

X방향을 따라 선형적 함수구배인 재료에서 전파하는 균열의 응력장과 변위장

이 광 호* · 조 상 봉*

(2001년 8월 31일 접수, 2002년 6월 24일 심사완료)

Stress and Displacement Fields for a Propagating Crack in a Linear Functionally Gradient Material Along X Direction

Kwang Ho Lee and Sang Bong Cho

Key Words: Linear Functionally Gradient Material(선형함수구배재료), Propagating Crack(전파 균열), Nonhomogeneous Fields(비 균질장), Stress Intensity Factor(응력확대계수)

Abstract

Stress and displacement fields for a propagating crack in a functionally gradient material (FGM) which has shear modulus as $\mu = \mu_0(1 + \zeta X)$ are derived. The equations of motion in FGM which is nonhomogeneous material are different from those of homogeneous material. The stress intensity factors in stress fields have influence on odd terms of $r^{n/2-1}$ ($n=1,3,5,\dots$) but stress at crack tip only retains term of $r^{-1/2}$, where the r is a radius of cylindrical coordinates centered at crack tip. When the FGM constant ζ is zero or $r \rightarrow 0$, the fields for FGM are almost same as the those for isotropic material.

1. 서 론

최근에 첨단 기술적인 환경조건이 요구됨에 따라 이에 부합하는 여러 가지 새로운 복합재료가 개발되고 있다. 그 중에서도 물성치가 공간적인 함수 구배를 갖는 재료인 함수구배재료(Functionally Gradient Material; FGM)⁽¹⁻⁵⁾는 단일 재료이지만 기존의 단일재료에서 얻을 수 없는 여러 가지 장점들을 동시에 가질 수 있으므로 사용목적에 따라 여러 가지 형태로 개발되고 있다. 일반적으로 용광로에 사용될 재료는 열저항성 및 부식저항성 그리고 높은 열전도성이 요구된다. 그리고 기어 및 베어링, 금형등에 사용될 재료는 높은 마모성과 파괴인성이 요구된다. 그러나 이러한 요구조건을 만족하는 균질 등방성재료는 극히 소수이다. 그리하여 높은 고온이 요구되는 경

우에는 열저항이 우수한 재료로 내벽처리를 하고 높은 내마모성과 파괴인성이 요구되는 재료에는 초경합금 또는 내마모성이 우수한 재료로 도금처리하여 사용하고 있다. 그러나 균질재료의 표면에 열벽 또는 초경도금처리는 구조적인 관점에서 볼 때, 높은 열응력, 잔류응력으로 인하여 접착부의 취약성을 가진다. 그 결과로 접합재료는 쉽게 균열 또는 탈채현상이 발생하는 단점을 가진다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 FGM재료가 개발되었다. 대개 FGM의 주성분은 철과 세라믹이며, 철의 강성과 세라믹의 열 및 부식저항의 우수함을 이용하여 강성과 열 및 부식저항이 우수한 재료인 FGM을 개발하였다. 그리고 FGM재료는 분말야금, 화학도금, 원심주조등의 방법으로 만들어지며, 공간적으로 그 성분이 변화된다. FGM재료의 공간적인 성분변화는 단성과 물리적인 성질의 변화를 가져오며, 따라서 이러한 재료에 대한 파괴역학적인 해석이 절실히 요구된다. 지금까지 FGM의 파괴역학적인 해석은 주로 정적상태의 균열⁽⁶⁻⁸⁾에 대하여 수행하여 왔으며, 동적인 문제에 대한 해석은

* 책임저자, 회원, 상주대학교 기계공학부

E-mail : khlee@sangju.ac.kr

TEL : (054)530-5404 FAX : (054)530-5407

* 회원, 경남대학교 기계자동화 공학부

Paramswaran과 Shukla⁽⁹⁾ 등이 FGM에서 전파하는 균열선단 부근의 3차수 ($r^{-1/2}, r^0, r^{1/2}$)항의 응력장을 다음과 같이 수행한 바가 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = & 2(\lambda_c + \mu_c)(\beta x + 1) \left\{ A_o r_l^{-1/2} \cos \frac{1}{2} \theta_l \right. \\ & + A_1 + A_2 r_l^{1/2} \cos \frac{1}{2} \theta_l - \frac{\beta}{2\alpha_l^2} A_o r_l^{1/2} \cos \frac{3}{2} \theta_l \\ & + \frac{3(1-\alpha_l^2)\beta}{16\alpha_l^2} A_o r_l^{1/2} \left[\frac{1}{6} \cos \frac{7}{2} \theta_l + \cos \frac{3}{2} \theta_l \right] \\ & \left. + \frac{4\beta\alpha_s}{(k+2)(\alpha_l^2 - \alpha_s^2)} B_o r_s^{1/2} \cos \frac{1}{2} \theta_s \right\} \end{aligned}$$

여기서 A_o 와 B_o 는 응력확대계수와 관계되는 함수이다. 윗식에서 우측부의 6번째항(마지막항)이 응력확대계수와 관계되는 항이지만 균열전파속도가 0에 가까운 경우에는 무한히 증가하다가 균열의 속도가 증가하면 오히려 감소하는 특이 현상을 나타내고 있다. 이러한 현상은 동적 평형방정식에서 팽창파의 항과 회전파의 항이 하나의 짝을 이루고 있는 현상 때문이라 여겨지며, 실험적 또는 수치해석적으로 응력확대계수를 해석하는 경우 저속 균열상태는 해석을 불가능하게 한다. 따라서 본 연구에서는 이러한 문제점들을 해결한 응력장 및 변위장을 유도하여 이들에 대한 특성을 연구하고 저 한다.

2. 전파균열의 응력장과 변위장

2.1 평형방정식 공식화

X방향을 따라 전단계수 $\mu = \mu_o(1 + \zeta X)$ 의 합수를 가질 때 응력과 변위와의 관계는 방정식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁹⁾

$$\begin{aligned} \sigma_x &= [a_{11}\epsilon_x + a_{12}\epsilon_y](1 + \zeta X) \\ \sigma_y &= [a_{12}\epsilon_x + a_{11}\epsilon_y](1 + \zeta X) \\ \sigma_{xy} &= \mu_o \gamma_{xy}(1 + \zeta X) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 ζ 는 FGM 상수, X 는 기준 좌표축, a_{ij} 탄성계수로서 $a_{11} = \lambda_o + 2\mu_o$, $a_{12} = \lambda_o$ 이고 λ_o 와 μ_o 는 $X=0$ 에서 라미의 탄성상수와 전단탄성계수를 나타낸다. 변위와 팽창과 및 회전파와의 관계는 방정식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.⁽¹⁰⁾

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (2)$$

여기서 Φ 와 Ψ 는 팽창파와 회전파에 관계되는 함수이다. 한편 동적인 문제에서 평형방정식은 방정식 (3)과 같다.⁽¹⁰⁾

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3)$$

방정식 (2)를 방정식 (1)에 대입하고 이것을 다시 방정식 (3)에 대입하면 동적상태의 평형방정식 (3)은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \mu_o(1 + \zeta X) \nabla^2 \Phi + 2\mu_o \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial X} + 2\mu_o \zeta \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \\ & = \frac{\rho}{(k+2)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \\ & \mu_o(1 + \zeta X) \nabla^2 \Psi + 2\mu_o \zeta \frac{\partial \Psi}{\partial X} - 2\mu_o \frac{\zeta}{k+2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \\ & = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $k = \lambda_o / \mu_o$ 이다.

균열이 기준좌표계 (X, Y)의 X 방향을 따라 전파할 때 균열선단의 이동좌표계 (x, y)와의 관계는 $x = X - ct$, $y = Y$ 이다. 따라서 방정식 (4)는 방정식 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} a_l^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \beta x \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \\ + 2\beta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2\beta \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} a_s^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \beta x \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \\ + 2\beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{2\beta}{k+2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (5b)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_l &= \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_l}\right)^2}, \quad a_s = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_s}\right)^2}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu_c}{\rho_c}} \\ c_l &= \begin{cases} c_s \sqrt{\frac{2(1-\nu_c)}{1-2\nu_c}} : \text{plane strain,} \\ c_s \sqrt{\frac{2}{1-\nu_c}} : \text{plane stress} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mu_c = \mu_o(1 + a\zeta), \quad \beta(a, \zeta) = \frac{\zeta}{(1 + a\zeta)}$$

a 는 균열의 반 길이, μ_c 와 μ_o 는 각각 균열선단 및 $x = -a$ 에서 전단탄성계수이다. $\beta(a, \zeta)$ 는 균열의 길이와 FGM 상수 ζ 에 의존한다. 균열선단

부근의 응력장과 변위장을 얻기 위하여 균열선단의 좌표를 전체범위로 확장시킨다. 이것은 새로운 좌표계 $\eta_1 = x/\epsilon$, $\eta_2 = y/\epsilon$ 를 도입하므로 확장될 수 있다. 작은 ϵ 값을 선택하므로 균열선단에 가까운 점들은 η_1, η_2 평면의 전체영역으로 확장된다. 새로운 좌표계에 의해 방정식 (5)는 방정식 (6)과 같이 얻어진다

$$\alpha_i^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_2^2} + \epsilon \left[\beta \eta_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_2^2} \right) + 2\beta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} + 2\beta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_2} \right] = 0 \quad (6a)$$

$$\alpha_s^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta_2^2} + \epsilon \left[\beta \eta_1 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta_2^2} \right) + 2\beta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_1} - \frac{2\beta}{k+2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_2} \right] = 0 \quad (6b)$$

균열선단 가까이에서 Φ 와 Ψ 는 방정식 (7)과 같이 ϵ 의 멱급수열로 나타낼 수 있다.

$$\Phi(x, y) = \Phi(\epsilon \eta_1, \epsilon \eta_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n/2+1} \Phi_n(\eta_1, \eta_2) \quad (7)$$

$$\Psi(x, y) = \Psi(\epsilon \eta_1, \epsilon \eta_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n/2+1} \Psi_n(\eta_1, \eta_2)$$

균열전파속도가 0인 경우에는 방정식 (6)의 제 4 번째항과 제 5 번째항의 합이 0가 됨을 고려하고, 방정식 (7)을 방정식 (6)에 대입하여 각 ϵ 의 계수 미분방정식을 0로 두면, 다음과 같은 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\alpha_i^2 \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta_2^2} = -\beta \eta_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi_{n-2}}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{n-2}}{\partial \eta_2^2} \right) - 2\beta(1 - \alpha_s) \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial \eta_1} \quad (8a)$$

$$\alpha_s^2 \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \eta_2^2} = -\beta \eta_1 \left(\frac{\partial^2 \Psi_{n-2}}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{n-2}}{\partial \eta_2^2} \right) - 2\beta(1 - d) \frac{\partial \Psi_{n-2}}{\partial \eta_1} \quad (8b)$$

여기서 $d_i = \alpha_i(1 - \alpha_i^2)/(1 - \alpha_s^2)$

위 방정식에서 Φ_n 와 Ψ_n 는 비균질재료에서 정상

상태로 전파하는 균열의 응력 또는 변위포텐셜 나타내고 있으며, $\beta=0$ 가 0인 경우에는 우측항이 0가 되어 라플라스 방정식으로 된다. 그리고 $\Phi_k(k < 1) = 0$ 이다.

2.2 응력장과 변위장 for $n=1, 2$

방정식 (8)에서 $n=1,2$ 에 대하여 다음과 같은 미분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\alpha_i^2 \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta_2^2} = 0, \quad \alpha_s^2 \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \eta_2^2} = 0 \quad (9)$$

$n=1, 2$ 에 대한 Φ_n, Ψ_n 의 일반적인 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi_n = -Re \int \phi_n(z_i) dz_i, \quad \Psi_n = -Im \int \psi_n(z_s) dz_s \quad (10)$$

여기서 $z_i = \eta_1 + i\alpha_i \eta_2$, $z_s = \eta_1 + i\alpha_s \eta_2$ 이다. 방정식(10)을 Φ_n 및 Ψ_n 을 방정식 (2)에 적용하면 축척변위장은 $\epsilon^{n/2} \{ \phi_n(\eta_1, \eta_2), \psi_n(\eta_1, \eta_2) \}$ 와 같이 표현된다. 그리하여 실제 좌표계에서 변위장은 방정식 (11)과 같은 변위장을 얻을 수 있다.

$$u^o = -Re \{ \phi_n(z_i) + \alpha_s \psi_n(z_s) \} \quad (11)$$

$$v^o = Im \{ \alpha_i \phi_n(z_i) + \psi_n(z_s) \}$$

방정식 (11)을 방정식 (1)에 대입하면 실제 평면에서 응력장은 방정식 (12)와 같이 얻어진다.

$$\sigma_x^o = -\mu Re \{ (1 + 2\alpha_i^2 - \alpha_s^2) \phi'_n(z_i) + 2\alpha_s \psi'_n(z_s) \}$$

$$\sigma_y^o = \mu Re \{ (1 + \alpha_s^2) \phi'_n(z_i) + 2\alpha_s \psi'_n(z_s) \} \quad (12)$$

$$\tau_{xy}^o = \mu Im \{ 2\alpha_i \phi'_n(z_i) + (1 + \alpha_s^2) \psi'_n(z_s) \}$$

변위 포텐셜 $\phi_n(z_i)$ 와 $\psi_n(z_s)$ 를 다음과 같이 멱급수열로 나타내면

$$\phi_n(z_i) = \sum_{n=1}^2 A_n z_i^{n/2}, \quad \psi_n(z_s) = \sum_{n=1}^2 B_n z_s^{n/2} \quad (13)$$

여기서 $z_i = x + i\alpha_i y$, $z_s = x + i\alpha_s y$ 이고 A_n 및

B_n 는 복소상수이다. 방정식 (12)에서 균열면에
서 표면력이 0인 조건을 적용하면, 전파하는 균
열에 대한 응력장 및 변위장이 방정식 (14) ~
(18)과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xn}^o/(1+\beta x) &= \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^o B_I(c)}{\sqrt{2\pi}} n \left\{ (1+2\alpha_i^2 - \alpha_s^2) r_i^{\frac{n-2}{2}} \right. \\ &\quad \times \cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_i - 2\alpha_s h(n) r_s^{\frac{n-2}{2}} \cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_s\right) \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^* B_{II}(c)}{\sqrt{2\pi}} n \left\{ (1+2\alpha_i^2 - \alpha_s^2) r_i^{\frac{n-2}{2}} \sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\alpha_s h(\bar{n}) r_s^{\frac{n-2}{2}} \sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_s\right) \right\} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ym}^o/(1+\beta x) &= \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^o B_I(c)}{\sqrt{2\pi}} n \left\{ -(1+\alpha_s^2) r_i^{\frac{n-2}{2}} \right. \\ &\quad \times \cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_i + 2\alpha_s h(n) r_s^{\frac{n-2}{2}} \cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_s\right) \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^* B_{II}(c)}{\sqrt{2\pi}} n \left\{ -(1+\alpha_s^2) r_i^{\frac{n-2}{2}} \sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\alpha_s h(\bar{n}) r_s^{\frac{n-2}{2}} \sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_s\right) \right\} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xym}^o/(1+\beta x) &= \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^o B_I(c)}{\sqrt{2\pi}} n \left\{ -2\alpha_i r_i^{\frac{n-2}{2}} \right. \\ &\quad \times \sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_i + (1+\alpha_s^2) h(n) r_s^{\frac{n-2}{2}} \sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_s\right) \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^* B_{II}(c)}{\sqrt{2\pi}} n \left\{ 2\alpha_i r_i^{\frac{n-2}{2}} \cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1+\alpha_s^2) h(\bar{n}) r_s^{\frac{n-2}{2}} \cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_s\right) \right\} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} u_n^o &= \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^o B_I(c)}{\mu_c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ &\quad \left\{ r_i^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}\theta_i - \alpha_s h(n) r_s^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}\theta_s\right) \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^* B_{II}(c)}{\mu_c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ &\quad \left\{ r_i^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n}{2}\theta_i - \alpha_s h(\bar{n}) r_s^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n}{2}\theta_s\right) \right\} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} v_n^o &= \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^o B_I(c)}{\mu_c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ &\quad \left\{ -\alpha_i r_i^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n}{2}\theta_i + h(n) r_s^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n}{2}\theta_s\right) \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^* B_{II}(c)}{\mu_c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ &\quad \left\{ \alpha_i r_i^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}\theta_i - h(\bar{n}) r_s^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}\theta_s\right) \right\} \end{aligned} \tag{18}$$

Where $\bar{n} = n + 1$,

$$h(n) = \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_s^2} (n = \text{odd}), \quad \frac{1+\alpha_s^2}{2\alpha_s} (n = \text{even}),$$

$$B_I(c) = \frac{1+\alpha_s^2}{4\alpha_i\alpha_s - (1+\alpha_s^2)^2}, \quad B_{II}(c) = \frac{2\alpha_s}{4\alpha_i\alpha_s - (1+\alpha_s^2)^2}$$

$n=1,2$ 인 경우에서 방정식 (9)는 등방성재료의 동
적 평형방정식형태를 가지나 응력장과 변위장은
FGM상수 ζ 에 영향을 받고 있음을 알 수 있다.

2.3 응력장과 변위장 for $n=3$

방정식 (8)에서 $n \geq 3$ 인 경우에는 Φ_n 과 Ψ_n 는
비 균질적이며, 본 연구에서는 단지 $n=3$ 에 대하
여 응력장 및 변위장을 유도한다. 먼저 응력장을
유도하기 위하여 미분방정식 방정식 (8)의 좌항을
 $\Phi_3 = -\text{Re} \int \phi_1(z_i) dz_i$ 및 $\Psi_3 = -\text{Im} \int \psi_1(z_s) dz_s$ 로
두고 미분 방정식 (8)을 풀면 방정식 (8)의 Φ_3 과
 Ψ_3 의 해는 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$\begin{aligned} \Phi_3(\eta_1, \eta_2) &= \text{Re} \left\{ - \int \phi_3(z_i) dz_i \right. \\ &\quad \left. + \beta \left[\frac{1-\alpha_i^2}{2\alpha_i^2} \eta_1 r_i^2 a_i \phi_1(z_i) + \frac{1-\alpha_s}{3\alpha_s^2} r_i^2 \phi_1(z_i) \right] \right\} \\ \Psi_3(\eta_1, \eta_2) &= \text{Im} \left\{ - \int \psi_3(z_s) dz_s \right. \\ &\quad \left. + \beta \left[\frac{1-\alpha_s^2}{2\alpha_s^2} \eta_1 r_s^2 a_s \psi_1(z_s) + \frac{1-d_i}{3\alpha_s^2} r_s^2 \psi_1(z_s) \right] \right\} \end{aligned} \tag{19}$$

$$\text{여기서 } a_i = \begin{cases} \frac{1}{4} : [\cos \frac{3}{2} \theta_i, \sin \frac{3}{2} \theta_i] \\ \frac{1}{6} : [\cos \frac{1}{2} \theta_i, \sin \frac{1}{2} \theta_i] \end{cases}$$

방정식 (19)의 우측 첫 번째 항은 균질재료에
해당하며, 이어서 비균질과라메타 β 의 영향으로

비균질재료에 해당되는 항이 부가되어 있음을 알 수 있다.

한편 방정식 (19)을 방정식 (2)에 대입하면 상응하는 실제 평면에서 변위장은 방정식 (20), (21)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u_3^f &= u_3^0 - \beta \frac{K_I B_I(c)}{\mu_c \sqrt{2\pi}} r_i^{3/2} \left\{ \frac{1}{\alpha_i^2} \times \right. \\
 &\quad \left. [(1 - \alpha_i^2) F_1(\theta_i) + (1 - \alpha_s) F_2(\theta_i)] \right\} \\
 &- \beta \frac{K_{II} B_{II}(c)}{\mu_c \sqrt{2\pi}} r_s^{3/2} \left\{ \frac{1}{\alpha_s} \times \right. \\
 &\quad \left. [h_1(1 - \alpha_s^2) G_1(\theta_s) + h_2(1 - d) G_2(\theta_s)] \right\} \\
 &- \beta \frac{K_{III} B_{III}(c)}{\mu_c \sqrt{2\pi}} r_i^{3/2} \left\{ \frac{1}{\alpha_i^2} \times \right. \\
 &\quad \left. [(1 - \alpha_i^2) H_1(\theta_i) + (1 - \alpha_s) H_2(\theta_i)] \right\} \\
 &- \beta \frac{K_{III} B_{III}(c)}{\mu_c \sqrt{2\pi}} r_s^{3/2} \left\{ \frac{1}{\alpha_s} \times \right. \\
 &\quad \left. [h_1(1 - \alpha_s^2) I_1(\theta_s) + h_2(1 - d) I_2(\theta_s)] \right\}
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 v_3^f &= v_3^0 - \beta \frac{K_I B_I(c)}{\mu_c \sqrt{2\pi}} r_i^{3/2} \left\{ \frac{1}{\alpha_i} \times \right. \\
 &\quad \left. [(1 - \alpha_i^2) J_1(\theta_i) + (1 - \alpha_s) J_2(\theta_i)] \right\} \\
 &- \beta \frac{K_{II} B_{II}(c)}{\mu_c \sqrt{2\pi}} r_s^{3/2} \left\{ \frac{1}{\alpha_s^2} \times \right. \\
 &\quad \left. [h_1(1 - \alpha_s^2) H_1(\theta_s) + h_2(1 - d) H_2(\theta_s)] \right\} \\
 &+ \beta \frac{K_{III} B_{III}(c)}{\mu_c \sqrt{2\pi}} r_i^{3/2} \left\{ \frac{1}{\alpha_i} \times \right. \\
 &\quad \left. [(1 - \alpha_i^2) G_1(\theta_i) + (1 - \alpha_s) G_2(\theta_i)] \right\} \\
 &+ \beta \frac{K_{III} B_{III}(c)}{\mu_c \sqrt{2\pi}} r_s^{3/2} \left\{ \frac{1}{\alpha_s^2} \times \right. \\
 &\quad \left. [h_1(1 - \alpha_s^2) F_1(\theta_s) + h_2(1 - d) F_2(\theta_s)] \right\}
 \end{aligned} \tag{21}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 F_1(\theta_i) &= \frac{1}{16} \cos \frac{5}{2} \theta_i + \frac{1}{12} \cos \frac{3\theta_i}{2} + \frac{3}{8} \cos \frac{\theta_i}{2}, \\
 F_2(\theta_i) &= \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta_i}{2} + \cos \frac{\theta_i}{2}, \\
 G_1(\theta_i) &= -\frac{1}{16} \cos \frac{5}{2} \theta_i + \frac{1}{12} \cos \frac{3\theta_i}{2} + \frac{1}{8} \cos \frac{\theta_i}{2}, \\
 G_2(\theta_i) &= \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta_i}{2} - \cos \frac{\theta_i}{2}, \\
 H_1(\theta_i) &= -\frac{1}{16} \sin \frac{5}{2} \theta_i + \frac{1}{12} \sin \frac{3\theta_i}{2} - \frac{3}{8} \sin \frac{\theta_i}{2}, \\
 H_2(\theta_i) &= \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta_i}{2} - \sin \frac{\theta_i}{2},
 \end{aligned}$$

$$I_1(\theta_i) = \frac{1}{16} \sin \frac{5}{2} \theta_i + \frac{1}{12} \sin \frac{3\theta_i}{2} - \frac{1}{8} \sin \frac{\theta_i}{2},$$

$$I_2(\theta_i) = \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta_i}{2} + \sin \frac{\theta_i}{2}, \quad j = l, s$$

방정식 (20), (21)을 방정식 (1)에 대입하고 균열표면 ($\theta = \pm \pi$)의 표면력 0을 적용하면 실제평면에서 응력성분은 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{33}/(1 + \beta x) &= \sigma_{33}^0/(1 + \beta x) \\
 &+ \beta \frac{K_I B_I(c)}{\sqrt{2\pi}} r_i^{1/2} \{ (1 + 2\alpha_i^2 - \alpha_s^2) (A_1 C_1 + A_2 C_2) \\
 &\quad - \frac{(1 - \alpha_s^2)}{(1 - \alpha_i^2)} \left[\frac{A_1}{2} (\cos \frac{1}{2} \theta_i + \cos \frac{3}{2} \theta_i) + 4A_2 \cos \frac{1}{2} \theta_i \right] \} \\
 &+ \beta \frac{K_{II} B_{II}(c)}{\sqrt{2\pi}} r_s^{1/2} \{ -2\alpha_s [B_1 h_1 (\frac{1}{4} \cos \frac{1}{2} \theta_s \\
 &\quad - \frac{1}{16} \cos \frac{3\theta_s}{2} + \frac{1}{32} \cos \frac{7}{2} \theta_s) - B_2 \frac{h_2}{2} \cos \frac{3\theta_s}{2}] \} \\
 &+ \beta \frac{K_{III} B_{III}(c)}{\sqrt{2\pi}} r_i^{1/2} \{ -(1 + 2\alpha_i^2 - \alpha_s^2) (A_1 S_1 + A_2 S_2) \\
 &\quad + \frac{(1 - \alpha_s^2)}{(1 - \alpha_i^2)} \left[\frac{A_1}{2} (\sin \frac{3}{2} \theta_i - \sin \frac{1}{2} \theta_i) - 4A_2 \sin \frac{1}{2} \theta_i \right] \} \\
 &+ \beta \frac{K_{III} B_{III}(c)}{\sqrt{2\pi}} r_s^{1/2} \{ 2\alpha_s [B_1 \bar{h}_1 (-\frac{1}{4} \sin \frac{1}{2} \theta_s \\
 &\quad - \frac{1}{16} \sin \frac{3\theta_s}{2} + \frac{1}{32} \sin \frac{7}{2} \theta_s) - \frac{B_2}{2} \bar{h}_2 \sin \frac{3\theta_s}{2}] \}
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{33}/(1 + \beta x) &= \sigma_{33}^0/(1 + \beta x) + \beta \frac{K_I B_I(c)}{\sqrt{2\pi}} r_i^{1/2} \\
 &\quad \left\{ -(1 + \alpha_s^2) (A_1 C_1 + A_2 C_2) + \frac{(1 + \alpha_s^2 - 2\alpha_i^2)}{(1 - \alpha_i^2)} \times \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{A_1}{2} (\cos \frac{1}{2} \theta_i + \cos \frac{3}{2} \theta_i) + 4A_2 \cos \frac{1}{2} \theta_i \right] \right\} \\
 &+ \beta \frac{K_{II} B_{II}(c)}{\sqrt{2\pi}} r_s^{1/2} \{ 2\alpha_s [B_1 h_1 (\frac{1}{4} \cos \frac{1}{2} \theta_s \\
 &\quad - \frac{1}{16} \cos \frac{3\theta_s}{2} + \frac{1}{32} \cos \frac{7}{2} \theta_s) - B_2 \frac{h_2}{2} \cos \frac{3\theta_s}{2}] \} \\
 &+ \beta \frac{K_{III} B_{III}(c)}{\sqrt{2\pi}} r_i^{1/2} \{ (1 + \alpha_s^2) (A_1 S_1 + A_2 S_2) - \\
 &\quad \frac{(1 + \alpha_s^2 - 2\alpha_i^2)}{(1 - \alpha_i^2)} \left[\frac{A_1}{2} (\sin \frac{3}{2} \theta_i - \sin \frac{1}{2} \theta_i) - 4A_2 \sin \frac{1}{2} \theta_i \right] \} \\
 &+ \beta \frac{K_{III} B_{III}(c)}{\sqrt{2\pi}} r_s^{1/2} \{ 2\alpha_s [B_1 \bar{h}_1 (\frac{1}{4} \sin \frac{1}{2} \theta_s \\
 &\quad + \frac{1}{16} \sin \frac{3\theta_s}{2} - \frac{1}{32} \sin \frac{7}{2} \theta_s) + \frac{B_2}{2} \bar{h}_2 \sin \frac{3\theta_s}{2}] \}
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 \tau'_{x3}/(1 + \beta x) &= \tau_{x3}^0/(1 + \beta x) + \beta \frac{K_I B_I(c)}{\sqrt{2\pi}} r_i^{1/2} \{ -2\alpha_i [A_1 \times \\
 &\quad (\frac{1}{4} \sin \frac{1}{2} \theta_i + \frac{1}{16} \sin \frac{3\theta_i}{2} - \frac{1}{32} \sin \frac{7}{2} \theta_i) + \frac{A_2}{2} \sin \frac{3\theta_i}{2}] \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta \frac{K_I B_I(c)}{\sqrt{2\pi}} r_s^{1/2} \{ -(1 + \alpha_s^2) (B_1 h_1 S_1 + B_2 h_2 S_2) \\
 & \quad + \frac{B_1}{2} h_1 (\sin \frac{3}{2} \theta_s - \sin \frac{1}{2} \theta_s) - 4B_2 h_2 \sin \frac{\theta_s}{2} \} \\
 & + \beta \frac{K_{II} B_{II}(c)}{\sqrt{2\pi}} r_l^{1/2} \{ -2\alpha_l [A_1 (\frac{-1}{4} \cos \frac{1}{2} \theta_l \\
 & \quad + \frac{1}{16} \cos \frac{3\theta_l}{2} - \frac{1}{32} \cos \frac{7}{2} \theta_l) + \frac{A_2}{2} \cos \frac{3\theta_l}{2}] \} \\
 & + \beta \frac{K_{II} B_{II}(c)}{\sqrt{2\pi}} r_s^{1/2} \{ -(1 + \alpha_s^2) (B_1 \bar{h}_1 C_1 + B_2 \bar{h}_2 C_2) \\
 & \quad + \frac{B_1}{2} h_1 (\cos \frac{3}{2} \theta_s + \cos \frac{1}{2} \theta_s) + 4B_2 h_2 \cos \frac{\theta_s}{2} \}
 \end{aligned} \tag{24}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1 - \alpha_l^2}{\alpha_l^2}, B_1 = \frac{1 - \alpha_s^2}{\alpha_s^2}, A_2 = \frac{1 - \alpha_s}{\alpha_l^2}, B_1 = \frac{1 - d_l}{\alpha_s^2} \\
 C_1(\theta_j) &= \frac{3}{16} \cos \frac{3}{2} \theta_j + \frac{1}{32} \cos \frac{7}{2} \theta_j, \\
 C_2(\theta_j) &= 2 \cos \frac{\theta_j}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3}{2} \theta_j \\
 S_1(\theta_j) &= \frac{3}{16} \sin \frac{3}{2} \theta_j + \frac{1}{32} \sin \frac{7}{2} \theta_j, \\
 S_2(\theta_j) &= -2 \sin \frac{\theta_j}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{3}{2} \theta_j, \\
 h_1 &= -\frac{14A_1\alpha_l}{[32 - 7(1 + \alpha_s^2)]B_1}, h_2 = \frac{2A_2\alpha_l}{[8 - 3(1 + \alpha_s^2)]B_2}, \\
 \bar{h}_1 &= \frac{A_1 \{ (1 + \alpha_l^2)[7(1 - \alpha_l^2) - 32] + 64\alpha_l^2 \}}{14\alpha_s(1 - \alpha_l^2)B_1}, \\
 \bar{h}_2 &= \frac{-A_2 \{ (1 + \alpha_s^2)[3(1 - \alpha_l^2) - 8] + 16\alpha_l^2 \}}{2\alpha_s(1 - \alpha_l^2)B_2}
 \end{aligned}$$

그리하여 벽급수열 $n = 1 \sim 3$ 의 FGM 응력장과 변위장 σ_{ij}, u_j 는 각각 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^o + \sigma_{ij}^f, \quad u_{ij} = u_{ij}^o + u_{ij}^f \tag{25}$$

본 연구에서 얻어진 응력장은 균열면 ($\theta = \pm \pi$)에서 Traction은 0이며, FGM상수 ζ 가 0인 경우에는 비 균질 파라메타 $\beta(a, \zeta)$ 가 0이 되어 등방성체의 응력장과 변위장으로 변환되며, $r \rightarrow 0$ 로 근접한 영역에서 응력성분과 변위성분도 등방성체의 응력성분 및 변위성분과 같다. 또한 응력확대계수 K 의 지배항은 $n = 1 \sim 3$ 의 합인 응력장에서는 $r^{-1/2}$ 뿐만 아니라 $r^{1/2}$ 의 항에도 영향을 미치며 변위장에서는 $r^{1/2}$ 과 $r^{3/2}$ 항에 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 또한 그 이상의 고차항

을 계산하여도 응력확대계수는 $r^{n/2-1}$ ($n = \text{odd}$)의 항에 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 축척된 응력성분 σ_{ij} 는 $\epsilon^{n/2-1} \mu \{ \phi_n(\eta_1, \eta_2), \psi_n(\eta_1, \eta_2) \}$ 임을 고려하면 균열선단 ($\epsilon \rightarrow 0$)의 응력장은 $n \geq 3$ 의 항은 0이 된다. 따라서 FGM재료의 균열선단부근의 응력장과 변위장은 방정식 (14) ~ (18)로 표시된다. 그러나 균열선단에서 약간 떨어진 영역에서 응력장은 방정식 (25)와 같이 나타낼 수 있다.

일반적으로 등방성재료의 응력확대계수를 실험적 또는 수치해석적으로 해석하는 경우 응력장의 제 1항 (응력확대계수항) 또는 제 1항과 2항 (σ_{ox} : x방향의 등 응력)의 합의 응력장을 적용한다. 그러나 FGM재료에서는 균열선단에서 약간 떨어진 영역에서 실험데이터를 추출하여 해석하는 경우 방정식 (25)를 사용할 수 있다.

이론적으로 응력확대계수의 지배영역은 변위장에 있어서는 균열의 길이에 비해 r 가 매우 작은 영역에서 유효하다. 그러나 응력장에 있어서 응력확대계수의 지배영역이 r 가 매우 작은 경우, 응력은 이론적으로 무한값을 가지나 실제로는 균열선단의 소성변위로 인하여 유한값을 가지므로 유효하지 않다. 그럼에도 불구하고 응력확대계수의 지배영역이 소성영역을 완전히 둘러싸고 있다면, 소성영역을 제외한 탄성영역에서 응력확대계수는 재료의 파괴과정 및 특성을 결정한다고 여겨진다. 대개 평면응력상태에서 응력확대계수의 지배영역은 $r > h/2$ (h : 판의 두께)이다.⁽¹¹⁾

3. FGM재료에서 전파하는 균열의 특성

FGM에서 전파하는 균열선단에서 균열의 전파 특성을 이해하기 위하여 사용된 FGM재료는 이미 Parameswaran and Shukla⁽⁵⁾ 등이 개발한 폴리 에스테르가 주성분인 FGM이며 기계적 성질은 Table 1과 같다. Table 1과 같은 FGM의 전단 탄성계수의 변화는 Fig. 1과 같으며, 균열길이에 따른 비 균질 파라메타 β 는 Fig. 2와 같다. 본 연구에서 사용된 β 값은 2.051/m 및 -2.581/m이다. 이것은 외측균열에서는 균열의 길이 $a = 5\text{cm}$ 인 경우이며, 중앙균열에서는 균열의 길이 $2a = 10\text{cm}$ 인 경우이다. 그리고 $\zeta = 0$ 인 경우는 β 는 항상 0이다. 본 연구에서 균열선단부근의 전파균열의 응

Table 1 Mechanical properties for Polyester FGM

Nonhomogeneous	$\mu(X) = 1.316(1 + \zeta X)$
Shear Modulus, $\mu(X)$	(GPa)
FGM constant, ζ	$\zeta = 2.2857 \text{ (m}^{-1}\text{)}$
Poisson's ratio, ν	$\nu = 0.33$
Crack tip density, ρ_c	$\rho_c = 1200 \text{ (Kg/m}^3\text{)}$

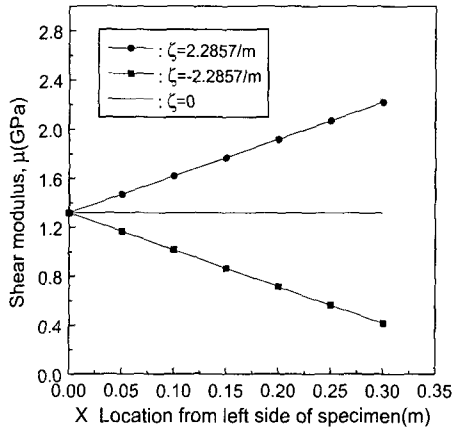


Fig. 1 Variation of shear modulus μ with X location

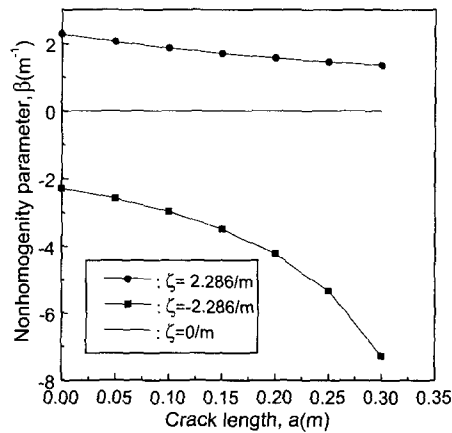


Fig. 2 Nonhomogeneity parameter β with crack length

력특성을 얻고져 방정식 (14) ~ (16)의 응력확대계수항의 식을 적용하였다. 단 Fig. 9와 10의 광탄성해석은 응력장 (25)를 적용하였다.

Fig. 3은 FGM상수 $\zeta=2.286/m$ 및 비 균질 파라메타 $\beta=2.05/m$ 인 FGM의 외부에 모드 I 하중이

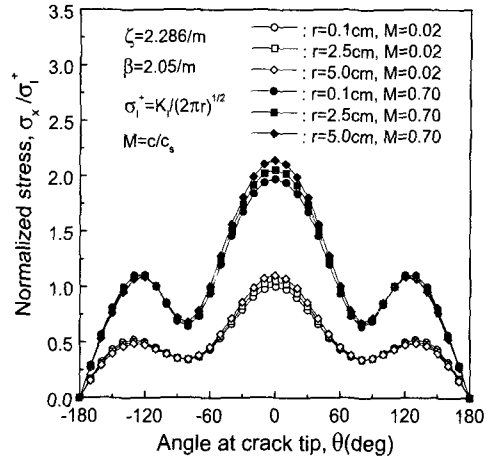


Fig. 3 normalized stress σ_x/σ_I^+ with θ

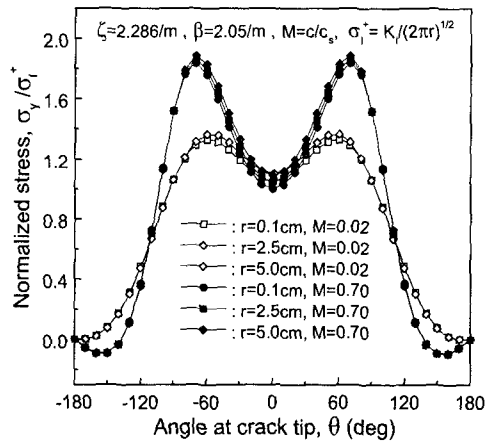


Fig. 4 normalized stress σ_y/σ_I^+ with θ

작용할 때 정지균열 및 전파하는 균열선단부근의 무차원 응력 σ_x/σ_I^+ 를 나타내고 있다. σ_x/σ_I^+ 는 균열의 전파속도가 증가함에 따라 증가하며, $\theta=0^\circ$ 에서 최대값, $\theta=180^\circ$ 에서 0을 가진다. 한편 균열선단에서 임의의 점까지 거리 $r=0.1cm$ 에서 응력값은 거의 균질재료의 응력값과 같다. 그럼에서 알 수 있듯이 모드 I 하중상태하에서 ζ 가 +인 경우의 FGM에서 발생하는 응력 σ_x 는 r 가 증가할수록 균질재료에 발생하는 응력보다 크게 발생하고 있으며 발생하는 그 차는 $\theta=0^\circ$ 에서 가장 크다. 한편 정지균열상태에서는 $\theta=90^\circ$, 즉 균열끝 y축선상 ($x=0, y$)에서 발생하는 응력 σ_x 는

FGM상수 ζ 에 영향을 받지 않고 일정한 응력 σ_x 값을 가지나 균열의 전파속도가 $M=0.7$ 인 경우에는 $\theta=110^\circ$, 즉 y 축을 기준으로 약간 뒤로 향하는 각도($x < 0, y$)에서 응력 σ_x 는 ζ 의 영향을 받지 않고 일정한 값을 가진다. 이러한 현상은 균열전파속도의 영향으로 여겨진다.

Fig. 4는 FGM상수 $\zeta=2.286/m$, 비 균질 파라메타 $\beta=2.05/m$ 상태에서 정지균열 및 전파하는 균열선단부근의 무차원 응력 σ_y/σ_I^+ 를 나타내고 있다. σ_y/σ_I^+ 는 균열의 전파속도가 증가함에 따라 증가하며, $\theta=60^\circ$ (정지균열) 또는 70° ($M=0.7$)에서 최대값, $\theta=180^\circ$ 에서 0을 가진다. FGM상수의 영향을 받는 각도는 $|\theta| \leq 80^\circ$ 이며 나머지 각도에서는 거의 영향을 받지 않는다. 특히 FGM상수가 응력변화에 가장 크게 영향을 미치는 각도는 $\theta=0^\circ$ 이며 또한 모드 I 하중상태하에서 FGM에서 발생하는 응력 σ_y 는 r 이 증가 할수록 균질재료에서 발생하는 응력보다 증가함을 알 수 있다. 그리고 $\theta=\pm 90^\circ$ 부근의 응력 σ_y/σ_I^+ 는 FGM상수에 영향을 받지 않고 일정한 값을 가진다.

Fig. 5는 FGM상수 $\zeta=2.286/m$, 비 균질 파라메타 $\beta=2.05/m$ 상태에서 정지균열 및 전파하는 균열선단부근의 무차원 응력 τ_{xy}/σ_I^+ 를 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 모드 I 하중상태하에서 발생하는 응력 τ_{xy} 는 $\theta=110^\circ$ 부근에서 FGM상수 ζ 에 영향을 받으며, 나머지 각도에서는 거의 영향을 받지 않음을 알 수 있다. $\theta=110^\circ$ 부근에서 발생하는 응력 τ_{xy} 는 r 이 증가 할 수 록 균질재료에서 발생하는 응력보다 약간 감소한다. $\theta=0^\circ, \pm 180^\circ$ 에서 응력 τ_{xy} 는 0이며, $\theta=\pm 110^\circ$ 에서 최대 값을 갖는다.

Fig. 3 ~ 5를 통하여 알 수 있듯이 FGM에 내재된 균열이 모드 I 하중을 받아 균열이 전파할 때 균열전파속도가 증가할 수 록 균열선단부근의 무차원 응력성분 σ_{ij}/σ_I^+ 은 증가한다. 이것은 모드 I 하중상태에서 균열이 전파할 때, 균열 전파속도가 증가할수록 실제의 응력확대계수 K_{II} 가 증가함을 고려하면, 균열전파속도에 따른 응력성분 σ_{ij} 의 증가는 Fig. 3 ~ 5에서 나타난 것 보다 더 크

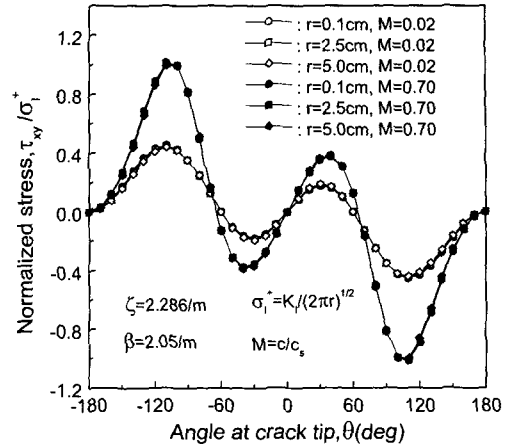


Fig. 5 normalized stress τ_{xy}/σ_I^+ with θ

다고 하겠다. 그리고 σ_x 와 σ_y 는 $\theta=0^\circ$ 근방에서 r 의 증가에 대한 무차원 응력성분 증가가 가장 크며, 이것은 r 이 $+x$ 방향으로 증가하는 경우 전단탄성계수가 증가하므로 따라서 FGM에서 응력은 균질재료의 응력보다 크게 발생된다고 하겠다. 그러나 τ_{xy} 는 어떠한 각도에서도 r 이 증가하더라도 거의 균질재료의 응력값과 같은 값을 가진다. 그리고 응력성분 σ_{ij} 는 정지균열에서는 y 축선($\theta=\pm 90^\circ$)을 따라, $M=0.7$ 의 전파균열에서는 y 축에서 약간 외쪽으로 기울어진 각($\theta \approx \pm 110^\circ$)에서 발생하는 FGM의 응력성분들은 r 에 관계없이 일정한 무차원 응력값을 가지므로 균질재료에서 발생하는 응력값과 같은 값을 가진다.

Fig. 6은 FGM상수 $\zeta=2.286/m$, 비 균질 파라메타 $\beta=2.05/m$ 상태에서 정지균열 및 전파하는 균열선단부근의 무차원 응력 σ_x/σ_{II}^+ 를 나타내고 있다. σ_x/σ_{II}^+ 는 균열의 전파속도가 증가함에 따라 증가하며, $\theta=\pm 180^\circ$ 에서 절대최대값을 가지며, $\theta=0^\circ$ 에서는 r 에 관계없이 항상 0이다. 따라서 모드 II 하중상태에서 $\theta=0^\circ$ 에서 발생하는 응력 σ_x 는 FGM상수에 영향을 받지 않는다. FGM상수가 응력에 가장 크게 영향을 미치는 각도 $\theta=\pm 180^\circ$ 이며, r 이 증가할 수 록 균질재료에서 발생하는 응력보다 작게 발생한다. 이것은 r 가 $-x$ 방향으로 증가하면 전단탄성계수 μ 는 감소하므로 x 방향 응력성분 σ_x 는 감소한다.

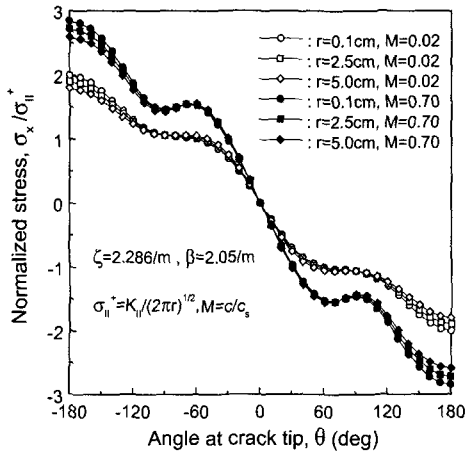


Fig. 6 normalized stress σ_x/σ_{II}^+ with θ

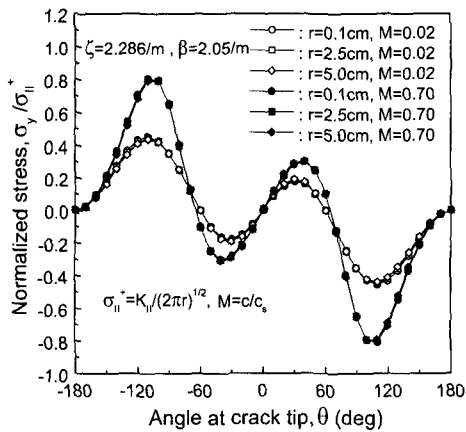


Fig. 7 normalized stress σ_y/σ_{II}^+ with θ

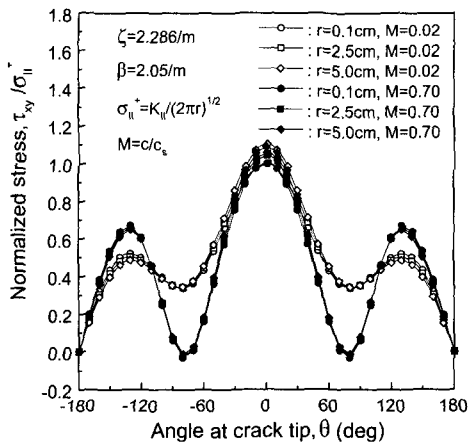


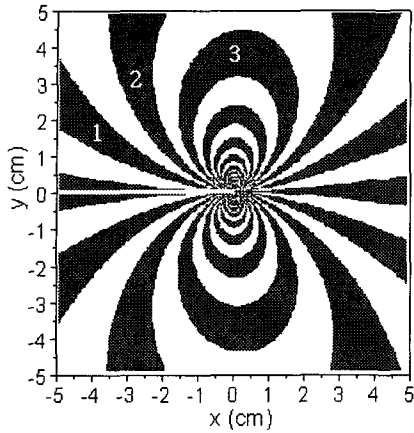
Fig. 8 normalized stress τ_{xy}/σ_{II}^+ with θ

Fig. 7은 FGM상수 $\zeta=2.286/m$, 비 균질 파라메타 $\beta=2.05/m$ 상태에서 정지균열 및 전파하는 균열선단부근의 무차원 응력 σ_y/σ_{II}^+ 를 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 모드 II 하중상태하에서 발생하는 응력 σ_y 는 FGM상수 ζ 에 거의 영향을 받지 않음을 알 수 있다. 응력은 $\theta=0^\circ, \pm 180^\circ$ 에서 0이며, $\theta=\pm 110^\circ$ 에서 최대이다.

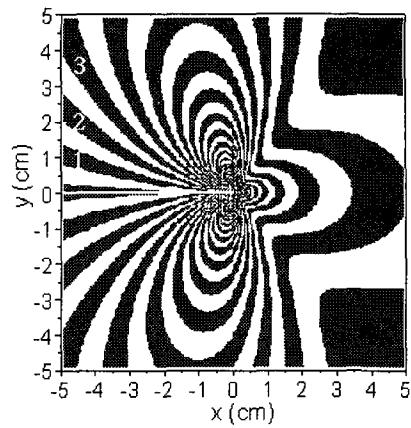
Fig. 8은 FGM상수 $\zeta=2.286/m$, 비 균질 파라메타 $\beta=2.05/m$ 상태에서 정지균열 및 전파하는 균열선단부근의 무차원 응력 τ_{xy}/σ_{II}^+ 를 나타내고 있다. τ_{xy}/σ_{II}^+ 는 $\theta=\pm 140^\circ$ 및 0° 부근에서 FGM상수의 영향을 주로 받고 있음을 알 수 있다. 특히 FGM상수가 응력변화에 가장 크게 영향을 미치는 각도는 $\theta=0^\circ$ 이며, FGM에서 발생하는 응력 τ_{xy} 는 r 이 증가 할수록 균질재료에서 발생하는 응력보다 증가한다. 그러나 $\theta=\pm 140^\circ$ 부근에서는 FGM에서 발생하는 응력 τ_{xy} 는 r 이 증가 할수록 균질재료에서 발생하는 응력보다 감소한다. 이러한 현상은 $\theta=0^\circ$ 에서는 r 가 $+x$ 방향으로 증가하며, 이 경우에는 FGM의 물성치가 증가와 더불어 FGM의 응력이 증가하며, $\theta=140^\circ$ 에서는 r 가 $-x$ 방향으로 증가하므로 FGM의 물성치 감소와 더불어 응력은 감소하는 것은 당연하다고 여겨진다.

Fig. 6~8을 통하여 알 수 있듯이 FGM에 내재된 균열이 모드 II 하중을 받아 균열이 전파할 때 σ_x 는 $\theta=\pm 180^\circ$, τ_{xy} 는 $\theta=0^\circ$ 부근에서 r 증가에 대한 무차원 응력성분 증가가 가장 크며, 응력성분 σ_y 는 어떠한 각도에서도 r 가 증가하더라도 거의 비슷한 응력값을 가진다. 그리고 정지균열에서 σ_{ij} 는 모두 y 축선($\theta=\pm 90^\circ$)을 따라 일정한 무차원 응력값을 가지나, $M=0.7$ 의 전파균열에서는 σ_{ij} 의 성분에 따라 그 각도가 조금 다르다.

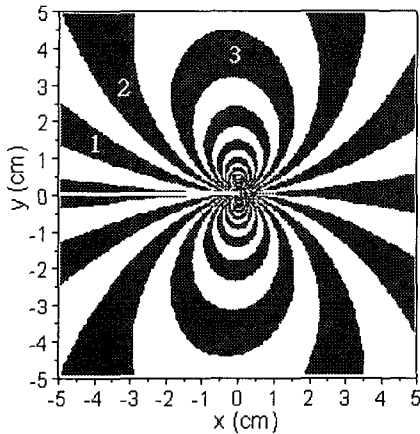
Fig. 9와 10은 FGM 응력장 (25)에서 응력확대 계수항만을 응력-광 법칙⁽¹⁰⁾에 적용하여 얻은 정적 및 전파균열선단부근에 대한 이론적인 광탄성 무늬 형태를 나타내고 있다. Fig. 9에서 알 수 있듯이 FGM의 상수 ζ 가 +인 경우에는 광탄성 무늬형태가 균열 전방으로 기울며, -인 경우에는 균열 후방으로 기울다. 이것은 ζ 가 +인 경우에는 x



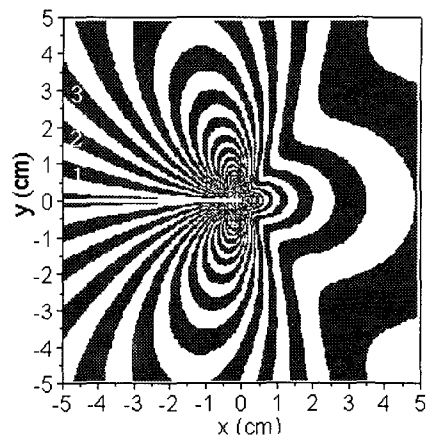
(a) $\zeta=2.286/m, \beta=2.05/m, M=0.02$



(a) $\zeta=2.286/m, \beta=2.05/m, M=0.7$



(b) $\zeta=-2.286/m, \beta=-2.58/m, M=0.02$



(b) $\zeta=-2.286/m, \beta=-2.58/m, M=0.7$

Fig. 9 Isochromatic fringe patterns obtained for a static crack tip under $K_I=1.0\text{MPa}\sqrt{m}$, $f=6500\text{N/m}$, $h=9.5\text{mm}$ and $\sigma_{ox}=0$

Fig. 10 Isochromatic fringe patterns obtained for a crack propagating tip under $K_I=1.0\text{MPa}\sqrt{m}$, $f=6500\text{N/m}$, $h=9.5\text{mm}$ and $\sigma_{ox}=0$

가 증가함에 따라 전단탄성계수가 증가하며, 이에 비례하여 최대 전단응력(τ_{\max})이 증가하기 때문이며, ζ 가 -인 경우에는 x 가 증가함에 따라 전단 탄성계수가 감소하기 때문에 이러한 현상이 발생하는 것은 당연하다고 여겨진다. 그러나 r 가 0으로 근접하면 이러한 기우는 현상이 사라진다. 다시말해 $r \rightarrow 0$ 인 경우에는 FGM의 응력성분은 등방성체의 응력성분과 일치하기 때문이다.

Fig. 10은 Fig. 9와 같은 조건하에서 $M=0.7$ 로 전파하는 균열선단부근에 대한 FGM의 광탄성 무

늑 형태를 나타내고 있다. 일반적으로 전파균열에서는 균열진행방향과 반대방향으로 광탄성무늬가 향한다. 그림에서 알 수 있듯이 전파하는 균열선단의 광탄성무늬는 FGM의 상수 ζ 의 영향으로 ζ 가 -인 경우가 +인 경우보다 더 진행방향의 반대로 향하고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 FGM의 물성치가 선형적일 때

전파하는 균열에 대한 $n=1 \sim 3$ 항의 응력장 및 변위장을 유도하고 균열선단 부근의 전파균열 특성에 대하여 연구하였다. 본 연구에서 얻어진 응력장과 변위장은 균열전파속도가 0에 가까운 저속인 경우에도 적용할 수 있으며, 세부적인 결론은 다음과 같다.

(1) FGM에서 전파하는 균열선단부근의 응력장과 변위장은 방정식 (25)로 나타낼 수 있다.

(2) 본 연구에서 유도된 FGM의 응력 및 변위장은 FGM상수 $\zeta=0$ 또는 $r \rightarrow 0$ 인 경우에는 등방성체의 응력 및 변위성분과 같다.

(3) FGM 상수 $\zeta > 0$ 인 경우, 모드 I 하중하에서 전파하는 균열에 대하여

(i) σ_x 와 σ_y 는 $\theta=0^\circ$ 근방에서 FGM 상수 ζ 의 영향을 가장 많이 받으며, r 가 증가 할수록 FGM에서 응력은 균질재료의 응력보다 크게 발생된다. 그러나 τ_{xy} 는 어떠한 각도에서도 FGM 상수 ζ 의 영향을 거의 받지 않는다.

(ii) 응력성분 σ_{ij} 는 정지균열에서는 y 축선 ($\theta = \pm 90^\circ$)을 따라, $M=0.7$ 의 전파균열에서는 y 축에서 약간 외쪽으로 기울어진 각 ($\theta \approx \pm 110^\circ$)에서 발생하는 FGM의 응력성분들은 FGM 상수 ζ 의 영향을 받지 않는다.

(4) FGM 상수 $\zeta > 0$ 인 경우, 모드 II 하중하에서 전파하는 균열에 대하여

(i) σ_x 는 $\theta = \pm 180^\circ$, τ_{xy} 는 $\theta=0^\circ$ 근방에서 FGM상수 ζ 에 영향을 많이 받으며, 응력성분 σ_y 는 어떠한 각도에서도 ζ 에 영향을 받지 않는다.

(ii) σ_{ij} 는 정지균열에서는 y 축선 ($\theta = \pm 90^\circ$)을 따라 일정한 무차원 응력값을 가지나, $M=0.7$ 의 전파균열에서는 σ_{ij} 의 성분에 따라 $\theta=70^\circ \sim 110^\circ$ 의 범위에서 일정한 무차원 응력값을 가진다.

(5) 모드 I 상태하에서 광탄성 무늬형태는 FGM 상수 ζ 의 영향을 받는 영역에서 $\zeta > 0$ 인 경우에는 등방성 균열의 광탄성무늬보다 균열 전방으로 더 기울며, $\zeta < 0$ 인 경우에는 반대이다.

참고문헌

(1) Niino, M., Hirai, T. and Watanabe, R., 1987.

"The Functionally gradient," *Journal of Japanese Society of Composite Materials*, Vol. 13, No. 1, p. 257.

(2) Butcher, R.J., Rousseau, C.E. and Tippu, H.V., 1999, "A Functionally Graded Particulate Composite: Preparation, Measurements, Failure Analysis," *Acta Mater.*, Vol. 47, No. 1, pp. 259~268.

(3) Jedamzik, R., Neubrand, A. and Rodel J., 2000, "Production of Functionally Graded Materials from Electrochemically modified Carbon Preforms," *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 83, No. 4, pp. 983~985.

(4) Zeng, Y.P., Jiang, D.L. and Watanabe T., 2000, "Fabrication and Properties of Tape-Cast Laminated and Functionally Gradient Alumina-Titanium Carbide Materials," *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 83, No. 12, pp. 2999~3003.

(5) Parameswaran, V. and Shukla, A., 2000, "Processing and Characterization of a Model Functionally Gradient Material," *Journal of Materials Science*, Vol. 35, pp. 21~29.

(6) Erdogan, F., 1995, "Fracture Mechanics of Functionally Graded Materials," *Composite Engineering*, Vol. 5, No. 7, pp. 753~770.

(7) Gu, P. and Asaro, R.J., 1997, "Cracks in Functionally Graded Materials," *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 34, No. 1, pp. 1~17.

(8) Jin, Z.H. and Batra, R.C., 1996, "Some Basic Fracture Mechanics Concept in Functionally Graded Materials," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 44, No. 8, pp. 1221~1235.

(9) Parameswaran, V. and Shukla A., 1999, "Crack-Tip Stress Fields for Dynamic Fracture in Functionally Gradient Materials," *Mechanics of Materials*, Vol. 31, pp. 579~596.

(10) Freund, L. B., 1990, "Dynamic Fracture Mechanics," Cambridge University Press, Cambridge.

(11) Rosakis, A.J. and Ravi-Chandar, K., 1986, "On Crack Tip Stress State : An Experimental Evaluation of Three-Dimension Effects," *Int. J. of Solid and Struct.*, Vol. 22, pp. 121~134.