통하여 실험 결과를 검증하고자 한다.

Weeks와 Dosanjh⁽²⁾는 Lighthill의 음향 유사법(acoustic analogy)을 사용하여 충격파-와동 간섭에서 발생하는 음원 - 단극자(monopole), 쌍극자(dipole), 4 극자(quadrupole) - 중 가장 큰 부분이 4 극자 요소란 사실을 밝혀 내었다. Ribner⁽³⁾는 독창적인 이론 전개를 통하여 이들의 실험 데이터를 정량적으로 예측하였다. 그러나 이 이론은 음향학에 기초하고 있었기 때문에 충격파와 같은 비선형 파동 근방에서는 맞지 않는다는 단점이 있었다. 최근에 들어와 전산 유체 역학(CFD: computational fluid dynamics)과 전산 공력 음향학(CAA: computational aero-acoustics)의 발달 덕분에 고립 와동과 충격파의 간섭을 다루는 많은 연구 논문들이 출판되고 있는 실정이다.^(4~6)

[†] 책임저자, 회원, 군산대학교 기계공학부

E-mail : smchang@kunsan.ac.kr

TEL : (063)469-4724 FAX : (063)469-4727

^{*} 회원, 서울대학교 기계항공공학부

특히 참고 문헌⁽⁵⁾의 저자들은 충격파-와동 간섭이 크게 2 단계로 일어남을 밝혔다. 첫째로 충격파는 주위 유동의 영향을 받아 극도로 변형되고, 둘째로 4 극자 음향이 발생하여 전파된다는 것이다. 따라서 충격파-와동의 간섭 문제는 충격파 역학(shock dynamics)과 음향학(acoustics) 문제 모두를 포함하고 있다.

본 논문에서는 참고 문헌⁽¹⁾의 실험 조건(구체적인 수치는 3 절 참조)과 비슷한, 고립시키지 않은 와동 모델을 사용하여 여기에서 반사파(R)와 관통 충격파(TS)가 발생함을 재확인한다. 그리고 실험에서 얻은 데이터가 과연 타당한 값인지 기존 연구와 비교해 가며 충분히 검증할 한다. 그리고 정량적인 해석을 통하여 실험적으로 관찰한 사실을 보충 설명한다.

2. 와동 모델 및 검증

2.1 와동 모델

와동 모델에는 매우 많은 종류가 있다.⁽⁷⁾ 이들 모델들은 모두 다음의 고전적인 Rankin 와동 모델을 기초로 하고 있다. 실제로 참고 문헌⁽²⁾의 저자들은 이 모델을 수정 없이 그대로 사용하였다. 와동이 오직 접선 방향의 속도 성분(V_θ)만을 가진다고 가정하면, 그 분포는 다음과 같이 주어진다.

$$V_\theta(r) = \begin{cases} U_{\max} \left(\frac{r}{r_c} \right), & r \leq r_c \\ U_{\max} \left(\frac{r_c}{r} \right), & r \geq r_c \end{cases} \quad (1)$$

즉, 와동은 다음 두 부분으로 나뉘어진다. 강체 회전하는 와동핵 ($r \leq r_c$)은 그 각속도가

$$\omega = U_{\max} / r_c \quad (2)$$

이며, 외부의 포텐셜 유동 ($r \geq r_c$)에서 와류의 회전도(circulation)는

$$\Gamma = 2\pi U_{\max} r_c \quad (3)$$

가 된다.

참고 문헌⁽⁴⁻⁶⁾에서는 식 (1)의 외부 유동 부분에 식 (3)의 Γ 를 상쇄시켜 유동을 완전히 고립시키기 위한 반 회전도(anti-circulation) - Γ 를 통상 적용시킨다. 이는 당연히 비물리적 개념이지만, 고립 와동을 만들기 위해 어쩔 수 없이 사용된다.

실제 실험에서 모든 시작 와동 (starting vortex)은 미끄럼선 (slip line)을 통하여 물체와 연결되고, 완전히 고립된 와동이란 존재할 수 없다. 따라서 본 연구의 저자들은 이러한 비물리적 항을 제거하는 대신, 식 (1)을 그대로 사용한 채 충격파의 초기 위치를 $x = -20 r_c$ 로 비교적 멀리 잡는 방법으로 충격파 주위의 유동장을 훼손시키지 않고 파동 R 및 TS를 관찰할 수 있도록 했다.

압력(p)과 밀도(ρ)는 원심력 평형 방정식과 단열 조건 (핵 내부) 및 등 엔트로피 가정 (핵 외부)에 의하여 유도할 수 있다. 이 때, Crocco의 정리에 의하여 핵 외부에서는 와도와 엔트로피의 구배가 없지만, 내부에서는 단열 조건과 와동 중심($r=0$)에서 유한한 크기의 상태량을 가진다는 조건을 사용해야 한다.

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{V_\theta^2}{r} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r \frac{d(p/\rho)}{dr}] = 0, & r \leq r_c \\ p = p_\infty \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma, & r \geq r_c \end{cases} \quad (5)$$

여기에서 하첨자 ∞ 는 와동 중심으로부터 무한히 떨어진 자유류 값이고, γ 는 비열비(specific heat ratio)로 공기의 경우는 통상 1.4의 값을 가진다.

식 (4),(5)로부터 압력과 밀도는 닫힌 형태(closed form)로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{p(r)}{p_\infty} = \begin{cases} \{f_1(r_c)\}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} f_2(r), & r \leq r_c \\ \{f_1(r)\}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, & r \geq r_c \end{cases} \quad (6)$$

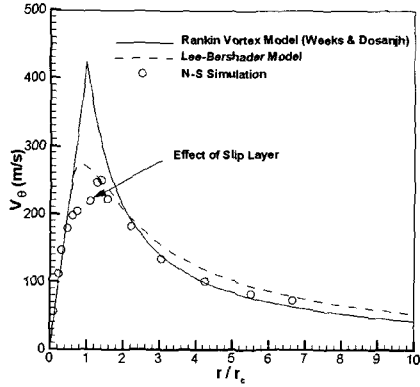
$$\frac{\rho(r)}{\rho_\infty} = \begin{cases} \{f_1(r_c)\}^{\frac{1}{\gamma-1}} f_2(r), & r \leq r_c \\ \{f_1(r)\}^{\frac{1}{\gamma-1}}, & r \geq r_c \end{cases} \quad (7)$$

여기에서

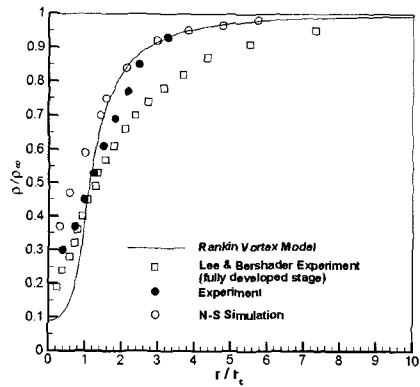
$$f_1(r) = 1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{\rho_\infty}{p_\infty} U_{\max}^2 \left(\frac{r_c}{r} \right)^2$$

$$f_2(r) = \exp \left[-\frac{\rho_\infty U_{\max}^2}{2p_\infty f_1(r)} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right\} \right]$$

따라서 식 (1),(6),(7)을 자유 와동의 초기 조건으로 사용하기로 한다. 이러한 와동 모델을 Fig. 1(a)-(b)에서 Lee-Bershadter 모델과 비교하였다.⁽⁷⁾



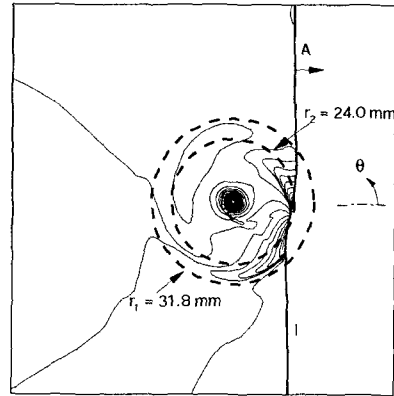
(a) Tangential velocity profile



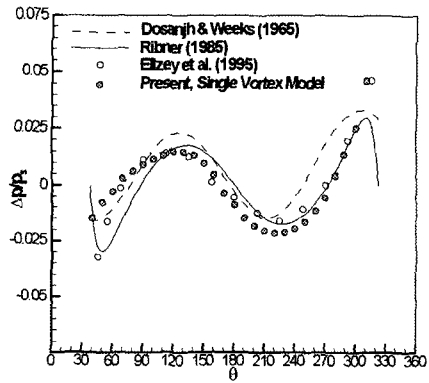
(b) Density profile

Fig. 1 Vortex models

실험 모델⁽¹⁾에서의 데이터의 경우 와류가 고립되지 않아서 완전한 대칭이 아니므로, $\theta = 180^\circ$ (x 축 음의 방향) 선상에서 측정된 데이터를 사용하였다. Fig. 1(a)에서와 같이 Rankin 모델에는 와동핵 내부와 외부 사이에 급격한 속도의 불연속이 있다. 그러나 Fig. 1(b)의 매끄러운 밀도 분포에서 볼 수 있는 바와 같이 이러한 속도 불연속은 적분 효과에 의해 보상된다. 또한 와동이 충분히 발달하지 못한 상태에서는 오히려 Rankin 와동 모델이 실제 실험 결과를 잘 설명해주고 있음을 알 수 있다. 결론적으로 Fig. 1(a)에서 와동핵 경계의 미끄럼 층(slip layer) 효과에 의한 속도 분포의 찌그러짐을 제외한다면, 본 연구에서 사용하는 와동 모델은 실험 결과를 근사적으로 묘사할 수 있다고 판단된다.



(a) Numerical isopycnics at 78 μ s



(b) Acoustic pulse pressure

Fig. 2 A benchmark problem: Dosanjh and Weeks experiment

2.2 기존 연구와의 비교 검증

보다 확실한 검증을 위해서 본 연구의 수치 해법이 Dosanjh와 Weeks의 실험 데이터를 얼마나 잘 맞추는지 살펴보자. 와동의 세기는 $U_{max} = 177$ m/s, $r_c = 2.77$ mm로 주어지고, $M_s = 1.29$ 인 충격파가 와동에 입사한다. Fig. 2(a)는 충격파가 와동 중심의 초기 위치 (0, 0)을 지난 후 78 μ s 순간의 등밀도선을 나타낸 것이다. 참고 문헌⁽¹⁾에 제시된 Navier-Sokes 방정식의 수치 해법을 사용했으며, 계산 영역은 75 mm x 75 mm의 정사각형이다.

Fig. 2(a)의 r_1 , r_2 라고 표시한 원주들 위를 따

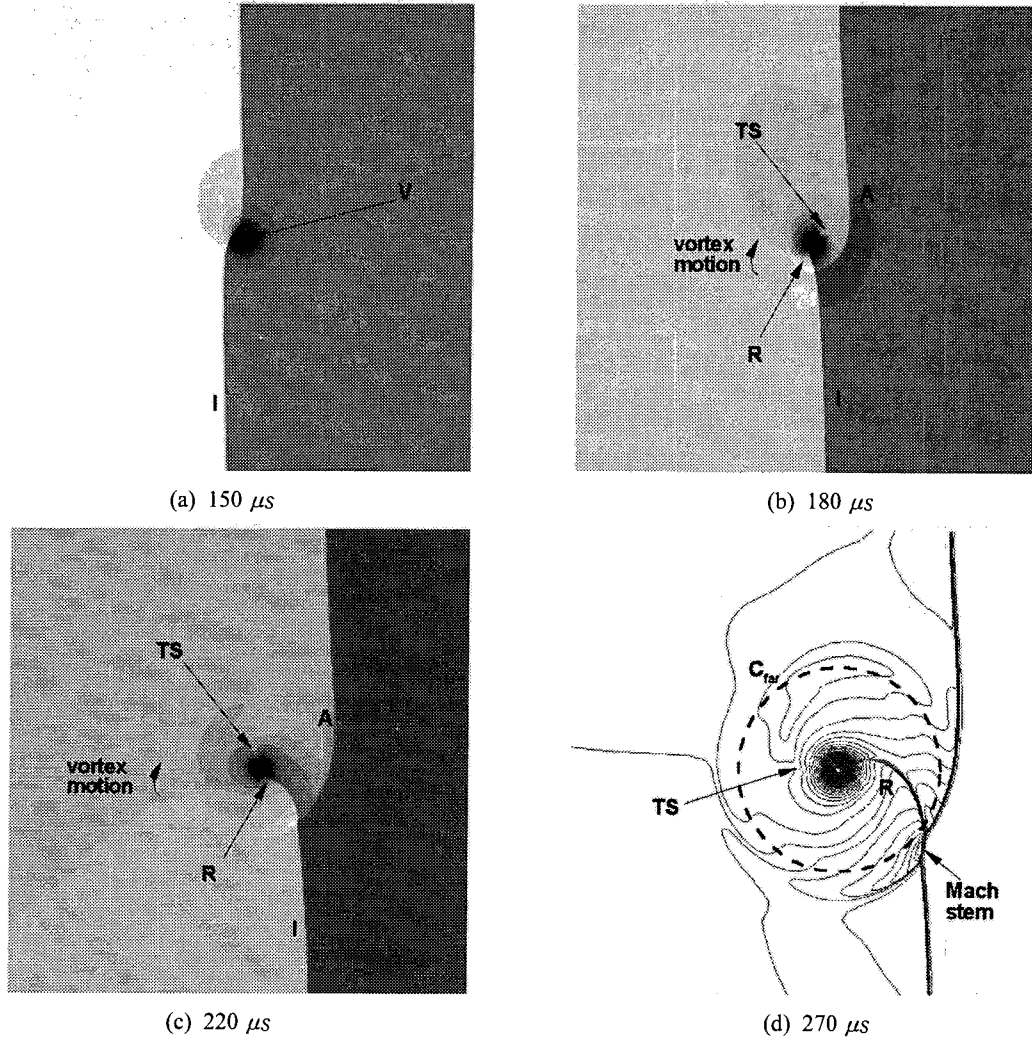


Fig. 3 Model study: Pressure plot

라 각각의 압력 분포 $p(r_1, \theta)$, $p(r_2, \theta)$ 를 구한 다음, 이들의 차에 의하여 음향 펄스 압력 (Δp : acoustic pulse pressure) 을 구한다.

$$\Delta p = p(r_2, \theta) - p(r_1, \theta) \quad (8)$$

Fig. 2(b) 에서는 Dosanjh와 Weeks의 실험값,⁽²⁾ Ribner의 이론값,⁽³⁾ 그리고 Ellzey 등의 계산값⁽⁵⁾ 등이 본 연구의 데이터와 함께 도시되어 있다. 여기에서 기준 변수 p_s 는 충격파가 지나간 후의 자유류 압력이다. 약간의 오차는 있지만, 본 연구의 결과는 전반적으로 기존의 데이터들과 일치

하는 경향을 보이고 있다.

3. 계산 결과 및 토의

참고문헌⁽¹⁾에서의 실험 조건인 $M_s=1.22$, $U_{max} = 421 \text{ m/s}$ (이 값은 Rankin 와동의 속도 분포에서의 이론적 값일 뿐, 실제 값이 아님. Fig. 1(a) 참조), $r_c = 3.3 \text{ mm}$ 를 사용하여 식 (1),(6),(7)의 초기 조건으로부터 충격파-와동 간섭을 계산한 결과는 Fig. 3(a)-(d)에 나와 있다. 이들은 모두

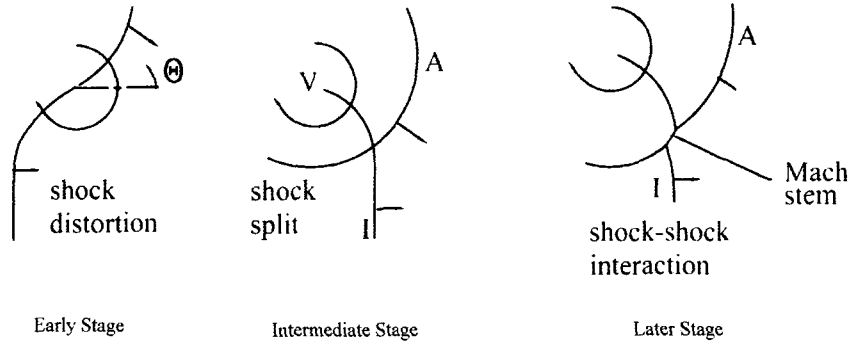


Fig. 4 Shock dynamics in the interaction

압력 선도(isobars)로 평면 입사 충격파(I)를 와동(V)에 입사시킴으로써 얻을 수 있다.

Fig. 3(a)에서 충격파(I)는 와동(V)에 의해 변형된다. 즉, Fig. 3(b)-(c)에서 보이는 바와 같이, 와동 중심 위쪽에서는 가속되어 가속파(A: accelerated wave)를 만드는 반면, 아래쪽 부분은 강한 와동의 중심에 붙잡힌다. 와동에 입사한 충격파의 일부는 반사(R)되거나 투과(TS)된다. Fig. 3(d)에서는 A와 I의 충격파-충격파 간섭에 의한 마하 충격파(Mach stem)와 파동 R 및 TS를 이전의 실험 모델⁽¹⁾에서보다 더욱더 선명하게 보여준다.

3.1 충격파 변형

참고문헌⁽⁵⁾의 지적과 같이 충격파-와동 간섭의 초기 단계에서는 충격파의 변형이 심하게 일어난다. 충격파 역학의 관점에서 보면, Fig. 3(a)-(d)의 약한 충격파와 강한 와동의 간섭에서 충격파 변형은 다음 세 단계를 거친다.

(1) **충격파 변형:** 입사 충격파는 와동의 회전에 의하여 심하게 변형된다(Fig. 4의 첫 번째 그림 참조).

(2) **충격파 분리:** 입사 충격파는 와동의 중심에 잡혀 감속되는 부분(I)과 가속되는 부분(A)으로 갈라진다(Fig. 4의 두 번째 그림 참조).

(3) **충격파-충격파 간섭:** 파동 I와 A는 서로 교차하면서 충격파-충격파 간섭을 일으키며 마하 충격파를 생성한다(Fig. 4의 세 번째 그림 참조).

즉, 감속 충격파(I)와 가속파(A)의 교차에는 정규 반사(regular reflection) 모양에서 마하 반사(Mach reflection) 모양으로 천이한다.

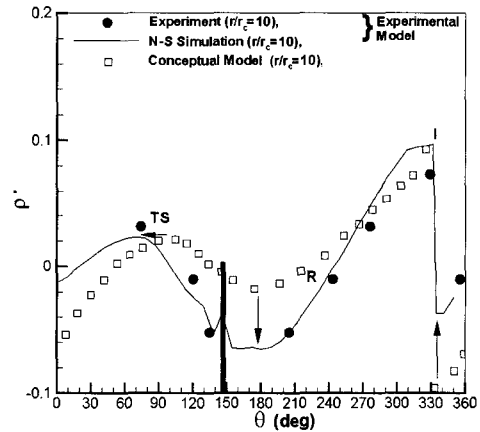


Fig. 5 Quadrupolar density distribution

3.2 4 극자 분포

수치 해석으로부터 계산한 밀도 데이터에서 Fig. 3(d)의 원주 C_{far} ($r/r_c=10$) 둘레를 따라 추출된 밀도 분포를 이용하여 4 극자 음원의 구조를 탐구하여 보기로 한다. 일반적으로 등 엔트로피 가정이 성립하는 음향학의 범주에서는

$$\Delta p = c_\infty^2 \Delta \rho \tag{9}$$

임이 성립한다. 여기에서 c_∞ 는 음속(speed of sound)이다. 따라서 음속이 일정한 원장(far field)에서 밀도장의 분포는 압력장의 분포와 형태상 동일하다고 생각할 수 있다.

추출된 밀도 값으로부터 기준 밀도(ρ_{ref})를 구하기 위하여 다음과 같이 평균을 취한다.

$$\rho_{ref} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(r_{C_{far}}, \theta) d\theta \quad (10)$$

이 값에 기초하여 밀도를 무차원화 한다.

$$\rho' = \frac{\rho - \rho_{ref}}{\rho_{ref}} \quad (11)$$

방향각 θ 에 대한 이 값의 분포는 Fig. 5에 나와 있다. 참고문헌⁽¹⁾의 실험 모델에서 구한 데이터 역시 함께 표시되어 있다.

Fig. 5 에서 충격파 I와 TS에 의한 압축파의 꼭대기 값은 실험 모델과 이론 모델 모두의 경우 일치한다. 그러나 이론 모델은 반사파 R에 의한 팽창 효과를 낮게 예측(underestimation)하고 있다. 그 이유는 실험 모델의 경우 평판에 의해 유동장이 교란되고 있기 때문이다. 실제로 참고문헌⁽¹⁾의 Fig. 7(d)에서는 평판의 아래 부분에서 반사파(R)의 재반사(re-reflection)가 일어나 팽창 효과를 더 크게 한다.

4. 결 론

본 연구에서는 참고문헌⁽¹⁾에서 제시하였던 충격파-와동 간섭의 실험적 모델로부터 보다 개념적인 물리 현상을 알아내기 위해 Rankin 와동 모델에 기초한 이론적 모델을 제안하였다. 본 연구에서 사용한 수치적 방법은 기존의 실험 및 이론 계산 데이터와 비교되었고, 물리적으로 타당한 값으로 검증되었다. 이를 바탕으로 수치 해석을 실시하였고, 참고문헌⁽¹⁾의 실험 결과와 정량적으로 비교할 수 있는 결과를 얻었다.

충격파-와동 간섭은 충격파 변형, 충격파 분리, 그리고 충격파-충격파 간섭의 3 단계로 일어난다. 그 과정에서 와동 주위 압축-팽창-압축-팽창의 4 극자 분포 음원 데이터를 측정할 수 있다. 여기에는 물론 실험 모델에서와 마찬가지로 충격파 I 및 TS와 반사파 R이 각각 압축파 팽창의 메커니즘으로 작용한다. 또한 실험 모델에서는 시작 와동을 만드는데 사용된 평판의 교란 효과 때문에 팽창파인 R의 강도가 이론 모델의 예측보다 커지게 됨을 알게 되었다.

참고문헌

(1) Chang S. M., Chang K. S., 2002, "Shock

- Reflection and Penetration Impinging into a Vortex (I) - Experimental Model," *Transactions of KSME (B)*, Vol. 26, accepted.
- (2) Weeks T. M. and Dosanjh D. S., 1967, "Cylindrical Sound Wave Generated by Shock-Vortex Interaction," *AIAA Journal*, Vol. 5, pp. 660-669.
- (3) Ribner H. S., 1985, "Cylindrical Sound Generated by Shock-Vortex Interaction," *AIAA Journal*, Vol. 23, pp. 1708-1715.
- (4) Meadows K. R., Kumar A. and Hussaini M. Y., 1991, "Computational Study on the Interaction Between a Vortex and a Shock Wave," *AIAA Journal*, Vol. 29, 174-179.
- (5) Ellzey J. L., Henneke M. R., Picone J. M and Oran E. S., 1995, "The Interaction of a Shock with a Vortex: Shock Distortion and the Production of Acoustic Waves," *Physics of Fluids*, Vol. 7, pp. 172-184.
- (6) Chatterjee A., 1999, "Shock Wave Deformation in Shock-Vortex Interactions," *Shock Waves*, Vol. 9, pp. 95-105.
- (7) Lee S. and Bershader D., 1994, "The Structure of Compressible Starting Vortices," *Experiments in Fluids*, Vol. 16, pp. 248-254.
- (8) Chang S. M. and Chang K. S., 2000, "On the Shock-Vortex Interaction in Schardin's Problem," *Shock Waves*, Vol. 10, pp. 333-343.
- (9) Chang S. M., Lee S. and Chang K. S., 2001, "Morphological Transformation of Shock Waves Behind a Flat Plate," *KSME International Journal*, Vol. 15, pp. 665-670.
- (10) Chang S. M. and Chang K. S., 1999, "Weak Shock Waves Reflected from a Blunt Body," *Transactions of KSME (B)*, Vol. 23, pp. 901-910.
- (11) Chang S. M. and Chang K. S., 2001, "Vortex Ring, Shock-Vortex Interaction, and Morphological Transformation Behind a Finite Cone," *KSME International Journal*, Vol. 15, pp. 1599-1604.
- (12) Chang S. M., 2000, "Unsteady Shock Wave-Vortex Interactions in the Compressible Shear Layer," Ph.D. Thesis, KAIST.