

## 비압축성 유동계산을 위한 계층 요소 사용의 검토

김진환<sup>†</sup> · 정창률<sup>\*</sup>

(2001년 7월 30일 접수, 2002년 7월 18일 심사완료)

### An Investigation on the Use of Hierarchical Elements for Incompressible Flow Computations

Jin Whan Kim and Chang Ryul Jeong

**Key Words:** Mixed Degree Finite Elements (혼합 차수 유한 요소), Hierarchical Basis Function (계층기저 함수), Degree of Freedom (자유도),  $C^0$ -Continuity ( $C^0$  연속성), Subparametric Element (저 자유도 요소), Poisson Equation (푸아송 방정식)

#### Abstract

The use of a two dimensional hierarchical elements are investigated for the incompressible flow computation. The construction of hierarchical elements are explained by both a geometric configuration and a determination of degrees of freedom. Also a systematic treatment of essential boundary values has been developed for the degrees of freedom corresponding to higher order terms. The numerical study for the poisson problem shows that the computation with hierarchical higher order elements can increase the convergence rate and accuracy of finite element solutions in more efficient manner than the use of standard first order element. For Stokes and Cavity flow cases, a mixed version of penalty function approach has been introduced in connection with the hierarchical elements. Solutions from hierarchical elements showed better resolutions with consistent trends in both mesh shapes and the order of elements.

#### 1. 서론

일찍이 Zienkiewicz 외 2인<sup>(1)</sup>과 Robinson<sup>(2)</sup>은 요소의 고차화에 계층함수의 효율성을 주장하였으며, 또한 Demkowicz<sup>(6)</sup>는 h-p 형태의 적응적 체는 세분화 및 고차화 기법에 이를 적용하였다. 계층(Hierarchical)함수는 고차화 됨에 따라 필요한 개수의 함수를 기존의 저차 함수에 덧붙임으로서 고차 형상함수를 용이하게 구성해 나갈 수 있으

며, 계층요소, 즉 계층기저 함수를 요소의 보간 함수로 사용한 요소 사용의 이점은 다음과 같다.

일반적으로 고차해를 구하기 위해서는 이에 상응하는 절점들을 요소가 가지고 있어야 하지만 이렇게 되면 너무나 많은 절점들이 필요하게 되어 최적의 요소 생성에 대한 이점이 없어지게 된다. 그러나 계층 형상 함수를 사용할 경우에는 요소의 기하적 형태를 2차 라그랑지안(Lagrangian) 요소로 한정할 수 있으며, 나머지 자유도(d.o.f.)는 변(edge)이나 면(face) 그리고 내부에 존재하게 된다. 2차 라그랑지안 요소란 기하학적으로 이차원 일 경우 9개의 절점을 필요로 하고 3차원일 경우 27개의 절점을 필요로 한다. 이러한 요소에 계층 형상함수를 사용하면 절점의 증가 없이 고차 요소 해를 구현할 수 있다.

이 연구에서는 계층함수의 이러한 적절성을 이용하여 3차원 요소에 대한 기저함수를 5차까지

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 동의대학교 기계산업시스템공학부  
E-mail : kimjw@dongeui.ac.kr  
TEL : (051)890-1646 FAX : (051)890-2232

<sup>\*</sup> 동의대학교 대학원 기계공학과

정의하였으며, 또 고차(2차 이상)에 대한 자유도는 변위(displacement)가 아닌 관계로 변수형 고정 경계값의 적절한 변환이 필요하다. 따라서 유한요소 해의 수렴성을 가변적 고정 경계조건에 대하여도 검토하였다. 유동계산에 대하여는 계층요소의 자유도 특성을 이용하여 압력해의 고차 성분을 제거하여 LBB<sup>(9)</sup> 조건을 만족시키는 혼합 벌칙 함수 접근법(Mixed version of penalty function approach)을 사용하여 Stokes 및 Cavity 유동에 그 계산 결과를 나타내었다.

계층요소에 대한 코드 구성은 요소, 절점, 자유도 종류 및 차수 등에 대한 정보의 연결성이 중요하며, 이는 Visual Basic<sup>(4)</sup>의 Type 변수를 이용하면 대체로 용이하게 수행할 수 있다.<sup>(5)</sup>

## 2. 계층 요소의 구성

### 2.1 형상 함수

3차원 육면체 요소에 대한 계층형상 함수에 대하여 고려하기로 한다. 2차원 및 3차원의 경우, 일차원 함수의 텐서 곱(tensor product)으로부터 요소 형상 함수를 구현할 수 있다. 다음은 일차원 5차(quintic) 요소에 필요한 계층 기저 함수이다.

$$\begin{aligned} h_1(\eta) &= (1 - \eta)/2 \\ h_2(\eta) &= (1 + \eta)/2 \\ h_3(\eta) &= (\eta^2 - 1)/2 \\ h_4(\eta) &= (\eta^2 - 1)\eta/6 \\ h_5(\eta) &= (\eta^4 - 1)/24 \\ h_6(\eta) &= (\eta^4 - 1)\eta/120 \end{aligned} \quad (1)$$

Fig. 1에 보인 3차원 quadratic element에 대한 형상 함수는 다음과 같이 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= h_1(\eta_1) h_1(\eta_2) h_1(\eta_3) \\ \varphi_2 &= h_2(\eta_1) h_1(\eta_2) h_1(\eta_3) \\ \varphi_3 &= h_2(\eta_1) h_2(\eta_2) h_1(\eta_3) \\ \varphi_4 &= h_1(\eta_1) h_2(\eta_2) h_1(\eta_3) \\ \varphi_5 &= h_1(\eta_1) h_1(\eta_2) h_2(\eta_3) \\ \varphi_6 &= h_2(\eta_1) h_1(\eta_2) h_2(\eta_3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{26} &= h_1(\eta_1) h_3(\eta_2) h_3(\eta_3) \\ \varphi_{27} &= h_3(\eta_1) h_3(\eta_2) h_3(\eta_3) \end{aligned} \quad (2)$$

각 요소 해의 구성에 요구되는 형상함수는 일반적으로 요소의 보간 차수에 따라 정해진다.

Table 1에는 요구되는 형상함수를 요소 절점과 차수에 대하여 번호로 나타내었으며, Fig. 1에는 요소 절점의 번호를 표시하였다.

일차원의 경우, 식 (1)을 참고하여 계층형상 함수를 도시하면 Fig. 2와 같으며, 3차 계층요소의 형상함수는 2차 요소의 형상함수에 3차 관련함수를 덧붙임으로써 구성됨을 알 수 있다.

일반적인 라그랑지안 요소의 경우, 각각의 차수에 대한 형상함수는 새로운 절점을 생성하여 다시 구성해야 하는 것과 비교하면 계층요소는 고차화에 있어서 상당한 편리함을 제공하고 있음을 볼 수 있다. 즉, 저차의 자유도는 고차의 자유도에 포함될 수 있다는 특성을 이용하여 좌변행렬  $A_k$ 를 구성하면 다음과 같다.

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k-1} & C_k \\ D_k & B_k \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서  $k$ 는 형상함수의 차수이며, 저차의 자유도에 대한 행렬  $A_{k-1}$ 은 고차의 자유도에 대한 행렬  $A_k$ 에 포함됨을 볼 수 있다. 그러나 이러한 계층행렬에 대한 자유도는 변위(displacement)가 아닌 관계로 고정 경계 조건의 처리에 대하여 별도의 주의가 필요하다.

### 2.2 변수형 고정 경계조건

계층요소의 꼭지점(Vertex)에 대한 자유도는 변위를 나타내지만 그 이외의 절점(변, 면, 내부)들에 대한 자유도는 변위가 아니다. 그러나 고정 경계치(Dirichlet B.C)들은 변위에 대하여 주어지기 때문에 이러한 값들을 계층함수의 자유도 특성에 맞게 변화시킬 필요가 생긴다. 이 경우 변(Edge) 혹은 면(Surface) 자유도에 대한 값을 정하기 위해서는 필요한 수의 연립방정식을 풀어야 한다.

요소 내부 및 경계의 임의 위치에 대한 변위값  $T_p$ 는 아래와 같다.

$$T_p = \sum N_i(\underline{q}_p) U_i \quad (4)$$

Table 1 D.O.F(Degree of Freedom) numbers of element nodes in 3 dimensions

Deg .	Element Node No.			
	Vertex	Edge	Surface	Interior
	1 ... 8	9 ... 20	21 ... 26	27
1	1 ... 8			
2		9 ... 20	21 ... 26	27
3		28 ... 39	40 ~ 42 ... 55 ~ 57	58 ~ 64
4		65 ... 76	77 ~ 81 ... 102 ~ 106	107 ~ 125
5		126 ... 137	138 ~ 144 ... 173 ~ 179	180 ~ 216

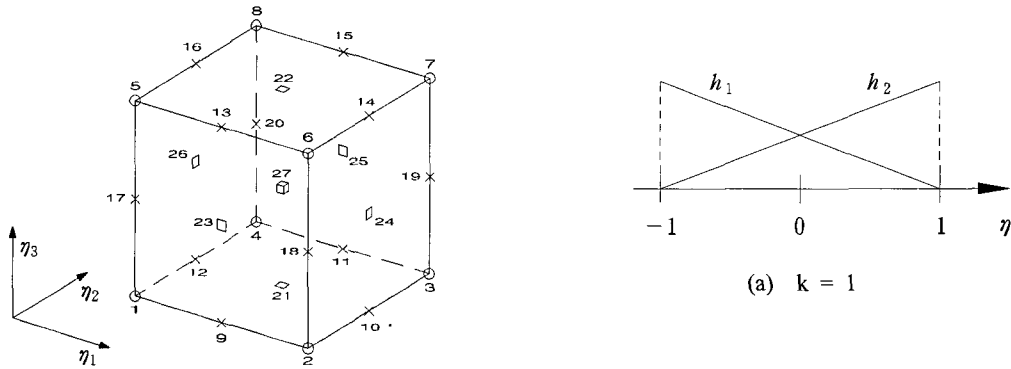


Fig. 1 Element node numbering

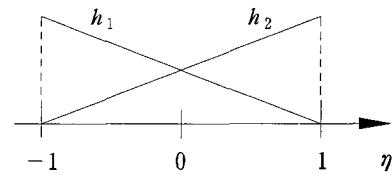
3 차원 육면체요소의 고정 경계조건은 면에 대하여 주어지므로  $\eta$  는 해당 요소면에 대한 2 차원 계산좌표,  $N_i$  는 2 차원 계층형상함수이다. 만일 요소가 고정 경계면에 위치한다면  $T_p$  는 위치에 대하여 주어진 경계값이며,  $U_i$  는 경계조건으로 취하고자 하는 자유도 값이다.  $T_p, p = 1, 2, \dots, 9$  를 임의의 면에 대한 라그랑지안 요소의 절점에 대하여 주어진 값이라 하면, 2 차 (quadratic) 육면체 요소의 임의의 면에 대하여 식 (4) 를 이용하여 다음과 같은 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{i=3}^6 N_i(0, -1) U_i = T_5(0, -1) - \sum_{j=1}^2 N_j(0, -1) U_j$$

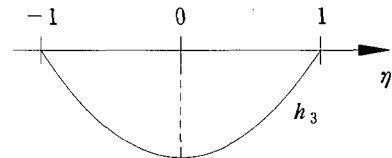
$$\sum_{i=3}^6 N_i(1, 0) U_i = T_6(1, 0) - \sum_{j=1}^2 N_j(1, 0) U_j$$

$$\sum_{i=3}^6 N_i(0, 1) U_i = T_7(0, 1) - \sum_{j=1}^2 N_j(0, 1) U_j$$

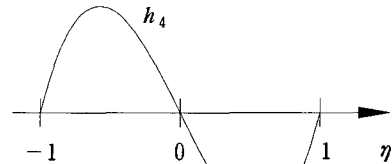
$$\sum_{i=3}^6 N_i(-1, 0) U_i = T_8(-1, 0) - \sum_{j=1}^2 N_j(-1, 0) U_j$$



(a) k = 1



(b) k = 2



(c) k = 3

Fig. 2 Hierarchical shape functions

$$\sum_{i=5}^8 N_i(0,0)U_i = T_3(0,0) - \sum_{i=1}^4 N_i(0,0)U_i \quad (5)$$

여기서  $U_1 \sim U_4$ 는 꼭지점의 변위값으로 주어진 경계조건으로부터 결정될 수 있으며,  $U_5 \sim U_8$ 는 구해져야 할 새로운 경계값이다. 그리고 경지 변위  $T_p$ 는  $\underline{x}_p = \{(0,-1),(1,0),(0,1),(-1,0),(0,0)\}$ 에 대한 값들이다. 3차(cubic) 이상의 차수를 갖는 요소의 경우 필요한 연립방정식을 아래와 같이 일반화된 식으로 정의할 수 있다.

$$\sum_{i=5}^n N_i(\underline{x}_p)U_i = T_p - \sum_{i=1}^4 N_i(\underline{x}_p)U_i \quad (6)$$

요소의 차수를  $Deg$ 라 하면, 식(6)에서  $n$ 은  $(Deg + 1)^3$ 이며,  $\underline{x}$ 는  $n - 4$ 개의 2차원 계산좌표로서 각 좌표 값은 동일차수의 2차원 라그랑지안 형상함수에서 사용되는 각 절점의 좌표 값과 일치한다. 이러한 계산에서  $N_5, N_7$  등은 기함수,  $N_6, N_8$  등은 우함수임을 이용하면 편리하며, 고정 경계 조건이 일정하면 꼭지점을 제외한 자유도 값은 0이 됨을 알 수 있다.

2.3 계층 요소의 계산에

계층 요소의 계산과정을 간단히 보기 위하여 아래의 3차원 푸아송(Poisson) 방정식을 이용하기로 한다.

$$-\nabla^2 u = f(x, y, z) \quad (7)$$

갈러킨 가중 잔여법(Galerkin weighted residual method)을 식(7)에 적용하고 임의의 요소에 대하여 정리하면 아래와 같다.

$$\oint \psi \cdot \nabla u \cdot \hat{n} d\Gamma - \int \nabla \psi \cdot \nabla u d\Omega = \int f(x, y, z) d\Omega \quad (8)$$

여기서,

- $\psi \equiv$  요소에 적용되는 계층 형상함수
- $\hat{n} \equiv$  요소의외부 향하는 단위 법선 벡터
- $\Gamma \equiv$  요소의 경계
- $\Omega \equiv$  요소의 내부

식(8)에서 좌변 2항의 계산과정을 3차원 요소

의 경우에 대하여 살펴보면 다음과 같다.

$$\int \nabla \psi \cdot \nabla u d\Omega = \left[ \int \int \int \nabla \psi \cdot \nabla \psi^T dx dy dz \right] \cdot U \quad (9)$$

여기서  $U$ 는 요소의 자유도 벡터이다. 물리 좌표계  $(x, y, z)$ 와 계산 좌표계  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ 와의 변환을 고려하면 식(9)의 우변 피적분함수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^T &= \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial x} \right) \cdot \\ &\left( \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial x} \right) \\ &+ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial y} \right) \cdot \\ &\left( \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial y} \right) \\ &+ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial z} \right) \cdot \\ &\left( \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)에서  $\partial \psi / \partial \eta_i$ 는 계층함수를 이용하지만,  $\partial \eta_i / \partial x, \partial \eta_i / \partial y, \partial \eta_i / \partial z$ 는 요소의 기하학적 성질에 관련됨으로 라그랑지안 함수를 사용하여 구해야 함이 타당하다. 마찬가지로 미소면적  $dx dy dz = [J] d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3$  ( $[J]$ 는 변환 Jacobian)의 계산에도 라그랑지안 함수를 사용하여야 한다.

3. 고차 요소 해의 수렴성

이차원 모델로서 먼저 고정 경계 조건이 변하지 않는 아래와 같은 푸아송 방정식을 선택하였다.

$$-\nabla^2 u = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (11)$$

경계 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{on sides } x = 1 \text{ and } y = 1 \\ \partial u / \partial n &= 0 \quad \text{on sides } x = 0 \text{ and } y = 0 \end{aligned}$$

식 (11) 에 대한 엄밀해는 Reddy<sup>(3)</sup> 에 있으며,  $(x, y) = (0.2, 0.2)$  와  $(0.8, 0.8)$  의 영역에서 16 개 의 등 간격에서 표본을 선택하였다.

Fig. 3 에서 수렴 경사를 관찰하면, 2 차 요소에 대한 경사는 선형 요소에 대한 것의 약 1.5 배, 3 차 요소의 수렴 경사는 선형 요소에 대하여 약 2 배가 됨을 알 수 있다. 이 경우에는 아직 요소를 세분화하더라도 고차 요소해의 수렴성을 향상시킬 수 있음을 볼 수 있다.

변수형 고정 경계 조건에 대한 계층 요소 해의 수렴성을 보기 위하여, Reddy<sup>(3)</sup> 를 참조하여 아래와 같은 열전도 방정식을 이용하기로 한다.

$$\nabla^2 T = 0.0, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2 \quad (12)$$

여기서

$$\begin{aligned} T &= 0 \text{ on sides } x = 3, \\ \partial T / \partial n &= 0 \text{ on sides } x = 0 \text{ and } y = 0 \text{ and} \\ T &= 100 \text{ Cos}(\pi x / 6.) \text{ on sides } y = 2 \end{aligned}$$

이다.

Fig. 4 에 해의 수렴성을 5차 (quintic) 요소까지 나타내었다. 이 경우에도 3차 요소까지는 Fig. 3 에 나타낸 수렴성과 비슷한 현상을 볼 수 있으나, 4 차나 5 차 요소의 해는 요소 수를 증가시키더라도 더 이상 오차를 감소시킬 수가 없다. 이는 4 차나 5 차 요소의 경우에는 작은 수의 요소로서 이미 수렴하였음을 의미한다. 4 개의 5 차 요소의 정밀도에 해당되는 선형 요소의 해를 구하기 위하여 약 백만 개 이상의 요소가 필요함을 예측할 수 있다.

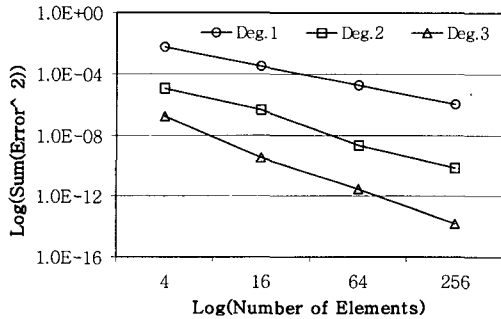


Fig. 3 Error plots for two dimensional Poisson problem

#### 4. 2 차원 유동 계산에 적용

이차원 유동 계산을 위한 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} -\nu \nabla^2 u + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= f_u \\ -\nu \nabla^2 v + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= f_v \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서  $u, v, p$  그리고  $\nu$  는 각각  $x-, y-$  방향의 속도, 압력 그리고 동점성계수이다. 위의 방정식에 적절한 가중함수(weighting function)와 보간함수를 취하여 내적하면 갈라진 잔여법에 의하여 아래의 비선형 연립 대수 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} A_{11} \cdot U + A_{12} \cdot V + A_{13} \cdot P &= R_1 \\ A_{21} \cdot U + A_{22} \cdot V + A_{23} \cdot P &= R_2 \\ A_{31} \cdot U + A_{32} \cdot V &= R_3 \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $A_{11}, \dots, A_{32}$  들은 미지수  $U, V$  및  $P$  들에 대한 좌변 행렬들이며,  $R_1, R_2$  그리고  $R_3$  들은 중력항 등과 경계조건 처리에 의하여 형성된 우변 벡터들이다. 식 (14) 의 해에 대한 안정성 및 수렴성은 많은 연구자들의 관심 대상이었다. 유한요소적 관점에서의 수치해에 대한 존재 및 수렴에 대한 조건으로는 LBB 조건이 있으며, 이는 압력해의 차수는 속도해의 차수보다 한 단계 낮아야 한다는 것이다. 이를 수행하기 위해서는 일

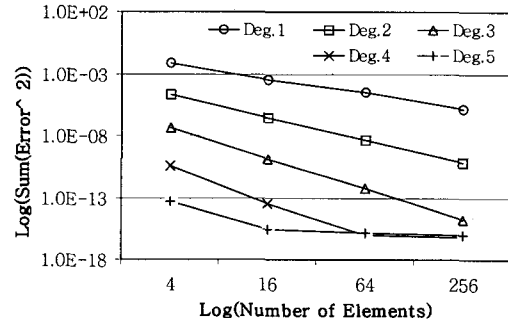


Fig. 4 Error plots for two dimensional heat conduction case

반적으로 속도와 압력에 대한 별개의 격자계를 구성해야 하지만, 이 연구에서는 LBB 조건을 만족시키기 위하여 계층요소의 자유도 특성, 즉

- 1) 저차의 자유도에 대한 기저함수는 고차의 자유도의 것에 포함됨과
- 2) 고차 (2차 이상)의 기저함수에 대한 계수는 변이나 면의 접선 성분의 고계 도함수로서 구성됨을 이용하기로 한다.

따라서 위의 특성 1)에 의하면 최고차의 자유도를 제거하더라도 나머지 System, 즉 식 (14)에 영향을 미치지 않음을 알 수 있다. 또한 이를 수행하기 위하여 특성 2)를 이용하기로 한다. 이는 압력 변수에 대한 최고차의 자유도 값을 "0"으로 구속시킴으로서 압력 변수에 대한 차수를 속도 변수보다 적어도 한 단계 낮출 수 있다. 압력 변수에 대한 접선 방향의 고계 도함수의 값을 "0"으로 구속함은 압력은 속도보다 접선 방향으로 더 완만하게 변화함을 의미하며, 물리적으로도 타당성이 있다.

#### 4.1 혼합 벌칙함수 (Mixed Penalty Function)

##### 접근법

식 (14)를 그대로 풀기 위해서는 행렬  $A_{33}$ 가 0인 관계로 가우스 소거법을 이용한 피보팅을 해야 되며, 이 경우 자유도수가 증가함에 따라 좌변 행렬이 매우 커지게 되어 별도의 풀이법을 고려해야 된다. 이 경우, 속도와 압력을 별개로 풀 수 있는 분리해법(Segregated iterative procedure)<sup>(11)</sup>의 적용을 고려할 수 있으나 계층요소의 차수가 3차 이상이 될 경우, 수렴성이 매우 저하되어 사용하기가 어렵다.

다음으로는 벌칙 함수 (penalty function) 방법을 고려해 볼 수 있으며, 이는 압력과 연속방정식이 penalty parameter에 의하여 구속되어야 한다는 전제하에 벌칙 함수식 (penalty functional)에 변분법(variational method)를 도입함으로써 속도를 구하는 방법이다. 즉, 연속방정식이 압력에 의하여 아래와 같이 벌칙화 된다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma p = 0 \quad (|\gamma| \ll 1) \quad (15)$$

위의 식 (15)를 운동량 방정식에 적용하면 압

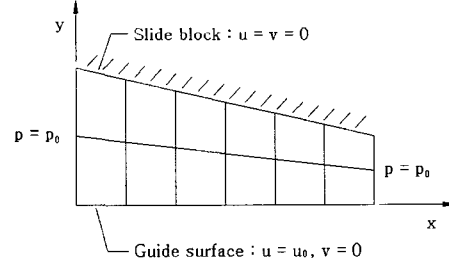


Fig. 5 Domain definition for Stokes problem

력항이 소거될 수 있으며, 새로운 운동량 방정식에 갈러킨 잔여법을 적용하여 속도장만을 계산할 수 있다. 그러나 이 방법 또한 적절한 해를 주지 못한다. 즉, 어떤 형태론은 LBB 안정화 조건을 만족시켜야 하며 이 경우 일반적으로 벌칙항을 감소 적분함으로서 어느 정도 만족시킬 수 있으나, 이 또한 3차 요소이상에서는 적절한 해를 구하기 어려웠다.

벌칙 함수 방법이 이렇게 악조건(ill-conditioning) 행렬을 야기시키는 이유가 압력식 혹은 벌칙화된 연속방정식을 제거하여 LBB 조건을 적절히 만족시키지 못함에 있을 수 있다는 가정 하에, 이 연구에서는 행렬  $A_{33}$ 의 대각선에 아주 작은 수를 도입함으로써, 근본적으로는 벌칙 함수 방법과 같으나 속도와 압력을 동시에 구하고자 하였다.<sup>(9)</sup> 이를 위하여 본 논문에서는 식 (15)를 연속방정식 대신에 사용함으로써, 다음과 같은 압력항을 대각행렬  $A_{33}$ 에 첨가하였다.

$$A_{33} = \sum_{\text{elem}} \int \gamma \psi \cdot \psi^T d\Omega \quad (16)$$

여기서  $\gamma$ 는 임의의 penalty parameter ( $10^{-7} \sim 10^{-10}$ )이며,  $\psi$ 는 요소의 계층형상 함수이다. 행렬  $A_{33}$ 의 대각 요소가 0이 아니면 메모리를 효율적으로 사용할 수 있는 직접 풀이법을 사용할 수 있으며, 본 연구에는 skyline (혹은 profile) 방법을 이용하였다.

#### 4.2 Stokes 유동

먼저 Stokes 유동<sup>(8)</sup>에 대한 영역 및 경계 조건 정의는 Fig. 5에 하였으며, Table 2에는 혼합 벌칙

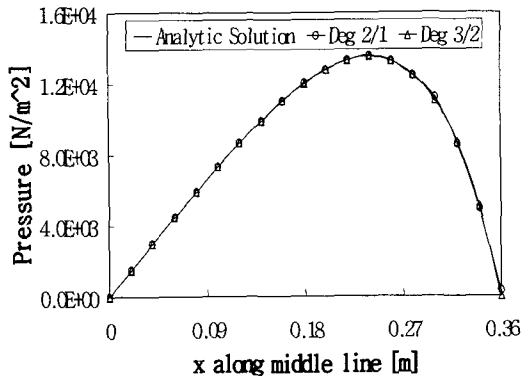


Fig. 6 Pressure plots for the Stokes problem from  $12 \times 4$  elements

Table 2 Percent error for velocity and pressure components from the mixed penalty solver

Mesh	Deg(2/1)		Deg(3/2)	
	u (%)	p (%)	u (%)	p (%)
$6 \times 2$	0.502	0.988	0.241	0.177
$9 \times 3$	0.573	0.512	0.173	0.059
$12 \times 4$	0.439	0.379	0.134	0.001

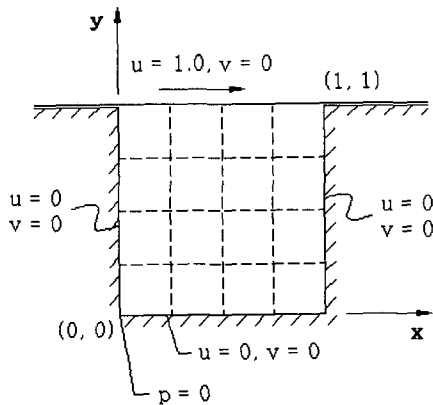
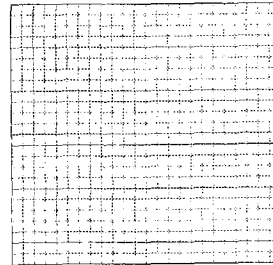
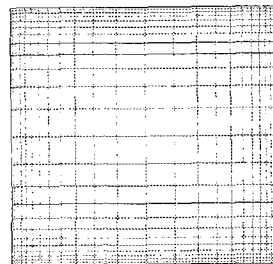


Fig. 7 Domain and boundary conditions for lid-driven cavity problem

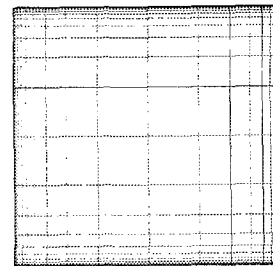
함수 접근법에 의한 속도와 압력에 대한 평균적 백분율 오차를 나타내었다. 이에 의하면 요소를 세분화할수록 모두 수렴하고 있음을 알 수 있으며, 특히 압력성분은 고차일수록 수렴 성이 월등함을 알 수 있다. 특이할 점은 동일한 요소의 수에서 고차화되면 속도성분의 오차는 약간 증가하는 반면에 압력성분의 오차는 약 10 배 정도 감소



(a)



(b)



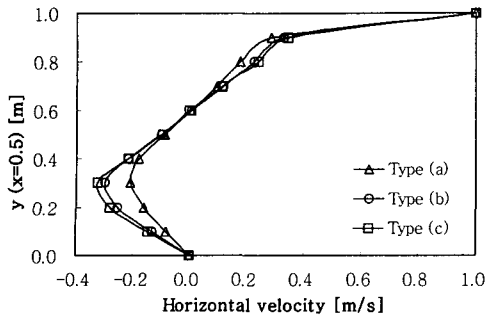
(c)

Fig. 8 Three mesh types ( $24 \times 24$  elements)

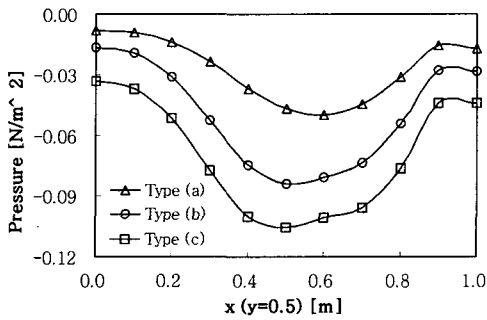
함을 발견할 수 있다. 이는 압력의 변화가 선형적이 아님에 기인한다고 볼 수 있다. Fig. 6 에는 중간 선에 대한 x-방향으로의 압력값을 Deg (2/1) 과 Deg (3/2) 에 대한  $12 \times 4$  요소에 대하여 도시하였으며, 엄밀해와 대체적으로 일치함을 보여주고 있다. Table 2 에 나타낸 백분율 오차는 아래 식 (17) 에 정의하였다.

$$\% \text{ error} = \frac{1}{N} \sum \left| \frac{u - u_{\text{exact}}}{u_{\text{exact}}} \right| \times 100 \quad (17)$$

(N : number of sample points)



(a)



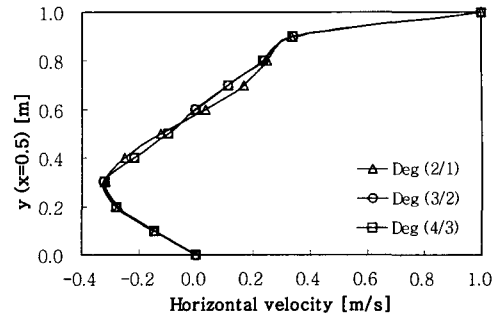
(b)

Fig. 9 Mixed penalty approach for Deg (3/2) on different meshes (a) Horizontal velocity, (b) Pressure

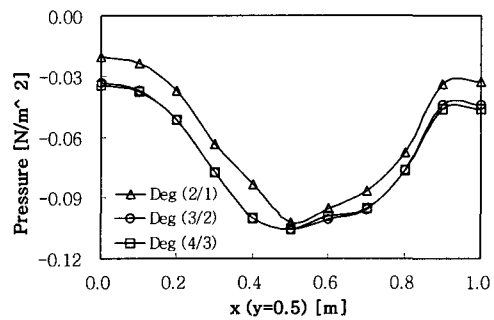
4.3 Cavity 유동

Cavity 유동<sup>(7,10)</sup>에 대한 영역 및 경계조건의 정의는 Fig. 7에 하였다. 여기서 압력에 대한 기준값으로 좌측 하단 모서리 점에 "0"의 값을 취하였다. 이 유동은 우측 상단에 특이점이 존재하는 관계로 해는 격자 형상에 많이 좌우된다.

본 연구에서는 Fig. 8에 나타낸 세 가지 격자에 대하여 고찰해 보기로 하며, Re 수는 400으로 하였다. Fig. 9에는 Cavity 유동에 대한 Deg (3/2)에 대한 해의 추세를 세 가지 격자에 대하여 보여주고 있으며, 수평 방향의 속도 성분을 중심 수직선에 따라 도출한 값과 중심 수평선에 따른 압력값을 각각 (a)와 (b)에 도시하였다. 이 경우 해들의 추세는 경계층에 세분화된 격자에 대한 해로 수렴함을 볼 수 있다. Fig. 10에는 요소의 차수를 변화시킬 경우, 해의 변화를 격자형태 (c)에 대하여 관찰하기 위한 것이다. 이 경우 2차 요소의 해는 3차 및 4차 요소의 해와 상이함을 볼 수 있으며, 특히 압력해의 경우에는 상당한 차이를 보여주고 있다. 3차와 4차 요소의 해는 거의 동일



(a)



(b)

Fig. 10 Plots of solutions from the mixed penalty approach for different degrees (a) Horizontal velocity, (b) Pressure

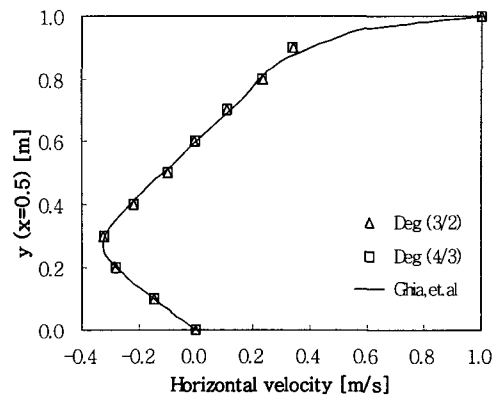


Fig. 11 A comparison of velocity solutions with Ghia, Ghia and Shin<sup>(7)</sup>

함에서 3차 요소가 최적이라 생각된다. Fig. 11에는 표준해로 알려진 Ghia 등<sup>(7)</sup>의 속도해와 본 연구의 3차 및 4차 요소의 속도해를 비교하였으며, 대체로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.



## 5. 결 론

일반적으로 유한요소해석에서 요소의 세분화는 기하급수적인 자유도의 증가를 수반하며, 특히 1차 요소만을 사용할 경우 충분한 정도(accuracy)를 얻기 위해서 엄청난 수의 요소가 요구된다. 보다 정밀한 해가 요구된다면 고차 요소가 보다 효과적이며, 특히 계층 요소를 사용하더라도 해의 정밀성 및 수렴성을 저해하지 않음을 알 수 있었다.

유동해석을 위하여 계층 요소를 사용할 경우, 저차의 계층 함수들은 고차의 것에 포함되어있는 관계로 요소 해의 차수 선택이 용이함을 이용하며, 동일 격자계 내에서도 속도와 압력에 다른 차수를 적용할 수 있다. 이렇게 함으로서 LBB 조건을 용이하게 만족시킬 수 있음을 보았으며, 또한 적절한 고차화를 통하여 압력해의 수렴성이 월등히 증가됨을 보았다. 이는 추후 국부적 혹은 적응적 고차화를 통한 해의 질적 향상에 긍정적이라고 본다.

## 참고문헌

- (1) Zienkiewicz, O. C., de S. R., Gago, J. P. and Kelly, D. W., 1983, "The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis," *Computers and Structures*, Vol. 16, pp. 53~65.
- (2) Robinson, John, 1986, "An Introduction to Hierarchical Displacement Elements and the Adaptive Technique," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 2, No. 1, pp. 377~388.
- (3) Reddy, J. N., 1985, *An Introduction of the Finite Element Method*, McGraw-Hill, pp. 210~218.
- (4) Stephens, Rod, 1998, *Inside Secrets Programming VB Graphics*, John Wiley & Sons, Inc.
- (5) Kim, J. W., 1999, "A Study on the Development of a Three Dimensional Structured Finite Elements Generation Code," *Journal of Ocean Eng. and Tech.*, Vol. 13, No. 1, pp. 11~17.
- (6) Demkowicz, L., 1988, "An Adaptive h-p Finite Element Strategy for Two Dimensional Boundary Value Problems: A Theory Manual," *COMCO Report*, Austin, Texas.
- (7) Ghia, U., Ghia, K. N., and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. of Comp. Physics*, Vol. 48, pp. 387~411
- (8) Reddy, J. N., Gartling, D. K., 1994, *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, CRC press, Inc., pp. 191~195.
- (9) Reddy, J. N., 1986, *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill, pp. 457~459
- (10) Kang, D. J., Bea, S. S., 2000, "Modification of QUICK scheme for Unstructured Grid Finite Volume Method," *Transactions of the KSME*, Vol. 24, No. 9, pp. 1148~1156.
- (11) Haroutunian, V., Engelman, M.S. and Hasbani, I., 1993, "Segregated Finite Element Algorithms for the Numerical Solution of Large-Scale Incompressible Flow Problems," *Int. J. for Num. Mtd. in Fluids*, Vol. 17, pp. 323~ 348.