

## 회전축 정렬불량을 가지는 유연회전디스크의 유한요소법을 이용한 시간응답해석

허진욱\* · 정진태†

(2002년 2월 18일 접수, 2002년 7월 11일 심사완료)

### Finite Element Analysis for Time Response of a Flexible Spinning Disk with Translating Misalignment

Jin Wook Heo and Jintai Chung

**Key Words :** Spinning Disk(회전디스크), Misalignment(축정렬불량), Finite Element Method(유한요소법), Time Response(시간응답)

#### Abstract

Using the finite element method, this study investigates the dynamic time responses of a flexible spinning disk of which axis of rotation is misaligned with the axis of symmetry. The misalignment between the axes of symmetry and rotation is one of the major vibration sources in optical disk drives such as CD-ROM, CD-R, CD-RW and DVD drives. Based upon the Kirchhoff plate theory and the von-Karman strain theory, three coupled equations of motion for the misaligned disk are obtained: two of the equations are for the in-plane motion while the other is for the out-of-plane motion. After transforming these equations into two weak forms for the in-plane and out-of-plane motions, the weak forms are discretized by using newly defined annular sector finite elements. Applying the generalized- $\alpha$  time integration method to the discretized equations, the time responses and the displacement distributions are computed and then the effects of the misalignment on the responses and the distributions are analyzed. The computation results show that the misalignment has an influence on the magnitudes of the in-plane displacements and it results in the amplitude modulation or the beat phenomenon in the time responses of the out-of-plane displacement.

#### 1. 서론

지식 정보, 특히 디지털화된 정보의 저장 및 재생에는 여러 가지 다양한 장치가 개발되어 쓰이고 있다. 이 중 광디스크 드라이브(ODD; CD-ROM, CD-RW, DVD 등)는 필요 시에만 드라이브에 광디스크를 장착할 수 있도록 되어 있어 디스크 장착 조건이 매번 바뀔 수 있으므로 회전중심과 기하중심을 일치시키지 못하는 경우가 발생한다. 따라서 이에 대한 연구가 필요하다.

디스크에 대한 연구는 단순한 디스크의 자유진동과 동적 안정성 해석을 시작으로,<sup>(1-3)</sup> 점차적으로 실제 발생하는 문제를 포함하여 해석하게 되었다. 컴퓨터 하드 디스크 드라이브에서 헤드와 원

판 사이의 상호작용을 규명하기 위해 횡하중을 받는 회전원판에 대한 연구가 수행되었고,<sup>(4)</sup> 상하방향의 운동이나 기울어짐(tilting)에 의한 강제운동이 있는 회전원판의 진동과 동적 안정성에 대한 해석이 이루어 졌다.<sup>(5)</sup> 한편, D'Alembert 원리 대신 Hamilton 원리에 바탕을 둔 변분방법에 의한 회전원판의 지배방정식을 체계적으로 유도하고, 이 과정에서 사용한 가정에 대한 고찰이 이루어졌다.<sup>(6)</sup> 그리고 각가속도가 존재하는 회전디스크의 지배방정식을 유도하고 이를 바탕으로 동적 안정성 및 시간응답을 해석하였다.<sup>(7)</sup> 최근에, 갤러킨법을 이용하여, 축정렬불량이 회전디스크의 고유진동수에 미치는 영향에 대하여 Chung 등<sup>(8)</sup>이 연구하였다. 이 연구에서 평면내변위는 정상상태에 있는 반면 평면외변위는 동적상태에 있다고 하고, 정상상태에 있는 평면내변위에 대한 엄밀해를 구하여 이를 평면외변위의 운동방정식에 대입함으로써 평면내변위와 평면외변위의 연성효과를 고려하였다. 비록 이 방법이 축정렬불량을 가지는 회전디스크의

\* 회원, 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학과

E-mail : jchung@hanyang.ac.kr

TEL: (031) 400-5287, FAX : (031) 406-5550

평면외변위에 대한 고유진동수를 계산하는 데에 있어서는 편리하지만, 평면내변위는 시간의 함수로 나타내어지지 않는다는 한계성을 가지고 있다. 만약 평면내변위와 평면외변위가 모두 동적인 상태에 있다는 가정 하에 얻어진 지배방정식을 사용하면, 평면내변위는 물론 평면외변위를 보다 정확하게 계산할 수 있을 것이다. 따라서, 평면내변위와 평면외변위가 동적인 상태에 있는 지배방정식이 요구된다.

본 연구에서는 회전축이 도심축과 일치하지 않는 유연 회전 디스크의 동적 시간응답을 유한요소법을 이용하여 분석할 것이다. 즉, 평면내변위와 평면외변위가 동적인 상태에 있다는 가정 하에 측정렬불량을 가지는 회전디스크의 삼차원 운동방정식을 해밀턴의 원리(Hamilton's principle)로부터 유도한다. 또한 이 방정식을 두 개의 완화된 방정식(weak form)으로 변환한 후, 본 연구에서 새롭게 정의한 부채꼴요소(annular sector finite element)를 이용하여 이산화한다. 이렇게 이산화된 방정식으로부터 고유치해석을 수행하고 기존의 해석결과<sup>(8)</sup>와 비교함으로써 이산화된 지배방정식을 검증한다. 그리고 이산화된 지배방정식에 일반화된- $\alpha$  시간적분법, (generalized- $\alpha$  time integration method)<sup>(12)</sup>을 적용함으로써 측정렬불량을 가지는 회전디스크의 동적시간응답을 계산하여 최종적으로 계산된 시간응답을 분석함으로써 측정렬불량이 시간응답에 미치는 영향을 분석할 것이다.

### 2. 운동방정식의 유도

Fig. 1 은 회전디스크가 기하학적 중심 C와 일치하지 않는 회전중심 O를 중심으로 회전하는 즉 측정렬불량을 가지고 각속도  $\Omega$ 와 각가속도  $\dot{\Omega}$ 를 가지고 회전하는 것을 나타낸다. 측정렬불량의 크기는 C와 O의 거리  $\epsilon$ 로 주어진다. 이 때 회전디스크는 두께  $h$ 와 단위부피당밀도  $\rho$ , 영률  $E$ , 프와송비  $\nu$ 를 가지며 기하학적 중심과 질량중심이 일치하는 균질(homogeneous)인 것으로 가정한다. 또한, 디스크의 내반경  $r=a$ 에서 고정되어 있고 외반경  $r=b$ 에서 구속되어 있지 않다. 디스크의 운동을 표현하기 위해 본 연구에서는 기하학적 중심 C에 원점을 가지고 디스크에 고정되어 디스크와 함께 회전하는  $x-y$  좌표계를 사용한다. 그러므로, 그림에서 단위벡터  $e_r$ 과  $e_\theta$ 는 디스크와 함께 회전하는 벡터이며, 좌표  $r$ 과  $\theta$ 는  $x-y$ 좌표계에서 측정된다.

유연회전디스크의 변위는 Kirchhoff 판원리(plate theory)로부터 임의의 시간에 대해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_r(r, \theta, z, t) = u(r, \theta, t) - z \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r}$$

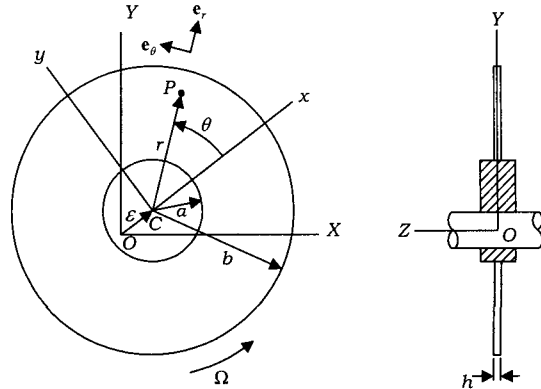


Fig. 1 Configuration of spinning disk with misalignment

$$u_\theta(r, \theta, z, t) = v(r, \theta, t) - z \frac{\partial w(r, \theta, t)}{r \partial \theta} \quad (1)$$

$$u_z(r, \theta, z, t) = w(r, \theta, t)$$

여기서  $u_r$ 과  $u_\theta$ ,  $u_z$ 는 각각 디스크상의 한 점에서의  $r$ -과  $\theta$ -,  $z$ -방향으로의 변위를 나타내고,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ 는 디스크 중립면상에 존재하는 점의 각 방향으로의 변위를 나타낸다. 기존의 연구<sup>(8)</sup>에서는  $u$ 와  $v$ 는 시간의 함수가 아니며 오직  $w$ 만이 시간의 함수로 가정을 하였지만, 본 연구에서는  $u$ ,  $v$ ,  $w$  모두  $r$ 과  $\theta$ 의 함수임은 물론 시간  $t$ 의 함수로 가정한다.

평면내변위  $u$ 와  $v$ 가 평면외변위  $w$ 와 연성되는 효과를 고려하기 위해 von-Karman 응력-변형률 이론<sup>(9)</sup>을 적용한다. 이 경우 변형률을 나타내는 벡터  $\epsilon$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_p^L + \epsilon_p^N \\ \epsilon_b^L \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서

$$\epsilon_p^L = \left\{ \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}, \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right\}^T$$

$$\epsilon_p^N = \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2, \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right\}^T$$

$$\epsilon_b^L = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2}, -2 \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \right\}^T \quad (3)$$

Kirchhoff 판이론(plate theory)과 von-Karman 변형률이론을 바탕으로 회전디스크의 변형에너지와 운동에너지를 구하여 해밀턴의 원리(Hamilton's principle)에 적용하면 다음과 같이 측정렬불량을 가진 회전디스크의 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\rho h \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u - \dot{\Omega} v \right) - \left( \frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{\partial q_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{q_r - q_\theta}{r} \right) = \rho h (r\Omega^2 + \alpha\Omega^2 \cos\theta - \alpha\dot{\Omega} \sin\theta) + P_r \quad (4)$$

$$\rho h \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 v + \dot{\Omega} u \right) - \left( \frac{\partial q_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial q_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{q_{r\theta}}{r} \right)$$

$$= -\rho h(r\dot{\Omega} + \dot{\epsilon}\Omega^2 \sin\theta + \dot{\epsilon}\Omega \cos\theta) + P_\theta \quad (5)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nabla^4 w - \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( q_r \frac{\partial w}{\partial r} + q_{r\theta} \frac{\partial w}{r\partial\theta} \right) \right] + \frac{\partial}{r\partial\theta} \left( q_\theta \frac{\partial w}{r\partial\theta} + q_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\} = P_z \quad (6)$$

여기서,  $P_r$ ,  $P_\theta$ ,  $P_z$  는 각 방향으로 작용하는 분포력을 나타내고,  $q_r$ ,  $q_\theta$ ,  $q_{r\theta}$  는 각 방향의 내부응력을 나타낸다. 즉,

$$q_r = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left( \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial\theta} \right) \right], q_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial\theta} \right)$$

$$q_{r\theta} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (7)$$

$D$  는 디스크의 굽힘 강성(bending rigidity)을 나타내고,  $\nabla^2$  는 bi-harmonic 연산자이다.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2} \quad (8)$$

디스크의 내주는 고정되어 있고, 외주는 자유단이므로 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{at } r = a$$

$$q_r = q_{r\theta} = m_r = -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial r} + \frac{\partial m_{r\theta}}{r\partial\theta} = 0 \quad \text{at } r = b \quad (9)$$

여기서,

$$m_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{\partial w}{r\partial r} + \frac{\partial w}{r^2\partial\theta} \right) \right]$$

$$m_{r\theta} = -(1-\nu)D \left( \frac{\partial^2 w}{r\partial r\partial\theta} - \frac{\partial w}{r^2\partial\theta} \right) \quad (10)$$

식 (4)-(6)에서 평면내변위에 대한 식 (4)와 (5)는 선형의 방정식이며 평면내변위  $u$  와  $v$  가 서로 연성되어 있다. 반면,  $q_r$  과  $q_\theta$ ,  $q_{r\theta}$  는  $u$  와  $v$  의 함수이므로, 평면외변위에 대한 식 (6)은 평면외변위  $w$  가 평면내변위  $u$ ,  $v$  와 연성된 비선형의 방정식이다. 그러므로, 축정렬불량  $\epsilon$  는 평면내에 존재하지만 평면내변위  $u$  와  $v$  뿐 아니라 평면외변위  $w$  에도 영향을 미친다.

### 3. 유한요소법의 적용

유도된 지배방정식으로부터 축정렬불량을 가진 회전디스크의 분석을 위해 유한요소법을 사용한다. 유한요소법의 적용은, 지배방정식과 경계조건으로부터 완화된 방정식(weak form)을 유도하고 이에 유한요소법을 적용하여 공간에 대해 이산화함으로써 지배방정식을 행렬-벡터 방정식으로 유도하는 순서로 이루어진다.

먼저, 완화된 방정식의 유도에서, 식 (4)와 (5)는 평면내변위만이 연성되어 있으므로 두 식의 완화된 방정식은 하나의 식으로 묶을 수 있다.  $u, v, w$  를 각 방향의 시도함수(trial function)라 하고,  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  를 각 방향의 가중함수(weighting

function)이라 하면, 완화된 방정식은 다음과 같다.

$$\rho h \int_A \bar{u}_p^T \frac{\partial^2 \mathbf{u}_p}{\partial t^2} dA + 2\Omega \rho h \int_A \bar{u}_p^T \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} dA - \Omega^2 \rho h \int_A \bar{u}_p^T \mathbf{u}_p dA$$

$$+ \Omega \rho h \int_A \bar{u}_p^T \mathbf{S} \mathbf{u}_p dA + \int_A (\bar{\epsilon}_p^L)^T \mathbf{D}_p \epsilon_p^L dA = \int_A \bar{u}_p^T \mathbf{f}_p dA, \quad (11)$$

$$\rho h \int_A \bar{w} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dA + \int_A (\bar{\epsilon}_b^L)^T \mathbf{D}_b \epsilon_b^L dA + \int_A \bar{\theta}^T \mathbf{Q} \theta dA = \int_A \bar{w} P_z dA \quad (12)$$

여기서,

$$\mathbf{u}_p = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}}_p = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_p = \begin{Bmatrix} \rho h \Omega^2 (r + \epsilon \cos\theta) - \rho h \dot{\epsilon} \Omega \sin\theta + P_r \\ -\rho h \dot{\epsilon} \Omega^2 \sin\theta - \rho h \dot{\epsilon} \Omega (r + \epsilon \cos\theta) + P_\theta \end{Bmatrix}$$

$$\theta = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{r\partial\theta} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \\ \frac{\partial \bar{w}}{r\partial\theta} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_r & q_{r\theta} \\ q_{r\theta} & q_\theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

완화된 방정식으로부터 이산화된 행렬-벡터 방정식을 유도하기 위해 Fig. 2 와 같이, 본 연구에서 제한한 부채꼴요소(annular sector element)를 이용하여 유연회전디스크를 이산화한다. 부채꼴요소는 4 절점-사각형요소를 극좌표로 나타낸 것이므로, 극좌표에서 직교좌표로 변환한다면 쉽게 사각형요소로 사상(mapping)된다. 그리고, 3 절점-삼각형요소나 4 절점-사각형요소와 같은 기존의 요소들이 곡선 경계부분을 이산화할 때 나타내는 오차가 없으므로 부채꼴요소는 이들보다 효율적이다. 요소중심을 극좌표로  $r_c$  와  $\theta_c$  라 할 때, 요소 위의 임의의 점은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$r = r_c + \frac{\Delta r}{2} \xi, \quad \theta = \theta_c + \frac{\Delta\theta}{2} \eta$$

$$\text{for } 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (14)$$

여기서  $\xi$  와  $\eta$  는 매개공간에서의 좌표이고,  $\Delta r$  과  $\Delta\theta$  는 요소의 크기를 정의한다.

요소  $e$  안의 임의의 점에서의 평면내변위와 평면외변위는  $r$  과  $\theta$  의 다항식으로 근사화된다. 즉, 4 절점 부채꼴요소의 평면내변위의 근사를 위해서 Lagrange 보간함수<sup>(10)</sup>를 사용하고, 부채꼴요소가  $C^1$  연속성과 0 비틀림조건<sup>(10)</sup>을 만족할 수 있도록

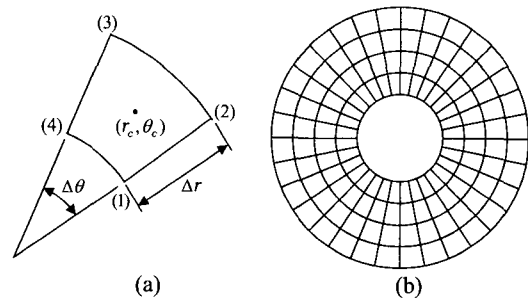


Fig. 2 Finite element model: (a) the annular sector element; and (b) construction of a finite element model

평면외변위의 근사를 위해서 Hermite 보간함수<sup>(10)</sup>를 사용한다. 그러므로, 시도함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{N}_p^T \mathbf{d}_p^e, \quad w = \mathbf{N}_b^T \mathbf{d}_b^e \quad (15)$$

여기서,

$$\mathbf{d}_p^e = \{u_1, v_1, \dots, u_4, v_4\}^T \quad (16)$$

$$\mathbf{d}_b^e = \{w_1, (\partial w / \partial r)_1, (\partial w / \partial \theta)_1, (\partial^2 w / \partial r \partial \theta)_1, \dots, w_4, (\partial w / \partial r)_4, (\partial w / \partial \theta)_4, (\partial^2 w / \partial r \partial \theta)_4\}^T \quad (17)$$

즉,  $\mathbf{N}^p$  와  $\mathbf{N}^b$  는 각각 평면내변위와 평면외변위를 위한 형상함수이다. 가중함수는 시도함수와 같은 형상함수를 가지나 그 계수는 임의의 값  $\bar{\mathbf{d}}_p^e$  와  $\bar{\mathbf{d}}_b^e$  을 갖는다.

$$\bar{\mathbf{u}}_p = \mathbf{N}_p^T \bar{\mathbf{d}}_p^e, \quad \bar{w} = \mathbf{N}_b^T \bar{\mathbf{d}}_b^e \quad (18)$$

여기서,

$$\bar{\mathbf{d}}_p^e = \{\bar{u}_1, \bar{v}_1, \dots, \bar{u}_4, \bar{v}_4\}^T$$

$$\bar{\mathbf{d}}_b^e = \{\bar{w}_1, (\partial \bar{w} / \partial r)_1, (\partial \bar{w} / \partial \theta)_1, (\partial^2 \bar{w} / \partial r \partial \theta)_1, \dots, \bar{w}_4, (\partial \bar{w} / \partial r)_4, (\partial \bar{w} / \partial \theta)_4, (\partial^2 \bar{w} / \partial r \partial \theta)_4\}^T \quad (19)$$

요소에서의 변형률도 각 노드점에서의 정보로 표현할 수 있다. 식 (15)의 변위를 식 (3)의 선형 변형률에 대입하면 선형 변형률은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p^L = \mathbf{B}_p \mathbf{d}_p^e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b^L = \mathbf{B}_b \mathbf{d}_b^e \quad (20)$$

여기서  $\mathbf{B}_p$  와  $\mathbf{B}_b$  는  $3 \times 8$  과  $3 \times 16$  행렬로써  $r$  과  $\theta$  의 함수이다. 이와 유사하게, 식 (18)의 두번째 식을 식 (12)의  $\boldsymbol{\theta}$  에 관한 식에 대입하면,  $\boldsymbol{\theta}$  행렬은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{N}_\theta^T \bar{\mathbf{d}}_p^e \quad (21)$$

여기서  $\mathbf{N}_\theta$  는  $r$  과  $\theta$  로 이루어진  $2 \times 16$  행렬이다.

한편, 가중함수에 대한  $\boldsymbol{\varepsilon}_p^L$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_b^L$ ,  $\boldsymbol{\theta}$  는

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^L = \mathbf{B}_p \bar{\mathbf{d}}_p^e, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_b^L = \mathbf{B}_b \bar{\mathbf{d}}_b^e, \quad \bar{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{N}_\theta^T \bar{\mathbf{d}}_p^e \quad (22)$$

로 주어진다. 제한된 부채꼴요소를 적용하면 다음과 같은 유한요소방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{e=1}^{N_e} (\bar{\mathbf{d}}_p^e)^T [\mathbf{m}_p^e \bar{\mathbf{d}}_p^e + 2\Omega \mathbf{g}_p^e \bar{\mathbf{d}}_p^e + (\mathbf{k}_p^e - \Omega^2 \mathbf{m}_p^e + \Omega \mathbf{g}_p^e) \bar{\mathbf{d}}_p^e] = \sum_{e=1}^{N_e} (\bar{\mathbf{d}}_p^e)^T \mathbf{f}_p^e \quad (23)$$

여기서,

$$\mathbf{m}_p^e = \rho h \int_{A_e} \mathbf{N}_p \mathbf{N}_p^T dA, \quad \mathbf{g}_p^e = \rho h \int_{A_e} \mathbf{N}_p \mathbf{S} \mathbf{N}_p^T dA$$

$$\mathbf{k}_p^e = \int_{A_e} \mathbf{B}_p^T \mathbf{D}_p \mathbf{B}_p dA, \quad \mathbf{f}_p^e = \int_{A_e} \mathbf{N}_p \mathbf{f}_p dA \quad (24)$$

평면외변위에 대한 이산화된 방정식을 유도할 수 있다.

$$\sum_{e=1}^{N_e} (\bar{\mathbf{d}}_b^e)^T [\mathbf{m}_b^e \bar{\mathbf{d}}_b^e + (\mathbf{k}_b^e + \mathbf{k}_\theta^e) \bar{\mathbf{d}}_b^e] = \sum_{e=1}^{N_e} (\bar{\mathbf{d}}_b^e)^T \mathbf{f}_b^e \quad (25)$$

여기서

$$\mathbf{m}_b^e = \rho h \int_{A_e} \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^T dA, \quad \mathbf{k}_b^e = \int_{A_e} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dA$$

$$\mathbf{k}_\theta^e = \int_{A_e} \mathbf{N}_\theta \mathbf{Q} \mathbf{N}_\theta^T dA, \quad \mathbf{f}_b^e = \int_{A_e} \mathbf{P}_2 \mathbf{N}_b dA \quad (26)$$

$\mathbf{k}_\theta^e$  는 회전에 의한 중립면상에 나타나는 멤브레인 응력 때문에 나타나는 행렬로써 평면내변위  $\mathbf{d}_p^e$  의 함수이다.

식 (23)과 식 (25)는 조합과정을 거쳐서 최종적인 행렬-벡터방정식으로 다음과 같이 유도된다.

$$\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{d}}_p + 2\Omega \mathbf{G}_p \dot{\mathbf{d}}_p + (\mathbf{K}_p - \Omega^2 \mathbf{M}_p + \Omega \mathbf{G}_p) \mathbf{d}_p = \mathbf{f}_p \quad (27)$$

$$\mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{d}}_b + [\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_\theta(\mathbf{d}_p)] \mathbf{d}_b = \mathbf{f}_b \quad (28)$$

다시한번,  $\mathbf{K}_\theta$  는 평면내변위  $\mathbf{d}_p$  의 함수이므로, 식 (28)은 엄밀히 말해서 비선형 방정식이다. 그러나,  $\mathbf{d}_p$  가 식 (27)로부터 먼저 유도되면, 식 (28)은 평면외변위 벡터  $\mathbf{d}_b$  에 대한 선형 방정식으로 다루어질 수 있다.

#### 4. 유한요소모델의 검증

축정렬불량을 가지는 회전디스크의 유한요소모델을 검증하기 위해 평면외변위에 대한 고유진동수를 구하여 수렴성을 조사하고 기존의 연구결과에서 얻어진 결과와 비교한다. 회전디스크가 외부에서 가해지는 힘이 없어서 정상상태에 있다고 가정할 때 평면내변위와 평면외변위의 동적평형위치를 각각  $\mathbf{d}_p^*$  와  $\mathbf{d}_b^*$  라 한다. 이 때, 평면외변위에 대한 평형위치는  $\mathbf{d}_b^* = \mathbf{0}$  이고, 평면내변위에 대한 평형위치  $\mathbf{d}_p^*$  는 다음 식에서 얻을 수 있다.

$$(\mathbf{K}_p - \Omega^2 \mathbf{M}_p) \mathbf{d}_p^* = \mathbf{f}_p \quad (29)$$

고유진동수는 평형위치 근방에서 선형화된 지배방정식으로부터 계산된다. 평면외변위의 자유진동을 고려할 때, 식 (28)의 선형화된 지배방정식은

$$\mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{d}}_b + [\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_\theta(\mathbf{d}_p^*)] \mathbf{d}_b = \mathbf{0} \quad (30)$$

이다. 여기서  $\mathbf{K}_\theta(\mathbf{d}_p^*)$  는  $\mathbf{K}_\theta(\mathbf{d}_p)$  의 평형위치에서의 접선행렬이다. 식 (30)의 해를

$$\mathbf{d}_b = \mathbf{X} e^{i\omega_n t}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (31)$$

라 가정하면, 회전디스크의 평면외진동에 대한 고유진동수  $\omega_n$  는 다음식으로부터 유도할 수 있다.

$$[\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_\theta(\mathbf{d}_p^*) - \omega_n^2 \mathbf{M}_b] \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (32)$$

축정렬불량을 가지는 회전디스크의 유한요소모델을 검증하기 위해, 식 (32)로부터 얻어진 고유진동수의 수렴성을 조사하고, 기존의 연구결과와 비교하였다. 본 연구에서 특별한 언급이 없는 한, 디스크의 물성치는  $b = 0.065$  m,  $h = 0.0012$  m,  $\rho = 1200$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $E = 65.5 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup> 로 한

**Table 1** Convergence characteristics of the natural frequencies (rad/s) for the out-of-plane motion when  $\Omega = \dot{\Omega} = 0$ ,  $a/b = 0.5$  and  $\varepsilon = 0$ 

Mode	M	N			
		8	16	24	32
(0,0)	4	261.5639	261.5639	261.5639	261.5639
	6	261.5391	261.5391	261.5391	261.5391
	8	261.5348	261.5348	261.5348	261.5348
	10	261.5336	261.5336	261.5336	261.5336
		Mote <sup>(11)</sup>		261.5329	
(0,1)	4	266.9062	266.9056	266.9055	266.9055
	6	266.8737	266.8731	266.8731	266.8731
	8	266.8680	266.8674	266.8674	266.8674
	10	266.8664	266.8658	266.8658	266.8658
		Mote <sup>(11)</sup>		266.8646	
(0,2)	4	295.4806	295.3449	295.3375	295.3362
	6	295.4205	295.2848	295.2773	295.2760
	8	295.4094	295.2737	295.2662	295.2650
	10	295.4063	295.2706	295.2631	295.2619
		Mote <sup>(11)</sup>		295.2590	
(0,3)	4	375.5433	373.0540	372.9067	372.8814
	6	375.4382	372.9483	372.8009	372.7756
	8	375.4177	372.9277	372.7803	372.7550
	10	375.4118	372.9217	372.7743	372.7491
		Mote <sup>(11)</sup>		372.7320	

**Table 2** Convergence characteristics of the out-of-plane natural frequencies (rad/s) for the disk with  $a/b = 3/13$ ,  $\Omega = 1000$  rad/s and  $\varepsilon/b = 0.2$ 

M	N	Mode				
		(0,0)	(0,1) <sub>s</sub>	(0,1) <sub>a</sub>	(0,2) <sub>s</sub>	(0,2) <sub>a</sub>
4	8	791.7123	1261.490	1131.064	1524.962	1525.478
	16	776.7704	1260.953	1131.056	1524.730	1525.432
	24	773.8691	1259.404	1131.055	1524.582	1525.095
	32	772.8428	1250.741	1130.310	1524.396	1524.924
	8	782.7980	1254.377	1125.420	1522.209	1522.768
6	16	767.4241	1253.827	1125.415	1521.914	1522.727
	24	764.4232	1252.237	1125.397	1521.826	1522.430
	32	763.3604	1243.314	1124.500	1521.637	1522.257
	8	778.7333	1251.274	1122.933	1520.579	1521.179
	16	763.0889	1250.718	1122.930	1520.260	1521.108
8	24	760.0267	1249.111	1122.906	1520.192	1520.839
	32	758.9416	1240.077	1121.940	1520.000	1520.665
	8	776.6247	1249.762	1121.686	1519.683	1520.309
	16	760.8172	1249.204	1121.683	1519.352	1520.220
	24	757.7184	1247.589	1121.657	1519.293	1519.967
10	32	756.6199	1238.495	1120.657	1519.100	1519.792
	[8]	767.8218	1234.090	1115.989	1511.689	1512.136

다.

우선, 축정렬불량이 없고, 회전속도가 없이 정지된, 즉  $\varepsilon = 0$  이고  $\Omega = \dot{\Omega} = 0$  일 때 반경비  $a/b = 0.5$  를 가지는 디스크의 고유진동수에 대한 수렴성을 조사한다. 반경방향과 원주방향의 유한요소 수를 각각  $M$  과  $N$  이라고 할 때, Table 1 은 고유진동수가  $M$  과  $N$  이 증가할수록 엄밀해<sup>(11)</sup>에 수렴함을 보여준다. Table 1 에서, 모드(m,n)은  $m$  개의 절점원(nodal circle)과  $n$  개의 절점직경(nodal diameter)을 나타낸다. 다음으로, 축정렬불량과 회

**Table 3** Convergence characteristics of the out-of-plane natural frequencies (rad/s) for the disk with  $a/b = 3/13$ ,  $\Omega = 1000$  rad/s and  $\varepsilon/b = 0.2$  when the in-plane equilibrium position is computed by ignoring the in-plane inertia term

M	N	Mode				
		(0,0)	(0,1) <sub>s</sub>	(0,1) <sub>a</sub>	(0,2) <sub>s</sub>	(0,2) <sub>a</sub>
4	8	799.1636	1245.208	1124.189	1517.194	1517.458
	16	786.6104	1244.741	1124.185	1516.928	1517.220
	24	784.1980	1243.391	1124.173	1516.790	1517.200
	32	783.3467	1235.796	1123.488	1516.763	1517.092
	8	790.5888	1237.871	1118.491	1514.387	1514.720
6	16	777.7293	1237.393	1118.490	1514.120	1514.483
	24	775.2456	1236.012	1118.464	1513.981	1514.380
	32	774.3681	1228.216	1117.648	1513.888	1514.354
	8	786.7168	1234.695	1115.997	1512.765	1513.129
	16	773.6605	1234.214	1115.997	1512.496	1512.891
8	24	771.1324	1232.820	1115.966	1512.355	1512.761
	32	770.2387	1224.936	1115.090	1512.238	1512.758
	8	784.7208	1233.152	1114.753	1511.880	1512.262
	16	771.5443	1232.669	1114.752	1511.609	1512.023
	24	768.9894	1231.269	1114.719	1511.468	1511.892
10	32	768.0859	1223.337	1113.813	1511.338	1511.874
	[8]	767.8218	1234.090	1115.989	1511.689	1512.136

전속도를 가지는 경우 반경비  $a/b = 3/13$  의 회전 디스크의 고유진동수에 대하여 수렴성을 조사하였다. 각속도  $\Omega = 1000$  rad/s 이고 축정렬불량  $\varepsilon/b = 0.2$  일 때, 고유진동수의 수렴성은 Table 2 에 나타내었다. 여기서  $s$  와  $a$  는 각각 대칭과 비대칭 모드를 나타낸다. Table 2 에서, 고유진동수는 유한 요소의 수가 증가할수록 기존의 연구결과<sup>(8)</sup>에 수렴하는 것을 보여준다. 여기서 수렴된 고유진동수가 기존의 연구결과와 약간의 차이를 나타내는 것은 기존의 연구에서 평면내변위의 관성(in-plane inertia term)을 무시하고 평면내 응력 평형식으로부터 평면내변위를 구하기 때문이다. 만약 본 연구에서, 식 (29) 대신, 평면내변위의 관성을 무시하고  $\mathbf{K}_p \mathbf{d}_p^* = \mathbf{f}_p$  로부터 평면내변위의 평형위치를 계산한다면 고유진동수는 Table 3 과 같이 기존의 연구결과<sup>(8)</sup>에 수렴한다. 따라서, Table 3 에 나타낸 고유진동수보다는 Table 2 에 나타낸 고유진동수가 더 정확하다고 할 수 있다.

## 5. 동적 시간응답해석

회전축 정렬 불량을 가진 회전디스크의 동적 시간응답을 식 (27)과 (28)에 일반화된- $\alpha$  시간적분법을 적용함으로써 수치적으로 계산한다. 이 방법은 다른 방법이 해결하지 못한 물리적 의미가 없는 고주파성분의 제거가 가능하며, 2 차의 정확도와 무조건적인 안정성이 보장된다. 식 (27)에 주어진 평면내변위에 대한 행렬벡터 방정식은 평면외변위와 연성되어 있지 않으므로, 평면내변위에 대한 시간응답은 식 (27)만으로도 계산할 수 있다.

식 (27)에 대한 일반화된- $\alpha$  시간적분법은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{M}_p \mathbf{a}_{n+1-\alpha_m}^p + 2\Omega \mathbf{G}_p \mathbf{v}_{n+1-\alpha_f}^p + (\mathbf{K}_p - \Omega^2 \mathbf{M}_p + \Omega \mathbf{G}_p) \mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^p = \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^p \quad (33)$$

여기서

$$\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^p = (1-\alpha_f) \mathbf{d}_{n+1}^p + \alpha_f \mathbf{d}_n^p$$

$$\mathbf{v}_{n+1-\alpha_f}^p = (1-\alpha_f) \mathbf{v}_{n+1}^p + \alpha_f \mathbf{v}_n^p$$

$$\mathbf{a}_{n+1-\alpha_m}^p = (1-\alpha_m) \mathbf{a}_{n+1}^p + \alpha_m \mathbf{a}_n^p$$

$$\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^p = \mathbf{f}_p((1-\alpha_f)t_{n+1} + \alpha_f t_n)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1}^p &= \mathbf{d}_n^p + \Delta t \mathbf{v}_n^p + (1/2 - \beta) \Delta t^2 \mathbf{a}_n^p + \beta \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1}^p \\ \mathbf{v}_{n+1}^p &= \mathbf{v}_n^p + (1-\gamma) \Delta t \mathbf{a}_n^p + \gamma \Delta t \mathbf{a}_{n+1}^p \end{aligned} \quad (34)$$

여기서,  $\alpha_m$ 과  $\alpha_f$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 는 알고리즘 상수이고,  $\Delta t$  ( $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ )는 적분 시간 간격을 나타낸다.  $\mathbf{d}_n^p$ 과  $\mathbf{v}_n^p$ ,  $\mathbf{a}_n^p$ 는 각각  $\mathbf{d}_p$ 와  $\dot{\mathbf{d}}_p$ ,  $\ddot{\mathbf{d}}_p$ 의 근사값이다. 한편, 식 (28)에 주어진 평면외변위의 방정식에 일반화된- $\alpha$  시간적분법을 적용함으로써 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}_b \mathbf{a}_{n+1-\alpha_m}^b + [\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_\theta(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^p)] \mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^b = \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^b \quad (35)$$

여기서

$$\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^b = (1-\alpha_f) \mathbf{d}_{n+1}^b + \alpha_f \mathbf{d}_n^b$$

$$\mathbf{v}_{n+1-\alpha_f}^b = (1-\alpha_f) \mathbf{v}_{n+1}^b + \alpha_f \mathbf{v}_n^b$$

$$\mathbf{a}_{n+1-\alpha_m}^b = (1-\alpha_m) \mathbf{a}_{n+1}^b + \alpha_m \mathbf{a}_n^b$$

$$\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^b = \mathbf{f}_b((1-\alpha_f)t_{n+1} + \alpha_f t_n)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1}^b &= \mathbf{d}_n^b + \Delta t \mathbf{v}_n^b + (1/2 - \beta) \Delta t^2 \mathbf{a}_n^b + \beta \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1}^b \\ \mathbf{v}_{n+1}^b &= \mathbf{v}_n^b + (1-\gamma) \Delta t \mathbf{a}_n^b + \gamma \Delta t \mathbf{a}_{n+1}^b \end{aligned} \quad (36)$$

여기서,  $\mathbf{d}_n^b$ 와  $\mathbf{v}_n^b$ ,  $\mathbf{a}_n^b$ 는 각각  $\mathbf{d}_b$ 와  $\dot{\mathbf{d}}_b$ ,  $\ddot{\mathbf{d}}_b$ 의 근사값이다. 식 (35)는 평면외변위의 벡터  $\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^b$ 에 평면내변위의 벡터  $\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^p$ 가 곱해져 있으므로

비선형 방정식이다. 그러나, 매 적분 단계마다 평면내변위의 벡터가 식 (33)과 (34)에 의해 결정된다면, 식 (35)는 평면외변위에 대한 선형의 방정식이 된다. 그러므로 이 방법은 비록 식 (35)가 본질적으로는 비선형 방정식이지만, 해를 구하기 위해 Newton-Raphson 법과 같은 비선형 방정식을 풀기 위한 방법을 사용하지 않아도 되는 장점을 가진다.

본 연구에서 제안된 시간적분방법을 검증하기 위해, 축정렬불량이 없는, 즉  $\varepsilon=0$ 일 때 회전디스크의 평면외변위에 대한 동적 시간응답을 계산하고 이를 기존의 연구결과<sup>(7)</sup>와 비교하였다. 디스크의 물성치와 치수는 내경이  $a$ 가  $a/b=0.268$ 로

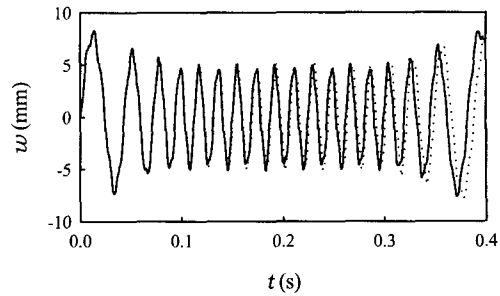


Fig. 3 Comparison of the dynamic time responses for the out-of-plane displacements between the present study and reference [7] when  $a/b=0.268$  and  $\varepsilon=0$ . —, Present study; ·····, Reference [7]

주어지는 것 이외에는 모두 앞 절에서 사용된 것과 동일하다. 그리고, 초기조건을 0으로 하고, z-방향으로 단위충격력(unit impulse)을 가한다. 디스크의 각속도와 회전각가속도는

$$\Omega = \begin{cases} 3000t & \text{for } 0 \leq t \leq 0.1, \\ 300 & \text{for } 0.1 \leq t \leq 0.3, \\ -3000t + 1200 & \text{for } 0.3 \leq t \leq 0.4, \end{cases} \quad (37)$$

로 정의한다. 여기서  $\Omega$ 와  $t$ 의 단위는 각각 rad/s와 sec이다. 이러한 가정 하에, 240개의 일정한 환형섹터 요소(annular sector element)를 이용한 평면외변위에 대한 시간응답을 계산하고 그 결과를 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3에서 실선과 점선은 각각 본 연구와 기존의 연구<sup>(7)</sup>에서 계산된 결과를 나타내는데, 본 연구에서의 결과는 기존의 연구결과<sup>(7)</sup>와 비슷하지만 작은 차이를 나타내고 있다. 이 차이는 기존의 연구에서는 비선형 방정식의 풀이를 수행하지만, 본 연구에서는 비선형 방정식 풀이를 하지 않았기 때문에 나타날 수 있다. 일반적으로, 비선형 방정식 풀이를 포함한 수치적 계산은 계산상의 공차가 있을 수 있으므로 선형의 수치계산에 비해 비교적 정확하지 못한 계산결과를 얻는다.

회전축 정렬 불량이 평면내변위와 평면외변위의 시간응답에 미치는 영향을 유한요소법을 바탕으로 하여 분석하였다. 모든 물성치와 치수는 내경이  $a/b=3/13$ 으로 주어지는 것 이외에는 모두 앞 절과 동일하다. 회전속도는 Fig. 4에 도시된 바와 같다. 앞선 계산과 마찬가지로, z-방향으로  $P_z(r, \theta, t) = 0.1\delta(t)$ 의 일정압력을 디스크에 가한다. 그리고, 반경방향으로 10개의 유한요소와 원주방향으로 24개(총 240개)의 유한요소를 이용한 회전디스크에 대한 유한요소모델을 적용하였다. 시간응답을 계산할 때 시간간격은  $\Delta t=0.0005$ s로 하였다.

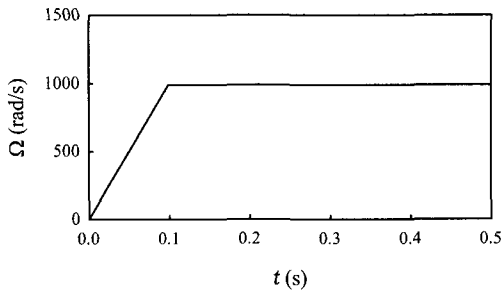


Fig. 4 Angular speed profile of the spinning disk

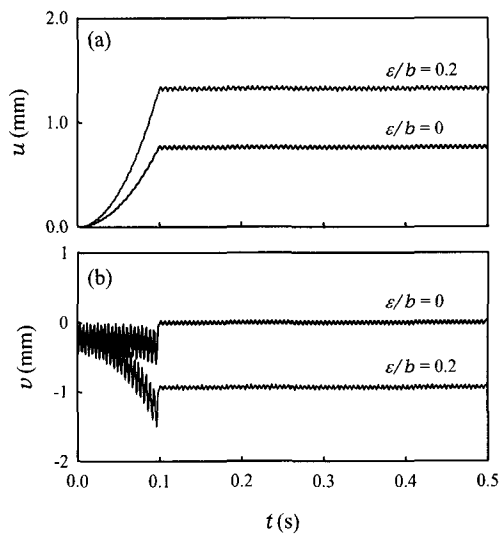


Fig. 5 Dynamic time responses of the in-plane displacements at  $r=b$  and  $\theta=\pi/4$  for the angular speed profile of Figure 4 when  $a/b=3/13$ : (a) the radial displacement  $u$ ; and (b) the tangential displacement  $v$

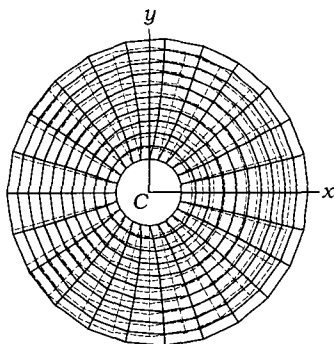


Fig. 6 Deformed shape of the disk due to the in-plane displacement when  $a/b=3/13$ ,  $\Omega=1000$  rad/s,  $\dot{\Omega}=0$  and  $\varepsilon/b=0.2$ . —, Deformed shape; -----, Undeformed shape

먼저, 축정렬불량이 반경방향의 평면내변위  $u$ 와 원주방향의 평면내변위  $v$ 에 미치는 영향을 분석하였다. Fig. 5는 디스크의 회전속도가 Fig. 4와 같을 때  $r=b$ 이고  $\theta=\pi/4$ 인 점의 동적 시간응답을 나타낸다. Fig. 5에서, 평면내변위는 평면외변위에 비해 높은 주파수로 진동함을 알 수 있다. Fig. 5(a)에서 보는 바와 같이,  $\varepsilon/b=0$ 인 경우와  $\varepsilon/b=0.2$ 인 경우의 반경방향 변위를 비교하면, 시간응답의 경향은 축정렬불량에 관계없지만, 변위의 크기는 축정렬불량에 의해 변화한다. 즉, 축정렬불량이 있는 경우 가속구간에서 축정렬불량에 의해  $u$ 는 축정렬불량이 없는 경우보다 크게 나타나며, 이에 따라서 회전속도가 일정한 구간에서  $u$ 는  $\varepsilon/b=0$ 인 경우와  $\varepsilon/b=0.2$ 인 경우 각각 약 0.7693mm와 1.3374mm를 중심으로 진동한다. 정속구간에서 진동의 평균값  $u=0.7693$  mm는 Timoshenko와 Goodier<sup>(13)</sup>에 의해 얻어진 엄밀해  $u=0.7672$  mm에 매우 작은 차이를 나타낸다. 참고문헌<sup>(8)</sup>에서 정상상태에서의 반경방향변위의 크기는 축정렬불량의 크기에 비례하여 증가함이 증명되어 있다. 원주방향변위 또한 축정렬불량의 영향을 받는다. Fig. 5(b)는  $r=b$ 와  $\theta=\pi/4$ 인 한 점에서의 원주방향 변위에 대한 시간응답을 나타낸다. 원주방향의 변위  $v$ 는 축정렬불량이 없는 경우 가속구간에서 일정하게 진동하고 정속구간에서 0을 중심으로 진동을 하지만, 축정렬불량이  $\varepsilon/b=0.2$ 인 경우 가속구간에서 변위가 음의 방향으로 커지며 정속구간에 도달했을 때 약  $v=-0.9426$ mm를 중심으로 진동한다.

축정렬불량이 평면내변위에 미치는 영향은 또한 회전디스크가 정상상태에 있을 때 디스크의 변형형상을 계산함으로써 관찰할 수 있다. Fig. 6에서 실선은 변형된 형상을 나타내고, 점선은 변형전의 형상을 나타낸다. 그림에서 변형된 형상은 5배의 비율로 확대된 것인데, 변형된 형상이 원주방향으로 대칭이 아니고, 회전중심과 도심을 연결한 선, 즉  $x$ -축에 대해 대칭임을 관찰할 수 있다. 반경방향 변위와 원주방향 변위는 회전중심에서의 거리에 비례하여 증가하며 디스크의 외경에서 최대값을 갖는다. 한편, 원주방향 좌표  $\theta$ 에 대한 변형을 관찰하면, 반경방향과 원주방향 변위는 각각  $\cos\theta$ 와  $\sin\theta$ 의 형태를 띠며 변화하는데, 이 결과는 참고문헌<sup>(8)</sup>과 매우 잘 일치한다.

다음으로, 축정렬불량이 면외변위  $w$ 에 미치는 영향을 디스크가  $a/b=3/13$ 의 반경비를 가지고 Fig. 4에 주어진 회전속도로 회전할 경우에 대해서 관찰하였다. 축정렬불량의 크기를 변화시켜가며  $r=b$ 와  $\theta=\pi/4$ 인 한 점에서의 평면외변위의 동적 시간응답을 계산하고 그 결과를 Fig. 7에 도시하였다. 회전디스크가 가속되는 구간, 즉  $0 \leq t \leq 0.1$ 에서, 각속도가 증가함에 따라 원심력의

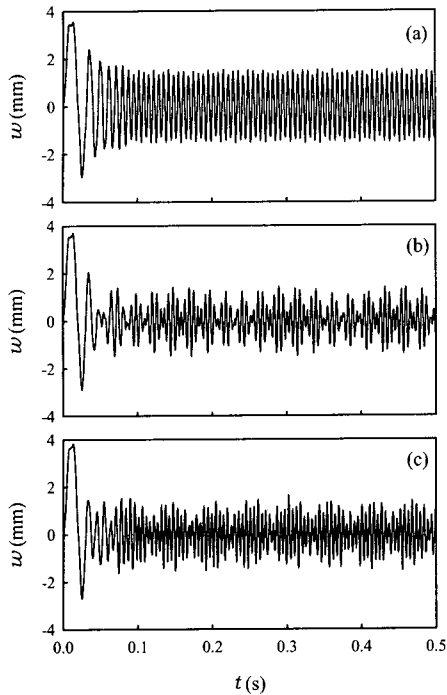


Fig. 7 Dynamic time responses of the out-of-plane displacement  $w$  at  $r=b$  and  $\theta=\pi/4$  for the angular speed profile of Figure 4 when  $a/b=3/13$ : (a)  $\epsilon/b=0$ ; (b)  $\epsilon/b=0.1$ ; and (c)  $\epsilon/b=0.2$

영향으로 인하여 평면외변위  $w$ 의 크기와 주기는 감소한다. 정속구간에서는 축정렬불량이 없을 때 진동의 진폭은 크게 변화하지 않지만, 축정렬불량이 존재하는 경우  $w$ 는 진폭변조(amplitude modulation)를 일으킨다. 진폭변조는 비트현상(beat phenomenon)이라고도 하는데 이 현상은 고유진동수의 차이가 매우 작을 때 발생한다. Table 2에서,  $n \neq 0$ 인 모드(0,n)는 약간의 차이가 나는 대칭 및 비대칭 모드로 분리되는 현상을 관찰하였는데, 이것이  $w$ 에서 진폭변조가 일어나는 원인이 된다고 할 수 있다. 대칭모드와 비대칭모드에 대해서는 참고문헌(14,15)에 자세히 논의되어 있다.

축정렬불량이 평면외변위  $w$ 의 변위분포에 미치는 영향을 분석하기 위해 변위의 시간응답을 RMS 값(root mean square value)으로 환산하여 Fig. 8에 나타내었다. Fig. 8에서 사각형, 원, 삼각형은 각각  $\epsilon/b=0$  과  $\epsilon/b=0.1$ ,  $\epsilon/b=0.2$ 인 경우에  $0.1 \leq t \leq 0.5$  구간, 즉 디스크가 정속으로 회전할 때 디스크상에 발생하는 시간응답의 RMS 값을 나타낸 것이다. Fig. 8(a)에서 평면외변위  $w$ 의 반경방향으로의 RMS 값은  $\theta=\pi/4$ 에서 축정렬불량의 크기에 관계없이 반경에 비례하여 단조증가하며 디스크의 외경에서 최대값을 갖는다. 원주방향으로의

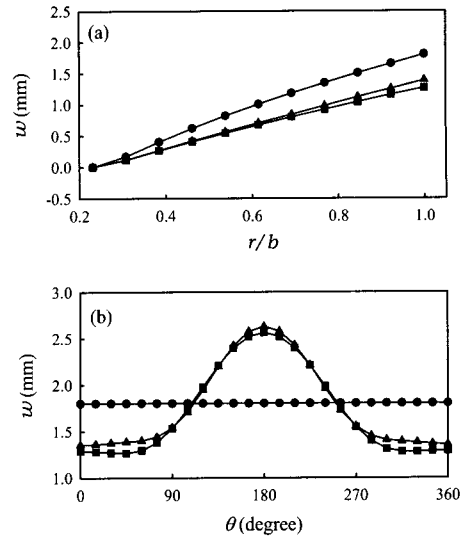


Fig. 8 Distributions for the RMS values of the out-of-plane displacement  $w$  during  $0.1 \leq t \leq 0.5$  when  $a/b=3/13$ ,  $\Omega=1000$  rad/s, and  $\dot{\Omega}=0$ : (a) along the radial line at  $\theta=\pi/4$ ; and (b) along the outer circumference at  $r=b$ . —,  $\epsilon/b=0$ ; —●—,  $\epsilon/b=0.1$ ; —▲—,  $\epsilon/b=0.2$

분포는 Fig. 8(b)에서 보는 바와 같이  $r=b$ 에서 축정렬불량이 없을 때는 일정한 변위분포를 갖지만, 축정렬불량이 존재하는 경우 원주방향 좌표  $\theta$ 의 함수로 변화한다. 축정렬불량이 존재하는 경우, 변위분포는  $\theta=180^\circ$ 에서 최대가 되며  $\theta=0^\circ$ 에서 최소가 된다.  $\theta=0^\circ$ 인 점은 회전중심에서부터 가장 먼 지점이고,  $\theta=180^\circ$ 인 점은 회전중심에서 가장 가까운 점이다. 즉, RMS 값은 회전중심으로부터의 거리에 반비례하게 증가한다. 이 현상은 회전에 의한 강성효과(stiffening effect)가 거리가 멀수록 커진다는 사실에 원인이 있다고 할 수 있다.

6. 결론

회전축이 도심축과 일치하지 않는 회전디스크의 동적 시간응답을 유한요소법을 적용하여 관찰하였다. 평면내변위를 정상상태라 가정하는 기존의 연구방법으로는 시간응답을 정확히 구할 수 없으므로, 본 연구에서는 평면내 변위가 시간의 함수라 가정하였다. 해석을 위해 먼저 평면내 방향과 평면외 방향의 지배방정식을 유도하였다. 평면내 변위에 대한 두 개의 선형 지배방정식은 평면내변위만이 연성되어 있는 반면, 평면외변위에 대한 지배방정식은 비선형 방정식으로써 평면내변위와 평면외변위가 연성되어 있다. 이 운동방정식을 바탕으로 본 연구에서 제안한 부채꼴요소(annular sector element)를 이용하여 유한요소법을 적용함으로써



면내방향과 면외방향의 두개의 행렬벡터-방정식을 유도하였다. 최종적으로 이에 일반화된- $\alpha$  시간적분법을 적용하여 비선형의 풀이 없이 시간응답을 구하였다.

평면내변위에 대한 시간응답은 축정렬불량이 존재할 때 주어진 점에서 그 크기는 반경방향으로 증가하며 원주방향으로 cosine 이나 sine 의 형태로 변화하며, 면내변위에 의한 디스크의 변형형상은 회전중심과 도심을 연결하는 축에 대칭을 이루고 있음을 알 수 있었다. 한편, 평면외변위의 시간응답에서는 진폭변조 또는 비트현상이 일어남을 관찰하였는데, 이것은 축정렬불량을 가지는 디스크의 모드가 차이가 작은 대칭과 비대칭의 모드로 분리됨을 증명하는 것이다. 그리고, RMS 값으로부터 디스크의 평면외변위는 회전속도의 강성효과에 의하여 회전중심으로부터 거리가 멀수록 작아짐을 알 수 있다.

## 후 기

이 논문은 한국과학재단 2001 년도 목적기초연구사업 특정기초연구 연구비(No. R01-2000-00292)에 의해 연구되었음.

## 참고문헌

- (1) Mote, Jr., C. D., 1965, "Free Vibration of Initially Stressed Circular Disks," *Transaction of ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 89, pp. 258~265.
- (2) Everseman, W. and Dodson, R. O., 1969, "Free Vibration of a Centrally Clamped Spinning Circular Disk," *AIAA Journal*, Vol. 7, No. 10, pp. 2010~2012.
- (3) Adams, G. G., 1987, "Critical Speed for a Flexible Spinning Disk," *Journal of Mechanical Science*, Vol. 29, No. 8, pp. 523~531.
- (4) Iwan, W. D. and Moller, T. L., 1976, "The Stability of a Spinning Elastic Disk with a Transverse Load System," *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 43, pp. 458~490.
- (5) Lee, S. J., Chung, J. and Lee, J. M., 1998, "Free Vibration of a Flexible Spinning Disk with Axial Translation and Rigid-Body Tilting," *JSME International Journal, Series C*, Vol. 41, No. 3, pp. 329~337.
- (6) Chung, J., Kang, N. C. and Lee, J. M., 1996, "A Study on Free Vibration of a Spinning Disk," *KSME International Journal*, Vol. 10, No. 2, pp. 138~145.
- (7) Chung, J., Oh, J. E. and Yoo, H. H., 2000, "Non-Linear Vibration of a Flexible Spinning Disc with Angular Acceleration," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 231, No. 2, pp. 375~391.
- (8) Chung, J., Heo, J. W. and Han, C. S., 2001, "Natural Frequencies of a Flexible Spinning Disk Misaligned with the Axis of Rotation," *Journal of Sound and Vibration*, Submitted for Publication.
- (9) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1991, "The Finite Element Method 2," London: MaGraw-Hill.
- (10) Reddy, J. N., 1993, "An Introduction to the Finite Element Method," New York: MaGraw-Hill.
- (11) Mote, C. D., 1970, "Stability of Circular Plates Subjected to Moving Loads," *Journal of The Franklin Institute*, Vol. 290, pp. 329~344.
- (12) Chung, J. and Hulbert, G. M., 1993, "A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: the Generalized- $\alpha$  Method," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, No. 2, pp. 371~375.
- (13) Timoshenko, S. and J. N. Goodier, 1970, "Theory of Elasticity," New York: McGraw-Hill.
- (14) Parker, R. G., and Mote, C. D., 1996, "Exact Perturbation for the Vibration of Almost Annular or Circular Plates," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 118, pp. 436~445.
- (15) Chung, J. and Lee, J. M., 1999, "Vibration Analysis of a Nearly Axisymmetric Shell Structure using a New Finite Ring Element," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, pp. 35~50.