

論文2002-39SC-3-1

파라미터 불확실성 시스템에 대한 견실 비약성 H^∞ 제어기 설계 (Robust Non-fragile H^∞ Controller Design for Parameter Uncertain Systems)

曹 尙 鉉 * , 金 起 台 * , 朴 烘 培 *

(Sang Hyun Cho, Ki Tae Kim, and Hong Bae Park)

요 약

본 논문에서는 구조화된 어파인(affine) 파라미터 불확실성을 가지는 시변 선형시스템과 구조적 불확실성을 가지는 상태궤환 제어기에 대한 견실 비약성 H^∞ 제어기 설계방법을 다루었다. 또한 견실 비약성 H^∞ 제어기가 존재할 충분조건, 제어기 설계방법 및 비약성을 만족하는 제어기의 콤팩트 집합(compact set)을 제시하였다. 이 때 제시한 조건은 변수치환과 슈어 여수(Schur complement)정리를 통하여 선형행렬부등식(LMI : Linear Matrix Inequality)의 계수가 콤팩트 집합 내의 파라미터의 함수로 정의되는 파라미터화 선형행렬부등식(PLMIs: parameterized Linear Matrix Inequalities)으로 표현되므로 분리 블록개념(separated convexity concepts)에 기초한 완화기법을 이용하여 유한개의 LMI로 변환하였다. 그리고 본 논문에서 제시한 견실 비약성 H^∞ 제어기가 제어기이득의 변화에도 불구하고 폐루프시스템의 점근적 안정성(asymptotic stability)과 외란감쇠 성능을 보장함을 보였다.

Abstract

This paper describes the synthesis of robust and non-fragile H^∞ state feedback controllers for linear varying systems with affine parameter uncertainties, and static state feedback controller with structured uncertainty. The sufficient condition of controller existence, the design method of robust and non-fragile H^∞ static state feedback controller, and the set of controllers which satisfies non-fragility are presented. The obtained condition can be rewritten as parameterized Linear Matrix Inequalities(PLMIs), that is, LMIs whose coefficients are functions of a parameter confined to a compact set. However, in contrast to LMIs, PLMIs feasibility problems involve infinitely many LMIs hence are inherently difficult to solve numerically. Therefore PLMIs are transformed into standard LMI problems using relaxation techniques relying on separated convexity concepts. We show that the resulting controller guarantees the asymptotic stability and disturbance attenuation of the closed loop system in spite of controller gain variations within a degree.

Keyword : Non-fragile control, robust H^∞ control, state feedback, parameterized Linear Matrix Inequality

* 正會員, 慶北大學校 電子電氣工學部

(School of Electronic and Electrical Engineering, Kyungpook National University)

※ 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R02-2000-00262)지원으로 수행되었음

接受日字:2001年7月19日, 수정완료일:2002年5月6日

I. 서 론

최근 플랜트의 불확실성에 견실하거나 하나의 성능 지수에 대해 시스템을 최적화한 궤환제어시스템에 관한 연구들의 경우 일반적으로 설계된 제어기가 정확하

게 구현되었다는 가정을 내포하고 있다. 즉, 플랜트의 불확실성은 제어시스템 설계시 주요 관심사가 되어 왔지만 제어기 파라미터의 불확실성은 그동안 무시되어져 왔다. 하지만 설계된 제어기를 실제로 구현할 때 A/D변환·D/A변환과정에서 발생하는 오차, 컴퓨터 기억용량의 한계와 디지털 워드길이의 한계 등으로 인하여 제어기의 정확한 구현은 불가능하고 제어기 계수값의 미세한 변동은 전체 폐루프시스템의 성능 및 안정성을 해칠 수 있다^[1,2]. 그리고 제어기가 정확하게 구현되었다고 하더라도 폐루프시스템의 성능을 향상시키기 위해서는 제어기의 튜닝을 통한 제어기 계수값의 변동이 필수적이다. 그러므로 제어기 계수값의 변동에도 견딜 수 있는 제어기설계가 요구되며 최근 제어기의 약성을 고려한 제어시스템 설계에 관한 많은 연구가 이루어지고 있다^[1-9].

최근 연구결과들을 살펴보면 Keel 등^[2]은 설계된 제어기가 부정확하게 구현된 경우 성능 및 안정성 저하를 유발시킨다는 것을 보였고, Dorato 등^[5]은 한정기호 제거(symbolic quantifier elimination)를 이용한 비약성 제어기(non-fragile controller) 설계기법을 제시하였다. 그리고 Haddad 등^[7]은 자승적 리아프노프 한계(quadratic Lyapunov bounds)를 이용한 비약성제어 설계기법을 제시하였고 Famularo 등^[6]과 Jadbabie 등^[8]은 플랜트 및 제어기 불확실성을 고려한 LQ 견실 비약성 상태제환 제어기를 제안하였다. 그러나 Haddad 등은 구조화된 제어기이득 섭동을 고려하지는 못하였고, Famularo 등은 비약성의 정도를 직접 얻지 못하고 미리 비약성 정도를 설정하였다. 그리고 견실 비약성 H^∞ 제어기(robust and non-fragile H^∞ controller) 설계에 관한 연구는 거의 찾아볼 수 없다. Kim 등^[9]은 선형행렬부등식(LMI: linear matrix inequality)을 이용하여 시간지연을 가지는 시스템에 대한 견실 비약성 H^∞ 제어기 설계기법을 제안하여 H^∞ -노움 한계 및 비약성의 정도를 동시에 구하였으나 역시 구조화된 제어기이득 섭동은 고려하지 못하여 보수적인(conservative) 결과를 얻었으며 시스템의 불확실성도 시스템 행렬 A로 한정하였다.

따라서 본 논문에서는 모든 시스템 행렬에 어파인(affine) 파라미터 불확실성을 가지는 시스템에 대하여 구조적 제어기이득 섭동을 고려한 견실 비약성 H^∞ 제어기가 존재할 충분조건 및 상태제환 견실 비약성 H^∞ 제어기 설계방법을 제시한다. 이 때, 견실 비약성 H^∞

제어기가 존재할 충분조건은 선형행렬부등식 계수가 compact set) 내의 파라미터의 함수로 정의되는 파라미터화 선형행렬부등식(PLMIs: parameterized LMIs)으로 나타나는데, PLMI는 파라미터의 값에 따라 무한히 많은 LMI로 표현되므로 수치적으로 그 해를 구하는 것이 거의 불가능하다. 그러므로 완화기법(relaxation technique)^[10,11]을 이용하여 유한개의 LMI로 형태를 변환하고 이러한 LMI의 한정해로부터 상태제환 견실 비약성 H^∞ 제어기를 구한다. 본 논문의 구성은 2장에서 PLMI의 정의와 기본성질에 대해 설명하고, 3장에서 어파인 파라미터 불확실성을 가지는 시간지연 시스템에 대해서 견실 비약성 H^∞ 제어기가 존재할 충분조건과 견실 비약성 H^∞ 제어기 설계기법을 제시한다. 그리고 4장에서 예제를 통하여 제시한 설계기법의 타당성을 확인하고, 마지막으로 5장에서 결론을 맺는다.

II. PLMI의 정의와 기본성질

compact set) 내의 파라미터의 값에 따라 LMI가 결정되는 PLMI의 형태로

$$M_0(z) + \sum_{i=1}^L \theta_i M_i(z) + \sum_{1 \leq i < j \leq L} \theta_i \theta_j M_{ij}(z) < 0 \quad (1)$$

을 고려한다. 여기서 z 는 결정변수이며 파라미터 θ_i 에 1차적으로 종속되는 $M_i(z)$ 와 파라미터 θ_i 에 2차적으로 종속되는 $M_{ij}(z)$ 는 z 에 대한 어파인 대칭행렬함수이다. 그리고 파라미터 θ 는

$$\theta \in \Gamma := \left\{ \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L) : \sum_{i=1}^L \theta_i = 1, \theta_i \geq 0, i=1, 2, \dots, L \right\} \quad (2)$$

의 폴리토프(polytope)나

$$\theta \in \Gamma = [p, q]; p \geq 0, q > 0, p \in \mathbb{R}^L, q \in \mathbb{R}^L \quad (3)$$

의 다각형(hyper-rectangle)의 집합에 한정되는 값으로 시스템의 불확실성이나 가상적으로 나타나는 동작조건을 의미한다.

그런데 식 (1)의 PLMI는 파라미터 θ 값에 따라 무한히 많은 LMI를 포함하고 있으므로 모든 LMI를 만족하는 해를 수치적으로 구하는 것이 거의 불가능하다. 따라서 유한개의 LMI로 변환하는 완화기법을 이용한다.

이러한 방법은 보수적인(conservative) 방법이기에는 하지 만 매우 많은 계산량이 요구되는 실제적인 문제에서 보다 효율적인 접근방법을 제공한다.

보조정리 1[11] : 만일 자승적 조건

$$\begin{aligned}
 & x^T M_0(z)x + \sum_{i=1}^L \theta_i x^T M_i(z)x \\
 & + \sum_{1 \leq i, j \leq L} \max \left\{ -x^T M_{ij}(z)x \right. \\
 & \left. \left(\frac{\theta_i^2 + \theta_j^2}{2} - \frac{\theta_i + \theta_j}{2} + 0.125 \right) \right\}, \\
 & x^T M_{ij}(z)x \frac{\theta_i^2 + \theta_j^2}{2} < 0, \\
 & \forall \|x\| = 1, \theta \in \text{vert}\Gamma
 \end{aligned} \tag{4}$$

가 만족된다면 PLMI 문제 (1)와 (2)는 해 z 를 가진다.

보조정리 1에서

$$\begin{aligned}
 & \max \left\{ -x^T M_{ij}(z)x \left(\frac{\theta_i^2 + \theta_j^2}{2} - \frac{\theta_i + \theta_j}{2} + 0.125 \right), \right. \\
 & \left. x^T M_{ij}(z)x \frac{\theta_i^2 + \theta_j^2}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

는 $\theta_i + \theta_j \leq 1$ 를 만족하는 $\theta_i \theta_j x^T M_{ij}(z)x$ 의 상한치임을 알 수 있다. 따라서, 만일 집합 Γ 이

$$\begin{aligned}
 \Gamma: = \left\{ \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L) : \sum_{i=1}^L \theta_i = a, \right. \\
 \left. \theta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, L \right\}
 \end{aligned} \tag{5}$$

과 같이 정의되고 $a > 1$ 이라면 $\bar{\theta}_i = \theta_i/a$ 의 변수치환을 이용하여 $\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j \leq 1$ 의 조건을 만족할 수 있다. 그리고 파라미터가 식 (3)의 제약조건을 만족하는 경우에도 $\bar{\theta}_i = (p + \theta_i)/(q - p)$ 의 변수치환을 이용하면

$$\bar{\theta} \in [0, 1]^L \tag{6}$$

의 관계식을 구할 수 있다.

III. 건실 비약성 H^∞ 제어기 설계

어파인 파라미터 불확실성을 가지는 시스템

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A(t, a)x(t) + B_1(t, a)w(t) + B_2(t, a)u(t) \\
 z(t) &= C(t, a)x(t)
 \end{aligned} \tag{7}$$

을 고려한다. 여기서 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 는 상태, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 는 제어입력, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ 는 $L[0, \infty)$ 에 속하는 외란, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ 는 제어출력이고, $A(t, a), B_1(t, a), B_2(t, a), C(t, a)$ 는 각각

$$\begin{aligned}
 A(t, a) &= A_0 + \sum_{i=1}^L a_i(t)A_i, \\
 B_1(t, a) &= B_{10} + \sum_{i=1}^L a_i(t)B_{1i}, \\
 B_2(t, a) &= B_{20} + \sum_{i=1}^L a_i(t)B_{2i}, \\
 C(t, a) &= C_0 + \sum_{i=1}^L a_i(t)C_i
 \end{aligned} \tag{8}$$

을 만족하는 어파인 불확실성 시스템행렬로 아래의 가정을 만족한다.

(가정1) 시스템행렬 $A(t, a), B_1(t, a), \dots$ 등은 a 에 대하여 제한연속함수(bounded continuous functions)이다.

(가정2) 파라미터 $a(t) := [a_1(t), \dots, a_L(t)]^T$ 는 시간에 대하여 연속이며 불확실성 영역

$$\underline{a}_i \leq a_i(t) \leq \bar{a}_i, \quad 1 \leq i \leq L, \quad \forall t \geq 0 \tag{9}$$

를 만족하며 $[0, \infty)$ 의 구간에서 르베스크 측정가능한 함수(Lebesgue measurable function)이다.

어파인 파라미터 불확실성을 가지는 시간지연 시스템 (7)에 상태궤환 건실 H^∞ 제어기

$$u(t) = Kx(t) \tag{10}$$

을 설계하였을 때 실제로 구현되는 제어기에는 A/D변환 · D/A변환과정에서 발생하는 오차, 컴퓨터 기억용량의 한계와 디지털 워드길이의 한계 등으로 인하여 제어기이득 섭동이 존재한다. 그러므로 제어기이득 섭동을 고려한 제어기의 형태를

$$\begin{aligned}
 u(t) &= K(t, \beta)x(t), \quad K(t, \beta) = \sum_{j=1}^L \beta_j(t)K_j, \\
 \sum_{j=1}^L \beta_j(t) &= 1
 \end{aligned} \tag{11}$$

과 같이 둔다. 이 때 $K(t, \beta)$ 는 비약성을 만족하는 시변 제어기이득 섭동영역으로 K_j 를 꼭지점(vertex)으로 하는 폴리토프를 형성한다. 그리고 공칭제어기(nominal

controller)로서 폴리토프의 중심인

$$K_0 = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L K_j \quad (12)$$

를 이끌어 낼 수 있다. 그리고 비약성을 만족하는 제어기이득 섭동영역 (11)을 공칭제어기에 대하여 정리하면

$$\begin{aligned} K(t, \beta) &= K_0 + \sum_{j=1}^L \beta_j(t) \bar{K}_j, \\ \sum_{j=1}^L \beta_j(t) &= 1, \quad \bar{K}_j = K_j - K_0 \end{aligned} \quad (13)$$

과 같이 다시 쓸 수 있으며 제어기이득 섭동영역을 결정하는 \bar{K}_j 에서 비약성의 정도를 알 수 있다.

어과인 파라미터 불확실성 시스템 (1)에 제어기이득 섭동영역을 고려한 전실 비약성 H^∞ 제어기 (11)을 적용하면 페루프시스템

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A(t, \alpha) + B_2(t, \alpha)K(t, \beta)] \\ & x(t) + B_1(t, \alpha)w(t) \\ z(t) &= C(t, \alpha)x(t) \end{aligned} \quad (14)$$

를 얻을 수 있으며 본 논문의 제어목적은 어과인 파라미터 불확실성 시스템 및 제어기이득 섭동에 대해

- i) 페루프시스템 (14)가 점근적 안정성을 만족한다.
- ii) 초기조건이 0이라는 가정하에 페루프시스템 (14)가 모든 0이 아닌 $w(t) \in L_2[0, \infty)$ 에 대해 $\|z(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2$ 의 외란감쇠를 보장한다.

를 만족하는 전실 비약성 H^∞ 제어기를 설계하는 것이다.

보조정리 2 페루프시스템 (14)에서 외란입력이 모든 시간에 대해 0이라고 가정하고 만일

$$\begin{aligned} A^T(t, \alpha)P + PA(t, \alpha) + PB_2(t, \alpha)K(t, \beta) \\ + K^T(t, \beta)B_2^T(t, \alpha)P < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

를 만족하는 양정의 행렬(positive definite matrix) P 와 \bar{K}_j ($j=1, 2, \dots, L$)가 존재한다면 페루프시스템은 점근적으로 안정하다.

증명 리아프노프 함수(Lyapunov function)를

$$V(x(t), t) = x^T(t)Px(t) \quad (16)$$

과 같이 선정하고 $\frac{d}{dt} V(x(t), t) < 0$ 을 만족하면 페루프시스템은 점근적으로 안정하다. ■

보조정리 3 만일

$$\begin{bmatrix} U & PB_1(t, \alpha) \\ B_1^T(t, \alpha)^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

을 만족하는 양정의 행렬 P 와 \bar{K}_j ($j=1, 2, \dots, L$)가 존재한다면 페루프시스템은 외란감쇠 γ 및 $K(t, \beta)$ 의 제어기이득 섭동에 대한 비약성을 가지면서 점근적으로 안정하다. 여기서 U 는

$$\begin{aligned} U &= A^T(t, \alpha)P + PA(t, \alpha) + C^T(t, \alpha)C(t, \alpha) + \\ & PB_2(t, \alpha)K(t, \beta) + K^T(t, \beta)B_2^T(t, \alpha)P \end{aligned} \quad (18)$$

로 정의된다.

증명 우선 식 (17)의 조건은 보조정리 2의 식 (15)를 만족시킨다. 그리고 H^∞ 성능척도(performance measure)를

$$J = \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt \quad (19)$$

로 선정하고, 초기치 $x(0)$ 를 0이라 가정하면 성능척도 (19)는

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \frac{d}{dt} \{x^T(t)Px(t)\}] dt \\ & \quad - x^T(\infty)Px(\infty) \\ &= \int_0^\infty x^T(t) [A^T(t, \alpha)P + PA(t, \alpha) + C^T(t, \alpha)C(t, \alpha) \\ & \quad + PB_2(t, \alpha)K(t, \beta) + K^T(t, \beta)B_2^T(t, \alpha)P] x(t) \\ & \quad + x^T(t)PB_1(t, \alpha)w(t) + w^T(t)B_1^T(t, \alpha)Px(t) dt \\ & \quad - \gamma^2 w^T(t)w(t) - x^T(\infty)Px(\infty) \end{aligned} \quad (20)$$

이 되고 U 를 식 (18)과 같이 정의하면 전실 H^∞ 조건은

$$[x^T(t) \ w^T(t)] \begin{bmatrix} U & PB_1(t, \alpha) \\ B_1^T(t, \alpha)P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

이다. 따라서 조건식 (17)은 모든 $w(t) \in L_2[0, \infty)$ 에 대하여 $\|z(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2$ 임을 보장하므로 페루프시스템은 외란감쇠 γ 및 $K(t, \beta)$ 의 제어기이득 섭동에 대한 비약성을 가지면서 점근적으로 안정하다. ■

정리 1 어파인 파라미터 불확실성 시스템 (7)이 만일

$$\begin{bmatrix} W & B_1(t, \alpha) & XC^T(t, \alpha) \\ B_1^T(t, \alpha) & -\rho I & 0 \\ C(t, \alpha)X & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

의 PLMI를 만족하는 행렬 $Y_j(j=1, 2, \dots, L)$ 와 양정의 행렬 X 그리고 양수 ρ 가 존재하면 폐루프시스템은 외란감쇠 γ 및 $K(t, \beta)$ 의 제어기이득 섭동에 대한 비약성을 가지면서 점근적으로 안정하다. 여기서 각각의 변수들은

$$W = A(t, \alpha)X + XA(t, \alpha)^T + \sum_{j=1}^L \beta_j(t) [B_2(t, \alpha)Y_j + Y_j^T B_2^T(t, \alpha)] \quad (23)$$

$$\rho = \gamma^2, \quad Y_0 = K_0 X, \quad Y_j = \tilde{K}_j X \quad (24)$$

와 같이 정의된다.

증명 변수치환 $X = P^{-1}$ 를 이용하면, 조건식 (21)은

$$[x^T(t)P \ w^T(t)] \begin{bmatrix} V & B_1(t, \alpha) \\ B_1^T(t, \alpha) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

와 동가이고 여기서 V 는

$$V = XA^T(t, \alpha) + A(t, \alpha)X + XC^T(t, \alpha)C(t, \alpha)X + B_2(t, \alpha)K(t, \beta)X + XK^T(t, \beta)B_2^T(t, \alpha) \quad (26)$$

으로 정의한다. 그리고 식 (24)와 같이 변수를 정의하면 슈어 여수(Schur complement) 정리에 의해 식 (25)의 견실 H^∞ 조건은 식 (22)와 같은 행렬부등식으로 나타낼 수 있다. ■

그런데 식 (22)의 조건은 LMI가 아니므로 블록 최적화 기법을 적용할 수 없다. 그러므로 α_i 와 β_i 를 변수치환에 의해 같은 다각형 집합으로 합쳐주면 위의 행렬부등식에 대하여

$$M_0(z) + \sum_{i=1}^L \alpha_i(t)M_i(z) + \sum_{j=1}^L \beta_j(t)N_j(z) + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \alpha_i(t)\beta_j(t)M_{ij}(z) < 0 \quad (27)$$

과 같은 PLMI 형태를 구할 수 있으며 이 때 결정변수 z 는 $z := (X, Y_1, Y_2, \dots, Y_L, \rho)$ 이고 각각의 행렬은

$$M_0(z) = \begin{bmatrix} A_0 X + XA_0^T + B_{20} Y_0 + Y_0^T B_{20}^T & B_{10} & XC_0^T \\ B_{10}^T & -\rho I & 0 \\ C_0 X & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$M_i(z) = \begin{bmatrix} A_i X + XA_i^T + B_{2i} Y_0 + Y_0^T B_{2i}^T & B_{1i} & XC_i^T \\ B_{1i}^T & 0 & 0 \\ C_i X & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$N_j(z) = \begin{bmatrix} B_{20} Y_j + Y_j^T B_{20}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{ij}(z) = \begin{bmatrix} B_{2i} Y_j + Y_j^T B_{2i}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이다. 보조정리 1의 완화조건을 사용하면 유한한 파라미터에 대한 LMI로 변환할 수 있다.

정리 2 식 (27), (28)의 PLMI에 대해서

$$x^T M_0(z)x + \sum_{i=1}^L \alpha_i x^T M_i(z)x + \sum_{j=1}^L \beta_j x^T N_j(z) + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \max \left\{ -x^T M_{ij}(z)x \left(\frac{\alpha_i^2 + \beta_j^2}{2} - \frac{\alpha_i + \beta_j}{2} + 0.125 \right), x^T M_{ij}(z)x \frac{\alpha_i^2 + \beta_j^2}{2} \right\} < 0, \quad \forall \|x\| = 1, (\alpha, \beta) \in \text{vert} \Gamma \quad (29)$$

를 만족하는 행렬 $Y_j(j=1, 2, \dots, L)$ 와 양정의 행렬 X 그리고 양수 ρ 가 존재하면 비약성을 만족하는 $K(t, \beta)$ 의 제어기이득 섭동영역 내에서 폐루프시스템은 외란감쇠 γ 를 만족하면서 점근적으로 안정하다.

식 (28)은 $Y_j(j=1, 2, \dots, L)$, X , ρ 에 대한 LMI로 나타낸다. 따라서 견실 비약성 H^∞ 상태제환 제어기 $K_0 = Y_0 X^{-1}$ 와 비약성을 만족하는 제어기이득 섭동영역의 꼭지점 $\tilde{K}_j = Y_j X^{-1}$ 를 얻을 수 있으며 $\gamma = \sqrt{\rho}$ 에서 외란감쇠율 γ 를 구할 수 있다.

IV. 설계기법의 타당성 검토

어파인 파라미터 불확실성을 가지는 시스템 (7)에서 각각의 행렬이

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \alpha_1(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_1(t) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_1(t) \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} + \alpha_2(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ B_2(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_1(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2(t) \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \\ C(t) &= [1 \ 1] + \alpha_2(t) [1 \ 0] \end{aligned} \quad (30)$$

인 경우를 고려한다. 여기서 파라미터 α_1, α_2 는

$$\alpha_1(t) = [1 \ 1.5], \quad \alpha_2(t) = [1 \ 2] \quad (31)$$

을 만족한다. 이 예제의 공칭 개루프시스템은 우반평면

의 극점을 가지므로 불안정하다. 모의실험은 MATLAB의 SIMULINK를 이용하였다. 정리 2의 LMI로부터

$$\begin{aligned} Y_0 &= \begin{bmatrix} -107.0977 & -239.2440 \\ -109.5050 & 17.8642 \end{bmatrix}, & Y_1 &= \begin{bmatrix} -50.9456 & -109.5348 \\ -61.8098 & 9.2325 \end{bmatrix}, \\ Y_2 &= \begin{bmatrix} -25.1393 & -88.6227 \\ -38.4508 & 4.6056 \end{bmatrix}, & Y_3 &= \begin{bmatrix} 76.0850 & 198.1576 \\ 100.2607 & -13.8381 \end{bmatrix}, \\ X &= \begin{bmatrix} 7.8779 & -20.4586 \\ -20.4586 & 54.4882 \end{bmatrix}, & \rho &= 0.0722. \end{aligned} \quad (32)$$

의 해를 구할 수 있고 변수치환에 의해 견실 비약성 H^∞ 제어기

$$K_0 = 10^3 \times \begin{bmatrix} -1.0030 & -0.3810 \\ -0.5236 & -0.1963 \end{bmatrix} \quad (33)$$

과 비약성을 만족하는 제어기이득 섭동영역의 꼭지점

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= \begin{bmatrix} -468.9418 & -178.0836 \\ -297.1525 & -111.4023 \end{bmatrix}, \\ \bar{K}_2 &= \begin{bmatrix} -297.5151 & -113.3343 \\ -187.0294 & -70.1393 \end{bmatrix}, \\ \bar{K}_3 &= \begin{bmatrix} 766.4569 & 291.4179 \\ 484.1819 & 181.5416 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

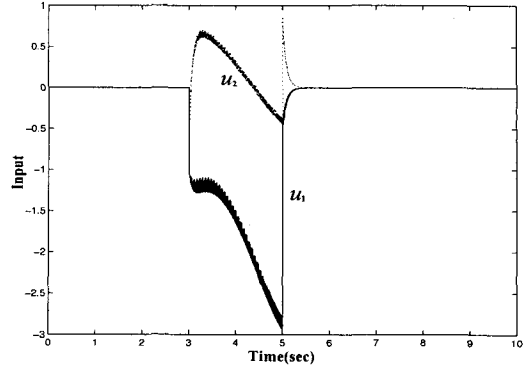
와 외란감쇠율

$$\gamma = 0.2686 \quad (35)$$

를 구할 수 있다. 그리고 컴퓨터 모의실험시 외란 $w(t)$ 는

$$w(t) = \begin{cases} 5, & 3\text{sec} \leq t \leq 5\text{sec} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (36)$$

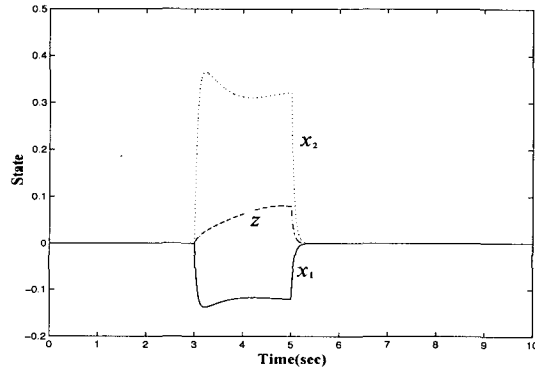
과 같이 가정한다. 공칭 제어기 K_0 가 적용되었을 때 상태, 제어출력 및 제어입력은 그림 1에서 보인다. 그리고 제어기 폴리토프의 꼭지점 K_1, K_2, K_3 가 적용되었



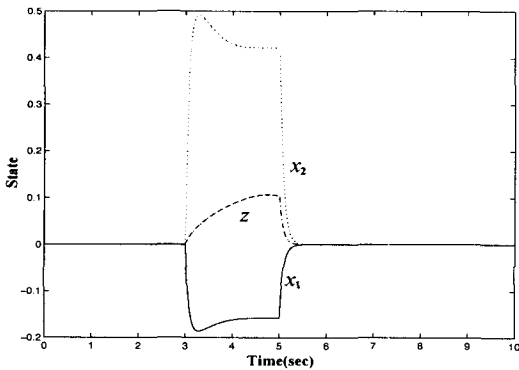
(b) 제어입력의 궤적
(b) The trajectories of control input.

그림 1. 공칭제어기 K_0 의 경우

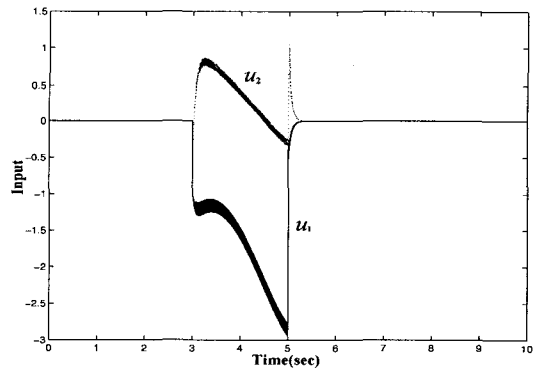
Fig. 1. The case of nominal controller K_0 .



(a) 상태 및 제어출력의 궤적
(a) The trajectories of states and controlled output.



(a) 상태 및 제어출력의 궤적
(a) The trajectories of states and controlled output.

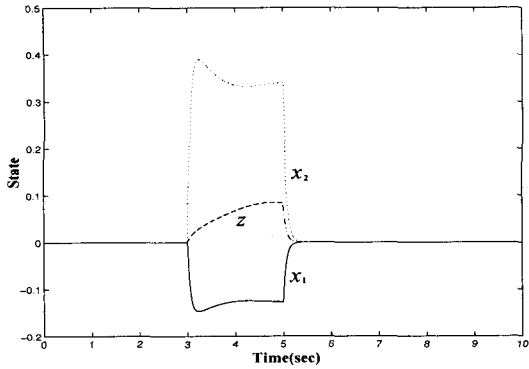


(b) 제어입력의 궤적
(b) The trajectories of control input.

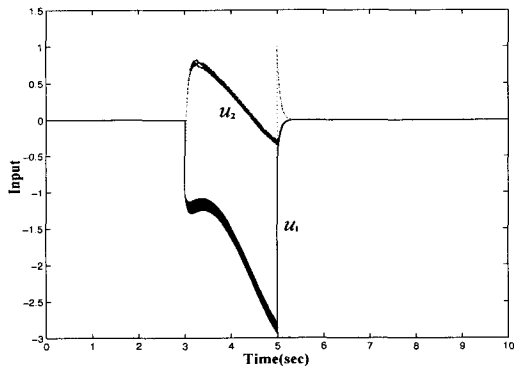
그림 2. 꼭지점 K_1 의 경우

Fig. 2. The case of vertex K_1 .

을 때의 응답을 각각 그림 2, 그림 3, 그림 4에서 보인다. 이 때 외란 대 출력의 2-노름 비는 각각 0.01368,

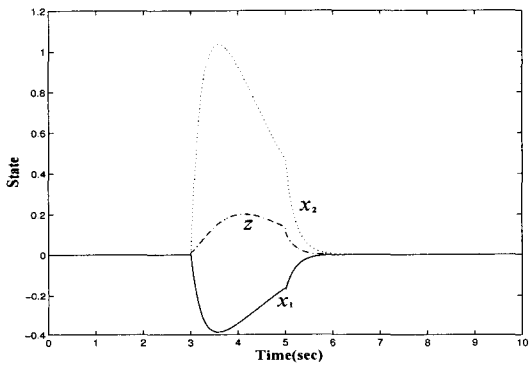


(a) 상태 및 제어출력의 궤적
(a) The trajectories of states and controlled output.

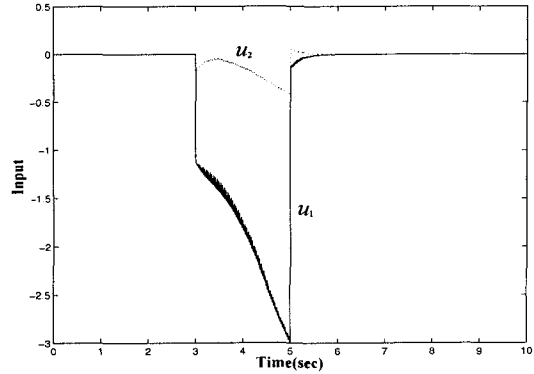


(b) 제어입력의 궤적
(b) The trajectories of control input.

그림 3. 꼭지점 K_2 의 경우
Fig. 3. The case of vertex K_2 .



(a) 상태 및 제어출력의 궤적
(a) The trajectories of states and controlled output.



(b) 제어입력의 궤적
(b) The trajectories of control input.

그림 4. 꼭지점 K_3 의 경우
Fig. 4. The case of vertex K_3 .

0.01147, 0.01173, 0.03216 정도이다.

이 예제에서 제어기 폴리토프의 꼭지점에서도 점근적 안정성과 외란감쇠를 만족시키는 것을 알 수 있다. 그리고 전실 비약성 H^∞ 제어기 K_0 은 식 (13)과 식 (31)을 만족하는 폴리토프 내의 제어기이득 섭동 및 시간지연에 대해 점근적 안정성을 보장하고 $w(t) \in L_2 [0, \infty]$ 의 외란에 대해 $\|z(t)\|_2 \leq 0.2686 \|w(t)\|_2$ 를 만족하는 것을 확인할 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 어파인 파라미터 불확실성을 가지는 시간지연 시스템과 구조화된 제어기 섭동을 고려한 상태궤환 전실 비약성 H^∞ 제어기가 존재할 충분조건과 설계방법을 제시하였다. 이 때 제시한 조건은 PLMI의 형태로 나타나므로 볼록 최적화 기법을 적용하기 위하여 유한개의 LMI로 완화하여 전실 비약성 H^∞ 제어기, 외란감쇠율 및 비약성을 만족하는 제어기의 영역을 동시에 구하였다. 그리고 제시한 제어기가 시스템의 불확실성 및 제어기섭동에도 폐루프시스템을 안정화시키고 H^∞ -노름 한계내로 외란을 감쇠시키는 것을 예제를 통하여 확인하였다.

추후 연구과제로 완화조건을 이용하지 않고 PLMI의 해를 직접적으로 구하는 방법에 대한 연구와 상태궤환 전실 비약성 H^∞ 제어기의 출력궤환으로의 확장에 관한 연구가 필요하다.

참고 문헌

- [1] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, "Digital implementation of fragile controllers," Proc. Amer. Contr. Conf. in Philadelphia, Pennsylvania, pp. 2852-2856, 1998.
- [2] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, "Robust, fragile, or optimal," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 42, no. 8, pp. 1098-1105, 1997.
- [3] J. R. Corrado and W. M. Haddad, "Static output feedback controllers for systems with parametric uncertainty and controller gain variation," Proc. Amer. Contr. Conf. in San Diego, California, pp. 915-919, 1999.
- [4] P. Dorato, "Non-fragile controller design: An overview," Proc. Amer. Contr. Conf. in Philadelphia, Pennsylvania, pp. 2829-2831, 1998.
- [5] P. Dorato, C. T. Abdallah, and D. Famularo, "On the design of non-fragile compensators via symbolic quantifier elimination," World Automation Congress in Anchorage, Alaska, pp. 9-14, 1998.
- [6] D. Famularo, C. T. Abdallah, A. Jadbabaie, P. Dorato, and W. M. Haddad, "Robust non-fragile LQ controllers: The static state feedback case," Proc. Amer. Contr. Conf. in Philadelphia, Pennsylvania, pp. 1109-1113, 1998.
- [7] W. M. Haddad and J. R. Corrado, "Robust resilient dynamic controller for systems with parametric uncertainty and controller gain variations," Proc. Amer. Contr. Conf. in Philadelphia, Pennsylvania, pp. 2837-2841, 1998.
- [8] A. Jadbabie, C. T. Abdallah, D. Famularo, and P. Dorato, "Robust, non-fragile and optimal controller via linear matrix inequalities," Proc. Amer. Contr. Conf. in Philadelphia, Pennsylvania, pp. 2842-2846, 1998.
- [9] J. H. Kim, S. K. Lee, and H. B. Park, "Robust and non-fragile H^∞ control of parameter uncertain time-varying delay systems," SICE in Morioka, pp. 927-932, July 1999.
- [10] P. Apkarian and H. D. Tuan, "Parameterized LMIs in control theory," Proc. IEEE Conf. Dec. Contr. in Florida, pp. 152-157, 1998.
- [11] H. D. Tuan and P. Apkarian, "Relaxations of parameterized LMIs with control applications," Int. J. of Robust Nonlinear Control, vol. 9, pp. 59-84, 1999.
- [12] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM, 1994.
- [13] P. Gahinet and P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to H^∞ control," Int. J. of Robust Nonlinear Control, vol. 4, pp. 421-448, 1994.

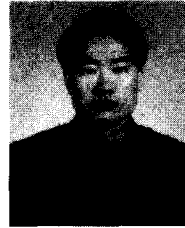
저자 소개



曹尙鉉(正會員)

1995년 2월 : 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1997년 2월 : 경북대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 1999년 2월 : 경북대학교 대학원 전자공학과 박사과정 수료. 1997년 3월~현재 : 경북대학교 대학원 전자공학과 박사과정 재학중. <주관심분야 : 견실제어, 비약성제어, 시간지연 시스템>

교 대학원 전자공학과 박사과정 재학중. <주관심분야 : 견실제어, 비약성제어, 시간지연 시스템>



金起台(正會員)

1996년 2월 : 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1998년 2월 : 경북대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 2000년 2월 : 경북대학교 대학원 전자공학과 박사과정 수료. 1998년 3월~현재 : 경북대학교 대학원 전자공학과 박사과정 재학중. <주관심분야 : 견실제어, 시간지연 시스템 제어, 통신제어, PLL 응용>

교 대학원 전자공학과 박사과정 재학중. <주관심분야 : 견실제어, 시간지연 시스템 제어, 통신제어, PLL 응용>

朴 烘 培(平生會員) 第36卷 S編 第5號 參照

현재 : 경북대학교 전자전기공학부 교수