

## 최소 제곱 무요소법을 이용한 적응 기법에 관한 연구

박 상 훈\*\* · 권 기 찬\* · 윤 성 기†

(2002년 1월 5일 접수, 2002년 6월 7일 심사완료)

### A Study on the Adaptive Scheme Using Least-Squares Meshfree Method

Sang-Hoon Park, Kie-Chan Kwon and Sung-Kie Youn

**Key Words :** Least-Squares(최소 제곱), Meshfree Method(무요소법), Meshless Method(무요소법), Adaptive Scheme(적응 기법), Error Estimate(오차 추정)

#### Abstract

An  $h$ -adaptive scheme of first-order least-squares meshfree method is presented. *A posteriori* error estimates, which can be readily computed from the residual, are also presented. For elliptic problem the error indicators are further improved by applying the Aubin-Nitsche method. In the proposed refinement scheme, Voronoi cells are utilized to insert nodes at appropriate positions. Through numerical examples, it is demonstrated that the error indicators reveal good correlations with the actual errors and the adaptive first-order least-squares meshfree method is effectively applied to the localized problems such as the shock formation in fluid dynamics.

#### 1. 서 론

최근에 다양한 공학 문제에 대한 수치 해석 기법으로 무요소법<sup>(1-3)</sup>은 많은 관심을 받아 왔다. 해가 국부적으로 심하게 변하는 문제에 있어서 적응 기법은 필수적이며, 불규칙한 절점들의 분포로부터 형상함수를 구성할 수 있는 무요소법은 적응 기법의 적용에 있어서 상당한 장점을 가질 수 있다. 그러나 대부분의 무요소법은 약화식의 정확한 적분을 위해 신중하게 구성된 적분 격자(integration cell)를 필요로 하게 된다. 최근에 저자들은 적분 오차에 민감하지 않은 최소 제곱 무요소법<sup>(4,5)</sup>을 제안하였다.

적응 기법을 적용하기 위해서는 수학적으로 타당한 사후 오차 추정량(*a posteriori* error estimator)이 요구된다. 잔여오차(residual)를 최소화시키는 최소 제곱 무요소법에서는, 해석 후 각 적분점에서 잔

여오차를 간단히 계산할 수 있으며, 이를 이용하면 효율적인 오차 추정이 가능할 것이다. 타당한 척도를 사용하여 오차를 추정한 후, 해의 정확성을 개선시키기 위하여 오차가 크게 추정된 영역에 추가적으로 절점들을 배치함으로써  $h$ -적응 기법을 구현할 수 있다. 무요소법에서는 절점들의 간격이 급속히 변하는 부근에서 형상함수의 성질이 나빠질 우려가 있으므로, 추가된 절점이 주변 절점들에 비해 특정 절점에 너무 가까이 있지 않도록 배치하는 것이 바람직하다. 본 연구에서는 보로노이 격자(Voronoi cell)를 사용해 새로 삽입될 절점이 적절한 위치에 배치되도록 하였다. 유한요소법에서 이런  $h$ -적응기법의 구현은 절점의 추가 배치뿐 아니라, 이에 상응하도록 요소를 재구성해야 하는 번거로움이 따르게 된다.

본 연구에서는 1 차 최소 제곱 무요소법에 대해 사후 오차 추정이 가능한 척도를 제안하며, 수치 예제들을 통해 제안된 방법으로 추정된 오차와 정해로부터 계산된 오차사이에 큰 상관관계가 있음을 제시한다. 또한 본 오차 추정 방법을 이용해 최소 제곱 무요소법의  $h$ -적응 기법을 제안한다. 제안된 적응 기법의 검증을 위해 국부적으로 해가 심하게 변하는 포와송 방정식과 고속 압축 유동에

† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과  
E-mail : skyoun@sorak.kaist.ac.kr  
TEL : (042)869-3034 FAX : (042)869-3210

\* 한국과학기술원 기계공학과

\*\* 기아자동차 승용차체설계 3 팀

서 쇼크(shock)가 발생하는 유체 문제에 적용한 결과를 제시한다.

### 2. 이동 최소 제곱 근사화

본 장에서는 이동 제곱 근사화 방법과 이에 대한 근사 오차에 대해 간단히 기술한다.<sup>(3,6)</sup> 선형 독립 기저 함수들을  $\{p_i\}_{i=1}^n$ , 절점을  $\{x_j\}_{j=1}^N$ , 각 절점에서의 가중함수를  $\{w_j\}_{j=1}^N$ 라 하면,  $I$ -번째 절점의 형상함수  $\psi_I$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\psi_I(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}_I(x) \tag{1}$$

여기서

$$\mathbf{p}^T(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)] \tag{2}$$

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(x) \mathbf{P} \tag{3}$$

$$\mathbf{B}_I(x) = w_I(x) \mathbf{p}(x_I) \tag{4}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_N) & \dots & p_n(x_N) \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{W}(x) = \begin{bmatrix} w_1(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & w_N(x) \end{bmatrix} \tag{6}$$

본 연구에서는 선형 기저 함수  $\mathbf{p}^T = [1, x, y]$ 와 다음과 같은 가중 함수를 사용하였다.

$$w_I(x) = \begin{cases} \sqrt{4/\pi} (1 - \|x - x_I\|^2 / h_I^2)^4 & \text{if } \|x - x_I\| < h_I \\ 0 & \text{if } \|x - x_I\| \geq h_I \end{cases} \tag{7}$$

여기서  $h_I$ 는 영향 반경(influence radius)으로, 본 연구에서는 절점간의 거리의 1.5 배를 사용하였다.

일반적으로 이동 최소 제곱 형상함수는 다음의 조건들을 만족시킨다고 가정한다.<sup>(4)</sup>

$$\text{card}\{I \mid x \in \Omega_I\} < \rho, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \tag{8}$$

$$\|\psi_I\|_{L^\infty} \leq C_\infty \tag{9a}$$

$$\|\nabla \psi_I\|_{L^\infty} \leq C_G / h_I \tag{9b}$$

여기서  $\rho$ 는 자연수인 상수이며,  $C_\infty$ 와  $C_G$ 는 양의 상수들이다. 이때 기저 함수가  $p$ -차 다항식까지를 포함한다면, 임의의 함수  $u \in H^{p+1}(\Omega \cap \Omega_I)$ 에 대해 국부적인 근사 오차는 다음과 같다.

$$\|u - u_I^h\|_{H^m(\Omega \cap \Omega_I)} \leq C_I h^{p+1-m} |u|_{H^{p+1}(\Omega \cap \Omega_I)} \tag{10}$$

여기서  $u_I^h \in V^h = \text{span}\{\psi_j\}_{j=1}^N$ 는  $u$ 의 근사 함수이며,  $C_I$ 는 양의 상수이다. 식 (8)과 식 (9)를 이용하면,  $u \in H^{p+1}(\Omega)$ 에 대한 근사 오차는 아래와 같다.

$$\|u - u^h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h^{p+1} |u|_{H^{p+1}(\Omega)} \tag{11a}$$

$$\|u - u^h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 h^p |u|_{H^{p+1}(\Omega)} \tag{11b}$$

여기서  $u^h \in V^h$ 는  $u$ 의 근사 함수이며,  $C_1$ 과  $C_2$ 는 양의 상수들이다.

### 3. 최소 제곱 수식화

본 장에서는 1차 최소 제곱 수식화와 이에 대한 수렴 특성에 대해 간략하게 살펴 보려고 한다. 보다 상세한 수학적 이론 및 내용은 참고문헌<sup>(7)</sup>에서 찾을 수 있다.

#### 3.1 1차 최소 제곱 수식화

해석 영역  $\Omega \in \mathbf{R}^d$ 와 경계  $\Gamma$ 에서 다음과 같은 1차 미분 방정식 및 경계 조건을 생각한다.

$$\mathbf{A}u = f \quad \text{in } \Omega \tag{12a}$$

$$\mathbf{B}u = g \quad \text{on } \Gamma \tag{12b}$$

여기서  $\mathbf{A}$ 는 1차 선형 미분 연산자,  $\mathbf{B}$ 는 경계에서의 대수 연산자이며,  $f$ 와  $g$ 는 각각 해석 영역과 경계에서 주어진 함수이다.  $\mathbf{A}$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{13}$$

식 (12b)를 만족시키는 함수 공간  $V$ 와 이에 대한  $\mathbf{A}$ 의 치역 공간(range space)  $W$ 를 각각 다음과 같이 정의 한다.

$$V = \{v \in L^2(\Omega) \mid \mathbf{A}v \in L^2(\Omega) \text{ and } \mathbf{B}v = g \text{ on } \Gamma\} \tag{14}$$

$$W = \{w \in L^2(\Omega) \mid w = \mathbf{A}v \text{ for some } v \in V\} \tag{15}$$

$f \in W$ 라 가정하면, 임의의 시도 함수(trial function)  $v \in V$ 에 대해 잔여오차를 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\mathbf{R}(v) = \mathbf{A}v - f \quad \text{in } \Omega \tag{16}$$

그러면 잔여오차의 제곱의 적분은 다음과 같다.

$$I(\mathbf{v}) = \|R(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 = (\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{f}, \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{f})_{L^2(\Omega)} \quad (17)$$

최소 제곱 수식화에서는 2차 범함수(quadratic functional)  $I(\mathbf{v})$ 를 최소화하는 함수  $\mathbf{u}$ 를 찾는다. 따라서 다음과 같은 변분식을 얻을 수 있다.

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (18)$$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \quad (19a)$$

$$F(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{A}\mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \quad (19b)$$

수치 근사 해를 구하기 위해서는 아래의 변분식을 만족시키는  $\mathbf{u}^h \in V^h \subset V$ 를 찾는다.

$$B(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = F(\mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h \quad (20)$$

잘 정의된(well-posed) 문제에서 연산자  $\mathbf{A}$ 는 아래로 유계(bounded below)하므로, 다음 식을 만족시키는 양의 상수  $\alpha_1$ 이 존재하게 된다.

$$\alpha_1 \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (21)$$

이때 접선형형식  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 의 이산화로부터 얻어지는 행렬은 대칭이며 양의 정부호(positive definite)이다.  $\mathbf{A}$ 가 타원형(strictly elliptic or coercive)의 성질을 만족한다면, 위 식은 아래와 같이 될 수 있다.

$$\alpha_2 \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \quad (22)$$

### 3.2 수렴 특성

일반적인 최소 제곱 수식화의 경우, 이동 최소 제곱 근사화에서 기저 함수로  $p$ -차 다항식까지 사용했다면 다음과 같은 수렴 특성을 갖는다.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{C}_1 h^p \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Omega)} \quad (23)$$

여기서  $\bar{C}_1$ 은 양의 상수이다.

1차 미분 연산자  $\mathbf{A}$ 가 타원형의 성질을 만족한다면, 최소 제곱 수식화는 다음과 같이 보다 나은 수렴성을 가진다.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{C}_2 h^{p+1} \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Omega)} \quad (24)$$

식 (11)을 보면, 타원형 수식화의 경우 수렴 속도가 최적임을 알 수 있다.

### 3.3 2차원 포와송 방정식의 최소 제곱 수식화

1차 미분 방정식들로부터 3.1절에 기술된 최소 제곱 수식화 과정을 진행하는 것은 간단하므로, 본 절에서는 어떻게 1차 미분 방정식들로 변환되었는지에 대해서만 기술한다.

2차원 포와송 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$-\Delta\phi = f \quad \text{in } \Omega \quad (25a)$$

$$\phi = g \quad \text{on } \Gamma_D \quad (25b)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \mathbf{n}^T \nabla\phi = h \quad \text{on } \Gamma_N \quad (25c)$$

식 (25b)와 (25c)는 각각 필수 경계 조건과 자연 경계 조건을 나타낸다.

식 (25)은 다음과 같이 1차 미분 방정식으로 바꿀 수 있다.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} - u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (26a)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - v = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (26b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -f \quad \text{in } \Omega \quad (26c)$$

$$\phi = g \quad \text{on } \Gamma_D \quad (26d)$$

$$n_x u + n_y v = h \quad \text{on } \Gamma_N \quad (26e)$$

위 수식화를 식 (12)로 표현할 때,  $\mathbf{u} = \{\phi, u, v\}^T$ 에  $\phi$ 의 1차 미분이 포함된다.

식 (26)에 아래의 양립성(compatibility) 조건과 이에 해당하는 경계조건을 추가하면, 식 (22)을 만족시키는 타원형 수식화를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (27a)$$

$$n_y u - n_x v = n_y g_{,x} - n_x g_{,y} \quad \text{on } \Gamma_D \quad (27b)$$

## 4. 사후 오차 추정 방법

최소 제곱 무요소법에서는 각 적분점에서 잔여 오차량을 간단히 계산할 수 있으며, 이것은 오차를 추정하는 효율적인 수단을 제공할 것이다. 본 장에서는 일반적인 오차 추정식 뿐만 아니라, 더 좋은 수렴성을 보이는 타원형 수식화에 대하여 개선된 오차 추정식을 제시하고, 이에 대한 수학적 타당성을 제시하려 한다. 각 적분점에서의 잔여오차를 그대로 이용하는 것은 수치적인 문제를 발생시킬 우려가 있으므로, 국부 영역에서 평균화된 양을 사용하는 것이 바람직하다. 그러나 유한요소법과는 달리 무요소법에서는 각 절점들의 영향 반경이 겹쳐 있으므로 전 영역을 겹치지 않은 국부 영역으로 나누는 것이 모호하다. 따라서 본 연구에서는 국부 영역이 아닌 절점에서 평균화된 양을 사용하려 한다.

4.1 일반적인 오차 추정식

식 (12)의 정해와 근사 해를 각각  $u$ 와  $u^h$ 라 하면, 식 (18)과 (20)에 의해 아래의 두 식을 생각할 수 있다.

$$(Au, Av^h)_{L^2(\Omega)} = (f, Av^h)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v^h \in V^h \quad (28a)$$

$$(Au^h, Av^h)_{L^2(\Omega)} = (f, Av^h)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v^h \in V^h \quad (28b)$$

위 두식의 차를 생각하면 직교성(orthogonality) 조건을 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (A(u - u^h), Av^h)_{L^2(\Omega)} &= (R(u^h), Av^h)_{L^2(\Omega)} \\ &= 0 \quad \forall v^h \in V^h \end{aligned} \quad (29)$$

이제 오차를  $e = u - u^h$ 라 하면, 식 (21)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\alpha_1 \|e\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Ae\|_{L^2(\Omega)} = \|R\|_{L^2(\Omega)} \quad (30)$$

여기서  $R = A(u - u^h) = Ae$ 은 잔여오차로 아래의 식을 만족한다.

$$\|R\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{I=1}^N \|R\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} \quad (31)$$

식 (30)와 (31)에 의해, 다음과 같이 최소 제곱 무요소법에 대한 사후 오차 추정식을 구할 수 있다.

$$\|e\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha_1} \sum_{I=1}^N \|R\|_{L^2(\Omega_I)} = \frac{1}{\alpha_1} \sum_{I=1}^N \eta_I \quad (32)$$

따라서  $I$ -번째 절점에 해당하는 평균화된 오차 추정량  $\eta_I$ 은 다음과 같이 영향 반경내의 적분점에 서의 잔여오차를 이용해 간단히 계산할 수 있다.

$$\eta_I = \left( \sum_{x_i \in \Omega \cap \Omega_I} R_i^T R_i W_i \right)^{1/2} \quad (33)$$

여기서  $R_i$ 는 적분점  $x_i$ 에서의 잔여오차이며,  $W_i$ 는 적분 가중치이다.

4.2 타원형 수식화의 오차 추정식

Aubin-Nitsche 방법<sup>(8)</sup>을 이용하면 타원형 수식화에 대해 개선된 오차 추정 방법을 얻을 수 있다. 먼저 다음과 같은 2차 미분 방정식을 생각한다.

$$A^*Aw = e \quad \text{in } \Omega \quad (34)$$

여기서  $A^*$ 는  $A$ 의 수반 연산자(adjoint operator)이며,  $A$ 가 타원형 1차 미분 연산자이므로 아래의 식이 성립한다.

$$\tilde{\alpha} \|w\|_{H^2(\Omega)} \leq \|A^*Aw\|_{L^2(\Omega)} = \|e\|_{L^2(\Omega)} \quad (35)$$

식 (34)에 의해  $e$ 는 아래처럼 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \|e\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (e, e)_{L^2(\Omega)} = (e, A^*Aw)_{L^2(\Omega)} \\ &= (Ae, Aw)_{L^2(\Omega)} = (R, Aw)_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (36)$$

위 식은 식 (29)의 직교성 조건에 의해 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\|e\|_{L^2(\Omega)}^2 = (R, A(w - w^h))_{L^2(\Omega)} \quad \forall w^h \in V^h \quad (37)$$

여기서  $w^h$ 는 이동 최소 제곱 형상 함수를 이용해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$w^h = \sum_{I=1}^N \psi_I w_I^h = \sum_{I=1}^N \Psi_I w_I^h \quad (38)$$

위 식에서  $\Psi_I = \psi_I I$ 는  $m \times m$  대각 행렬이다.

따라서  $\sum_{I=1}^N \Psi_I = I$ 을 이용하면,  $Aw$ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} Aw &= A \sum_{I=1}^N \Psi_I w = \sum_{I=1}^N A(\Psi_I w) \\ &= \sum_{I=1}^N A_0 \Psi_I w + \sum_{I=1}^N \sum_{i=1}^d A_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\Psi_I w) \\ &= \sum_{I=1}^N \left[ A_0 \Psi_I w + \sum_{i=1}^d A_i \Psi_I \frac{\partial w}{\partial x_i} \right] + \sum_{I=1}^N \sum_{i=1}^d A_i \frac{\partial \Psi_I}{\partial x_i} w \end{aligned} \quad (39)$$

또한  $Aw^h$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Aw^h &= \sum_{I=1}^N \left[ A_0 \Psi_I w_I^h + \sum_{i=1}^d A_i \Psi_I \frac{\partial w_I^h}{\partial x_i} \right] \\ &\quad + \sum_{I=1}^N \sum_{i=1}^d A_i \frac{\partial \Psi_I}{\partial x_i} w_I^h \end{aligned} \quad (40)$$

식 (39)와 (40)으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} A(w - w^h) &= \sum_{I=1}^N \left[ A_0 \Psi_I (w - w_I^h) + \sum_{i=1}^d A_i \Psi_I \frac{\partial (w - w_I^h)}{\partial x_i} \right] \\ &\quad + \sum_{I=1}^N \sum_{i=1}^d A_i \frac{\partial \Psi_I}{\partial x_i} (w - w_I^h) \end{aligned} \quad (41)$$

이제 식 (37)의 오차 높은 다음의 정의를 이용하면,  $\omega|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} \equiv w - w_I^h|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)}$ , 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \|e\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (R, A(w - w^h))_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{I=1}^N \left( R, A_0 \Psi_I \omega + \sum_{i=1}^d A_i \Psi_I \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{I=1}^N \left( \mathbf{R}, \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i \frac{\partial \Psi_I}{\partial x_i} \omega \right)_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} \quad (42) \\
 & \leq \sum_{I=1}^N \|\mathbf{R}\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} \left\| A_0 \Psi_I \omega + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i \Psi_I \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} \\
 & + \sum_{I=1}^N \|\mathbf{R}\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} \left\| \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i \frac{\partial \Psi_I}{\partial x_i} \omega \right\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)}
 \end{aligned}$$

식 (9)로부터  $\forall \mathbf{v} \in V$  에 대해 아래의 부등식을 만족시키는 양수  $\tilde{C}_\infty, \tilde{C}_G$  가 존재함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \left\| A_0 \Psi_I \mathbf{v} + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}_i \Psi_I \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} \quad (43a) \\
 & \leq \tilde{C}_\infty \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega \cap \Omega_I)}
 \end{aligned}$$

$$\left\| \mathbf{A}_i \sum_{i=1}^d \frac{\partial \Psi_I}{\partial x_i} \mathbf{v} \right\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} \leq \frac{\tilde{C}_G}{h_I} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} \quad (43b)$$

식 (10)에 의해  $w_I^h$  는 다음을 만족시키다.

$$\begin{aligned}
 & \|w - w_I^h\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} = \|\omega\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} \quad (44a) \\
 & \leq \tilde{C}_1 h_I^2 |w|_{H^2(\Omega \cap \Omega_I)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \|w - w_I^h\|_{H^1(\Omega \cap \Omega_I)} = \|\omega\|_{H^1(\Omega \cap \Omega_I)} \quad (44b) \\
 & \leq \tilde{C}_2 h_I |w|_{H^2(\Omega \cap \Omega_I)}
 \end{aligned}$$

따라서 식 (42)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 & \|e\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)}^2 \leq (\tilde{C}_2 \tilde{C}_\infty + \tilde{C}_1 \tilde{C}_G) \\
 & \sum_{I=1}^N \left( \|\mathbf{R}\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} h_I |w|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)} \right) \\
 & \leq (\tilde{C}_2 \tilde{C}_\infty + \tilde{C}_1 \tilde{C}_G) \left( \sum_{I=1}^N \|\mathbf{R}\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)}^2 h_I^2 \right)^{1/2} \quad (45) \\
 & \left( \sum_{I=1}^N |w|_{H^2(\Omega \cap \Omega_I)}^2 \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

위 식의 마지막 항은 식 (8)과 (35)을 이용해 다음처럼 오차 범으로 표현할 수 있다.

$$\sum_{I=1}^N |w|_{H^2(\Omega \cap \Omega_I)}^2 \leq \rho |w|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{\rho}{\bar{\alpha}^2} \|e\|_{L^2(\Omega)} \quad (46)$$

따라서 타원형 수식화에 대한 사후 오차 추정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\|e\|_{L^2(\Omega)} = \rho^{1/2} \frac{(\tilde{C}_2 \tilde{C}_\infty + \tilde{C}_1 \tilde{C}_G)}{\bar{\alpha}} \left( \sum_{I=1}^N \eta_I^2 \right)^{1/2} \quad (47)$$

여기서  $\eta_I = h_I \|\mathbf{R}\|_{L^2(\Omega \cap \Omega_I)}$  는 각 절점의 평균화된

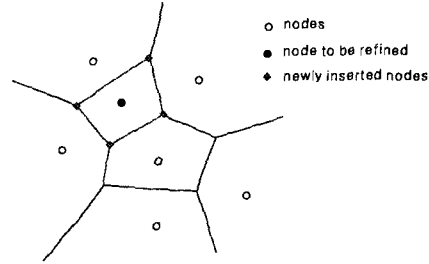


Fig. 1 Insertion of new nodes using Voronoi cells

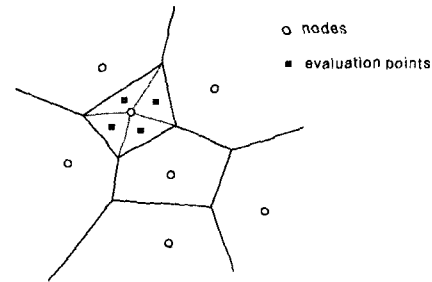


Fig. 2 Integration by Voronoi cells

오차 추정량으로 수치적으로는 다음과 같이 적분점에서의 잔여오차를 이용해 간단히 계산된다.

$$\eta_I = h_I \left( \sum_{x_i \in \Omega \cap \Omega_I} \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i W_i \right)^{1/2} \quad (48)$$

### 5. 적응 기법의 구현

무요소법에서  $h$ -적응 기법의 구현은 오차 추정량의 계산, 국부적으로 오차가 큰 절점 선택, 근처의 적절한 위치에 절점들 추가 그리고 이에 따른 적분 점들의 구성으로 이루어진다.

먼저 해석 후, 식 (33) 또는 (48)을 사용해 각 절점의 오차 추정량을 계산한다. 그리고 오차 추정량이 큰 절점들을 선택한다. 예를 들면 현재 절점들 중 추정량이 큰 10%를 선택한다. 선택된 각 절점 근처에 추가된 새로운 절점들로 인해 절점들 사이의 간격이 국부적으로 급격히 변하면 형상 함수의 성질이 나빠져 수치적 문제를 야기할 수 있다. 따라서 Duarte<sup>(9)</sup>는 선택된 절점에서 가장 가까운 절점까지의 거리의 반이 되도록 몇 개의 절점을 추가한 후, 서로 너무 가까이 있는 절점들은 하나의 절점으로 결합시키는 방법을 사용하였다. 본 연구에서는 Fig. 1 과 같이 선택된 절점에 해당하는 보로노이 격자<sup>(10)</sup>의 꼭지점에 절점들을 추가하였다. 보로노이 격자의 꼭지점들은 절점들을 이용해 구성된 Delaunay 삼각형들의 외심이므로, 추

가된 절점들로 인해 절점들의 간격이 급격이 변하는 현상을 피할 수 있음을 예상할 수 있다. 그리고 보로노이 격자의 구성은  $O(N \log N)$  정도의 계산 노력을 요하는 비교적 간단한 작업이다.<sup>(10)</sup>

보로노이 격자는 Fig. 2 처럼 적분점들을 생성에도 이용된다. 각 절점과 이에 해당하는 격자의 꼭지점들로 구성되는 삼각형들을 생각하고, 여기에 1 점 또는 3 점의 가우스 구적 공식을 적용하였다. 참고로 이런 방식은 적분 오차에 민감한 Galerkin 수식화에서는 잘 작동하지 않는다.<sup>(4,5)</sup>

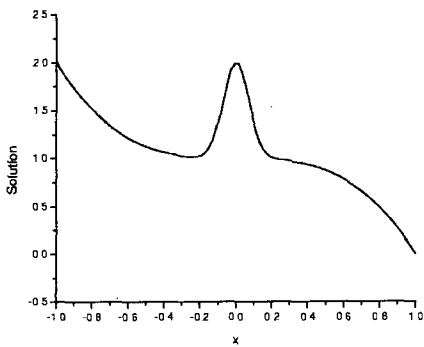


Fig. 3 Exact solution in 1-D example

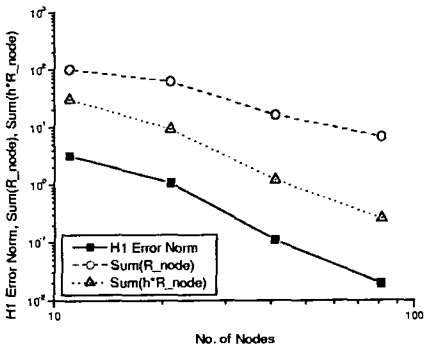


Fig. 4  $H^1$  error norm and error indicators

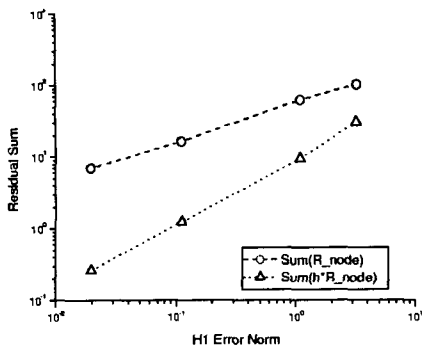


Fig. 5  $H^1$  error norm vs. error indicators

### 6. 수치 예제

본 장에서는 제안한 오차 추정 방법과 이를 이용한 적응 기법의 타당성과 효율성을 수치 예제들을 통해 제시한다.

#### 6.1 1차원 포와송 방정식 문제

다음과 같은 정해를 가지는 1 차원 포와송 방정식 문제를 생각한다.

$$\phi(x) = 1 - x^3 + \exp(-100x^2), \quad x \in \Omega = (-1, 1) \quad (49)$$

위 식은 Fig. 3 과 같이  $x=0$  근처에서 급격히 변하는 함수이다. 정해로부터의 오차와 추정된 오차를 비교하기 위해, 양쪽 경계에서 필수 경계 조건을 주고, 절점의 수를 11, 21, 41, 81 개로 차례로 증가 시키면서 해석해 보았다. Fig. 4 와 Fig. 5 는  $H^1$  오차와 식 (32)와 식 (47)을 이용해 계산한 오차 추정량을 비교하였다. 여기서 상수들은 무시하였다. 두 오차 추정 방법 모두 실제 오차와 잘 맞음을 볼 수 있다. 1 차 포와송 방정식의 최소 제곱 수식화는 타원형이므로, 식 (47)에 의한 오차 추정량이 보다 큰 상관 관계를 보여준다. Fig. 6 과 Fig.

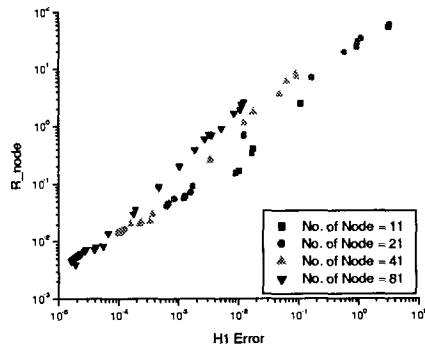


Fig. 6  $H^1$  error vs. error indicator (conventional)

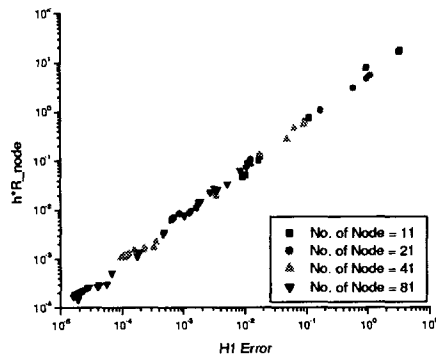


Fig. 7  $H^1$  error vs. error indicator (elliptic)

7 은 식 (33)과 식 (48)에 의해 계산된 각 절점에서 국부적인 오차 추정량을 실제 오차와 비교하였다. 국부적으로도 비슷한 결과를 볼 수 있으며, 타원형 수식화를 위해 개선된 오차 추정 방법이 좋은 결과를 보여준다.

적응 기법의 적용으로, 초기에 11 개의 균일한 절점들의 분포에서 시작하여, 각 단계에서 현재의 절점들 중 식 (33)과 식 (48)의 오차 추정량이 큰 25%를 선택하여 근처에 절점들을 추가하였다. Fig. 8 은 적응 기법을 적용하면서의 수치 해의 수렴성을 보여준다. 비교를 위해 실제  $H^1$  오차를 이용해 적응 기법을 적용한 결과도 포함하였다. 제시한 적응 기법으로 해가 급속히 수렴함을 볼 수 있으며, 식 (48)을 이용한 경우 실제 오차를 이용한 결과와 거의 일치함을 볼 수 있다. 이때 Fig. 9 는 각 단계에서 절점들의 배치 형상을 보여준다.

6.2 2 차원 포와송 방정식 문제

아래와 같이 원점에서 급격히 변하는 해를 갖는 2 차원 포와송 방정식 문제를 생각한다 (Fig. 10).

$$\phi(x, y) = \exp(-100(x^2 + y^2)), \quad (x, y) \in \Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \quad (50)$$

모든 경계에서 필수 경계 조건을 가정하였으며, 초기의 11×11 개의 균일한 절점들의 분포로 시작하여, 각 단계에서 10%를 선택하여 근처에 절점들을 추가하였다. 그리고 각 보로노이 격자에서 1 점 적분을 이용하였다. 식 (26)의 최소 제곱 수식화에 식 (33)의 오차 추정식을 이용한 적응 방법과, 식 (26)에 식 (27)을 추가한 타원형 수식화에 식 (48)의 오차 추정식을 이용하여 적응 방법을 적용해 보았다. Fig. 11 과 Fig. 12 는 두 방법에 대

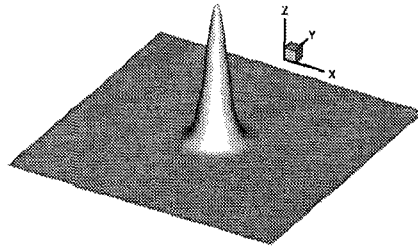


Fig. 10 Exact solution of 2-D adaptive example

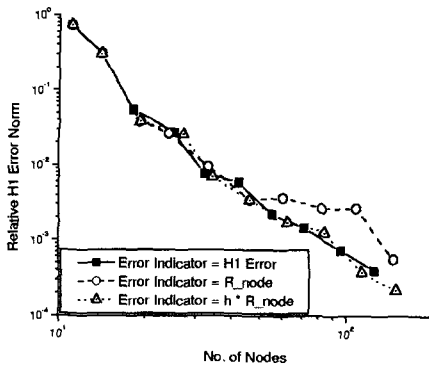


Fig. 8 Relative  $H^1$  error norms

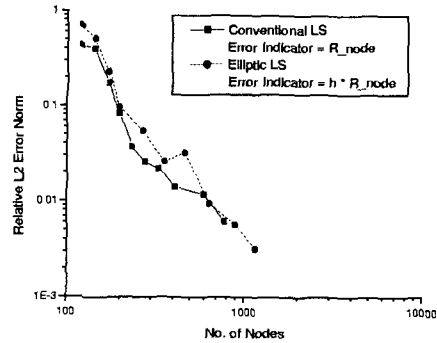


Fig. 11 Relative  $L^2$  error norms

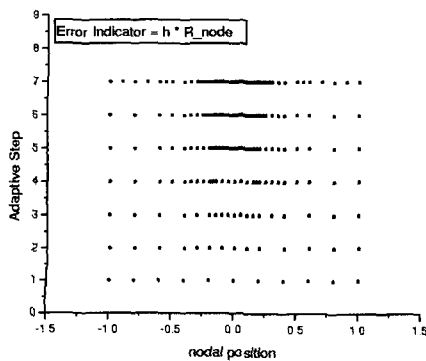


Fig. 9 Nodal distribution (elliptic error indicator)

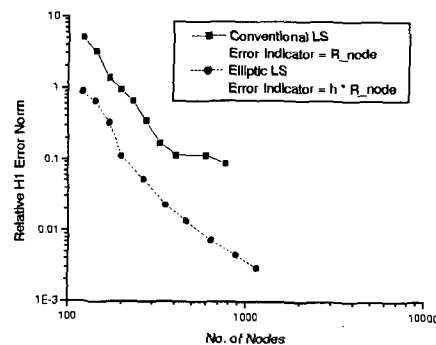


Fig. 12 Relative  $H^1$  error norms

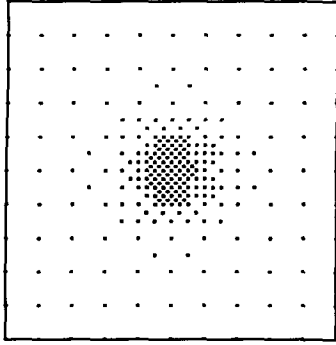


Fig. 13 Nodal distribution (conventional formulation)

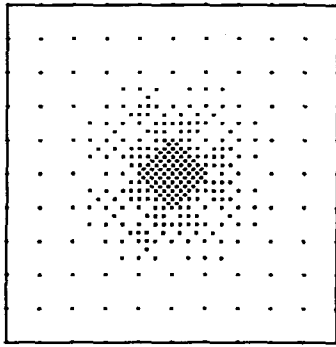


Fig. 14 Nodal distribution (elliptic formulation)

해  $L^2$  와  $H^1$  오차 놈들의 변화를 보여준다. 본 적용 기법의 적용으로 인해 해가 급속히 수렴함을 볼 수 있다. 타원형 수식화와 이에 해당하는 오차 추정량을 이용할 경우,  $H^1$  오차 관점에서 더 빠른 수렴성을 얻을 수 있음을 알 수 있다. Fig. 13 과 Fig. 14 는 두 방법에 대해 6-번째 단계에서의 절점들의 분포를 보여준다.

6.3 2차원 고속 압축 유동 문제

본 절에서는 쇼크가 발생하는 유동 문제에 제안한 방법을 적용한다. 이런 문제의 경우 적용 기법의 적용은 필수적이다.

체적력, 열전도, 점성을 무시하면, 이상 기체가 정하에 압축 유동의 오일러 방정식(Euler equation)은 다음과 같이 쓸 수 있다.<sup>(11)</sup>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (51a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (51b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (51c)$$

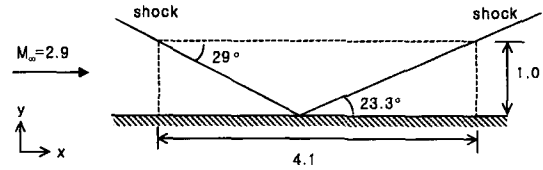


Fig. 15 Shock reflection from a solid wall

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (51d)$$

여기서  $\rho$  는 밀도,  $u$  와  $v$  는 속도 성분,  $p$  는 압력 그리고  $\gamma$  는 비열을 의미한다. 위의 비선형 방정식을 선형화한 후, 시간에 대해 후진 차분법(backward difference)을 적용하면,  $(n+1)$ -번째 시간 단계의  $(k+1)$ -번째 축차에 대한 1 차 최소 제곱 수식화는 다음과 같다.<sup>(7)</sup>

$$A_{[k+1]}^{n+1} U_{[k+1]}^{n+1} = f^{n+1} \quad (52)$$

각 변수들을 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$A_{[k+1]}^{n+1} = A_{0,[k+1]}^{n+1} + \Delta t A_{1,[k+1]}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x} + \Delta t A_{2,[k+1]}^{n+1} \frac{\partial}{\partial y} \quad (53a)$$

$$U_{[k+1]}^{n+1} = [\rho_{[k+1]}^{n+1}, u_{[k+1]}^{n+1}, v_{[k+1]}^{n+1}, p_{[k+1]}^{n+1}]^T \quad (53b)$$

$$f^{n+1} = [\rho^n, u^n, v^n, p^n]^T \quad (53c)$$

연산자  $A_{[k+1]}^{n+1}$  는 아래와 같다.

$$A_{0,[k+1]}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (54a)$$

$$A_{1,[k+1]}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_{[k]}^{n+1} & \rho_{[k]}^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & u_{[k]}^{n+1} & 0 & 1/\rho_{[k]}^{n+1} \\ 0 & 0 & u_{[k]}^{n+1} & 0 \\ 0 & \gamma p_{[k]}^{n+1} & 0 & u_{[k]}^{n+1} \end{bmatrix} \quad (54b)$$

$$A_{2,[k+1]}^{n+1} = \begin{bmatrix} v_{[k]}^{n+1} & 0 & \rho_{[k]}^{n+1} & 0 \\ 0 & v_{[k]}^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{[k]}^{n+1} & 1/\rho_{[k]}^{n+1} \\ 0 & 0 & \gamma p_{[k]}^{n+1} & v_{[k]}^{n+1} \end{bmatrix} \quad (54c)$$

위의 수식화와 식 (33)의 오차 추정을 이용해 Fig. 15 와 같은 문제에 적용 기법을 적용하였다. 비열은  $\gamma=1.4$  로 가정하고, 좌측 경계와 상측 경계에 각각 다음과 같은 경계 조건을 부가 하였다.



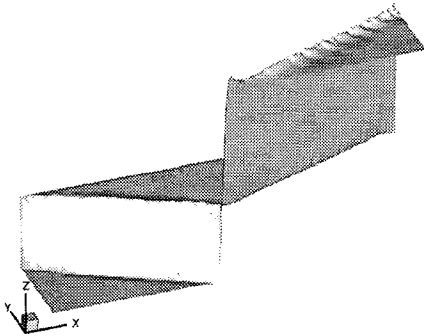


Fig. 16 Pressure distribution at step 6

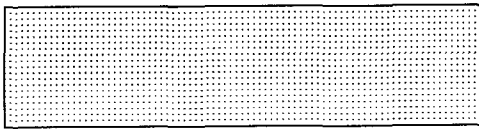


Fig. 17 Nodal distribution at step 1

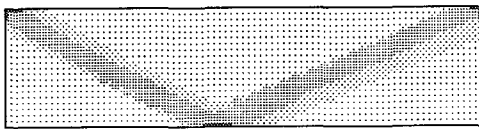


Fig. 18 Nodal distribution at step 3

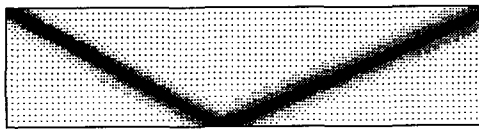


Fig. 19 Nodal distribution at step 6

$$U^T = [\rho, u, v, p] \quad \text{for left boundary} \quad (55a)$$

$$= [1, 2.9, 0, 0.7143]$$

$$U^T = [1.7, 2.6193, -0.5063, 1.5282] \quad (55b)$$

for upper boundary

좌측 상부 모서리에서 발생하게 되는 쇼크는  $v=0$  인 아래 면에서 반사되며, 이로 인해 위 면에서의 유동의 유입이 있어야 한다.

$81 \times 21$  개의 균일한 절점들의 분포에서 시작하였으며, 매 단계에서 오차 추정량이 큰 20%를 선택하여 근처에 절점들을 추가하였다. 각 보로노이 격자에서는 1 점 적분을 사용하였다. 시간 간격은  $\Delta t = h_{min}$  로 사용했으며, 여기서  $h_{min}$  은 절점의 영향 반경 중 최소값이다. 시간 간격이 너무 작아지면 해의 요동(oscillation)이 발생할 수 있으므로,

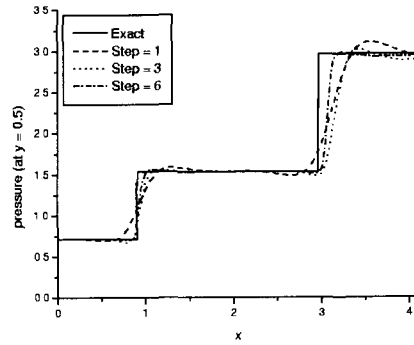


Fig. 20 Pressures at  $y = 0.5$

특정 값  $\Delta t_{min}$  이하로 작아질 수 없도록 하였다. 본 예제에서는  $\Delta t_{min} = 0.05$  로 하고  $t=5$  까지 해석하는 것으로 하였다. Fig. 16 은 적응 기법을 6번 적용한 단계에서의 계산된 압력 분포를 보여준다. Fig. 17, Fig. 18, Fig. 19 는 각 단계에서의 절점들의 분포를 보여준다. 제안한 방법으로 쇼크가 잘 감지됐음을 알 수 있다. Fig. 20 은  $y=0.5$  에서의 압력 분포를 보여준다.

## 7. 결론

본 연구에서는 1 차 최소 제곱 무요소법에 대한 사후 오차 추정 방법 및 이를 이용한 적응 기법을 제안하였다.

일반적인 수식화의 경우 각 절점에서 평균화된 오차 추정량으로, 기존의 적분점만을 이용해 영향 반경 내에서 잔여오차의 제곱을 적분한 후, 이 값의 제곱근을 사용한다. 타원형 수식화의 경우 여기에 절점의 영향 반경 값을 곱하여 보다 개선된 오차 추정식을 얻을 수 있었다. 제안된 오차 추정 방법의 수학적 타당성을 검증하였으며, 수치 예제를 통해 실제 오차와 큰 상관 관계가 있음을 볼 수 있었다.

적응 기법의 적용을 위해서는 먼저 제안한 방법으로 추정된 오차가 큰 절점들을 선택한다. 그리고 이 근처의 적절한 위치에 새로운 절점들을 추가하기 위해 보로노이 격자를 이용하는 방법을 제시하였다. 또한 보로노이 격자는 적분점의 생성에도 효과적으로 사용된다.

제안한 방법을 해가 국부적으로 심하게 변하는 포와송 방정식에 적용하여 수치해가 급속히 수렴하는 결과를 볼 수 있었으며, 타원형 수식화에 대해 개선된 오차 추정식을 사용하면 보다 좋은 수렴성을 얻을 수 있었다. 또한 본 방법을 쇼크가 형성되는 고속 압축 유동 문제에 적용하여, 쇼크

를 성공적으로 감지하고 적절한 위치에 절점들이 새로 추가됨을 볼 수 있었다.

#### 참고문헌

- (1) Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L., 1994, "Element-Free Galerkin Methods," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 37, pp. 229~256.
- (2) Liu, W.K., Jun, S. and Zhang, Y.F., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 20, pp. 1081~1106.
- (3) Duarte, C.A. and Oden, J.T., 1995, "Hp Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems," *Technical Report 95-05*, TICAM, University of Texas at Austin.
- (4) Park, S.H. and Youn, S.K., 2001, "The Least-Squares Meshfree Method," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 52, pp. 997~1012.
- (5) Sang-Hoon Park and Sung-Kie Youn, 2001, "Least-Squares Meshfree Method and Integration Error," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 25, No. 10, pp. 1605~1612.
- (6) Lancaster, P. and Salkauskas, K., 1981, "Surfaces Generated by Moving Least-Squares Methods," *Mathematics of Computation*, Vol. 37, pp. 141~158.
- (7) Jiang, B.N., 1998, *The Least-Squares Finite Element Method - Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*, Berlin, Springer-Verlag.
- (8) Oden, J.T. and Reddy, J.N., 1976, *An Introduction to The Mathematical Theory of Finite Elements*, New York, John Wiley & Sons.
- (9) Duarte, C.A., 1996, *The hp Cloud Method*, Ph.D Dissertation, Univ. of Texas at Austin.
- (10) Goodman, J.E. and O'Rourke, J., 1997, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, Boca Raton, CRC Press.
- (11) Currie, I.G., 1993, *Fundamental Mechanics of Fluids*, 2<sup>nd</sup> ed., New York, McGraw-Hill.