The Korean Communications
in Statistics Vol. 9, No. 2, 2002
pp. 435-441

Orthogonal Block Designs for Partial Diallel Crosses

Young Nam Son[1], Kuey Chung Choi[2]

Abstract

In this paper, orthogonal block designs for partial diallel crosses are proposed. These partial diallel crosses block designs for estimating general combining abilities are constructed by using α-resolvable partially balanced incomplete block designs.

Also, the efficiencies of the partial diallel crosses block designs obtained through this method are reported in table.

Keywords : partial diallel crosses; general combining ability; α-resolvable partially balanced incomplete block designs.

1. 서론

이면교배(diallel cross)계획은 식물의 육종실험에서 근교계통(inbred line)의 유전적 특성을 연구하는데 이용되는 짝짓기 계획(mating design)이다. 서로 다른 유전적인 특징을 갖는 p종의 근교계통에서 i번째 근교계통과 j번째 근교계통의 교배를 (i,j)로 나타내고 n_c를 실험에 이용되는 서로 다른 교배의 수라 하면 Griffing(1956)은 n_c에 따라 4가지 형태의 완전이면교배(Complete Diallel Cross: CDC)계획을 정의하였다. $n_c = p(p-1)/2$인 완전이면교배에서 근교계통의 수 p가 커지게 되면 교배의 수가 급격히 증가되어 모든 교배를 실험하는 완전이면교배 계획이 현실적이지 못한 경우가 발생된다. 이러한 상황에서 $p(p-2)/2$개의 교배 중에서 $ps/2$ ($s<p-1$, s는 각 근교계통이 다른 근교계통과 만나는 횟수)개의 교배만를 실험하여 p개의 근교계통의 일반조합능력(general combining ability : gca)를 비교하는데 우리는 이를 부분이면교배(Partial Diallel Cross : PDC)라 한다. 완전확률화 블록계획을 사용하여 PDC 계획을 설계한 연구로는 Kempthorne 과 Curnow(1961), Curnow(1963), Hinkelmann 과 Kempthorne(1963), Fyfe 와 Gilbert(1963), Arya(1983)등이 있으며 불완비 블록계획을 사용한 연구는 Agarwal 과 Das(1990), Singh 과 Hinkelmann (1995, 1998), Gupta, Das 와 Kageyama(1995) 그리고 Ghosh 와 Divecha(1997)등이 있다. 또한 PDC 계획의 최적성에 관한 연구로는 Mukerjee(1997), Das, Dean과

---

1) Researcher, The Research Institute of Statistics Chosun University, Gwangju 501-759, Korea.
E-mail : syn2000@netian.com.
2) Professor, Department of Computer Science and Statistics, Chosun University, Gwangju 501-759, Korea. E-mail: kjchoi@mail.chosun.ac.kr.

Gupta(1998)가 있다.

불 완비 블록 PDC 계획의 구성방법에 관한 대부분의 연구는 교배 (i, j)가 몇 번씩 반복되는 경우인데, 이러한 부분이면교배 실험은 교배의 수가 클 때 비효율적인 실험이 될 수 있다. 따라서 보다 적은 수의 교배 횟수로 *gca* 효과를 비교할 수 있다면 이는 효과적인 블록계획이 된다. Gupta 등(1995)은 순환적(circulant) 방법을 사용하여 각 교배가 한번씩 반복되는 직교블록 PDC 계획을 제시하였는데 본 연구에서는 m개의 동반분류(m-associate class)를 갖는 α-분해가능(α -resolvable) 부분균형 불완비블록(Partially Balanced Incomplete Block : PBIB(m)) 계획을 이용하여 각 교배가 한번씩 나타나는 직교블록 PDC 계획을 설계하는 방법과 그룹분류가능(group divisible : GD) PBIB(2) 계획과 사각(rectangular) PBIB(3) 계획으로부터 유도되는 PDC 계획과 이들 계획의 효율성을 제시하고자 한다.

2. 계획의 구성방법

m개의 동반분류를 갖는 α-분해가능 PBIB 계획을 이용하여 PDC 계획을 구성하는 방법을 살펴보면 다음과 같다. 먼저 (2.1)과 같은 모수를 갖는 α-분해가능 PBIB(m) 계획 D_1이 존재한다고 하자.

$$v_1 = p,\ b_1,\ r_1,\ k_1 = 2,\ \lambda_i = 0 \text{ 또는 } 1,\ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.1}$$

α-분해가능 PBIB(m) 계획 D_1에는 $\alpha p/2$개의 블록으로 이루어진 r_1/α개의 블록집합이 존재하고 각 블록집합에서는 p개의 처리가 동시에 α번 나타난다. 따라서 블록의 크기가 2인 b_1개의 각 블록을 교배로 간주하면 D_1의 각 블록집합에 $\alpha p/2$개의 교배가 형성된다. 그런 다음, 계획 D_1의 j번째 $(j = 1, 2, \ldots, r_1/\alpha)$ 블록집합에 속하는 $\alpha p/2$개의 교배를 PDC 계획에서의 j번째 블록으로 간주하면 (2.2)와 같은 모수를 갖는 PDC 계획 D가 구성된다.

$$p,\ n_c = b_1,\ b = r_1/\alpha,\ r_c = 1,\ k = \alpha p/2 \tag{2.2}$$

여기서 r_c는 서로 다른 교배의 반복 수를 나타낸다.

위의 방법으로 구성되는 블록 PDC 계획 D에는 p개의 근교계통이 b개의 각 블록에서 α번씩 나타나므로 계획 D는 *gca* 효과간의 차이를 추정하는데 있어 직교(orthogonal)블록계획(Gupta, Das와 Kageyama,1995)이 되고 완전확률화 PDC계획에 대한 D의 효율성은 항상 1이 된다.

예제 1. $p=9$일 때 사각 동반체계를 이용하여 블록 PDC 계획 D를 구성하면 다음과 같다. 먼저 모수가 $v_1 = p = 3 \cdot 3 = 9,\ b_1 = 18,\ r_1 = 4,\ k_1 = 2,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$인 PBIB(3) 계획 D_1은 아래와 같은 블록을 갖는다.

{1,2}, {1,3}, {2,3}, {4,5}, {4,6}, {5,6}, {7,8}, {7,9}, {8,9}
{1,4}, {1,7}, {2,5}, {2,8}, {3,6}, {3,9}, {4,7}, {5,8}, {6,9}

위의 블록을 이용하여 $\alpha=2$인 2개의 블록 집합을 구성한 다음, 각 블록집합에 포함된 블록을 교

배로 간주하면 모수가 $p=9, n_c=18, b=2, r_c=1, k=9$이면서 아래와 같은 블록을 갖는 PDC 계획 D가 구성된다.

블록 1	(2,3), (1,3), (1,2), (5,6), (4,6), (4,5), (8,9), (7,9), (7,8)
블록 2	(4,7), (5,8), (6,9), (1,7), (2,8), (3,9), (1,4), (2,5), (3,6)

$p=s_1s_2$개의 근교계통을 각 그룹의 크기가 s_2인 s_1개의 그룹에 배열하여 그룹분류가능 동반체계와 사각동반체계로부터 첫 번째 동반관계와 두 번째 동반관계만을 이용하여 우리가 쉽게 구성할 수 있는 PDC 계획들을 살펴보면 다음과 같다.

먼저 첫 번째 동반관계만을 이용하면 아래와 같은 모수를 갖는 계획 D_1은 항상 존재한다.

$$v_1=p=s_1 s_2, b_1=s_1 s_2(s_2-1)/2, r_1=s_2-1, k_1=2 \tag{2.3}$$

따라서 계획 D_1이 α-분해가능이면 계획 D를 설계하는 방법에 따라 (2.4)와 같은 모수를 갖는 블록 PDC 계획이 구성된다.

$$p, n_c=s_1 s_2(s_2-1)/2, b=s_2-1/\alpha, r_c=1, k=\alpha s_1 s_2/2 \tag{2.4}$$

다음으로 두 번째 동반관계만을 이용하여 블록 PDC 계획을 구성하는 경우, 아래와 같은 모수를 갖는 계획 D_1은 항상 존재하므로 이 계획이 α-분해가능이면 블록 PDC 계획 D가 구성된다.

i) 그룹분해가능 동반체계를 이용하는 경우

$$D_1: \ v_1=p=s_1 s_2, b_1=s_2^2 s_1(s_1-1)/2, r_1=s_2(s_1-1), k_1=2 \tag{2.5}$$

$$D: \ p, n_c=s_2^2 s_1(s_1-1)/2, b=s_2(s_1-1)/\alpha, r_c=1, k=\alpha s_1 s_2/2$$

ii) 사각 동반체계를 이용하는 경우

$$D_1: \ v_1=p=s_1 s_2, \ b_1=s_2 s_1(s_1-1)/2, \ r_1=s_1-1, k_1=2 \tag{2.6}$$

$$D: \ p, \ n_c=s_2 s_1(s_1-1)/2, \ b=(s_1-1)/\alpha, r_c=1, k=\alpha s_1 s_2/2$$

3. *gca* 효과의 추정과 계획의 효율성

$ps/2$개의 서로 다른 교배를 블록의 크기가 k인 b개의 블록에 배치하는 이면교배실험에서 모형(Singh과 Hinkelmann, 1995)은 아래와 같이 정의된다.

$$y_{ijl}=\mu+g_i+g_j+\beta_l+\varepsilon_{ijl} \quad (i<j=1,2,\ldots,p; l=1,2,\ldots,b), \tag{3.1}$$

여기서 μ는 전체평균, g_i는 i번째 근교계통의 gca 효과, β_l은 l번째 블록효과이고 ε_{ijl}은 평균이 0, 분산이 σ^2인 오차항을 나타낸다.

그룹분류가능 동반체계와 사각 동반체계에서 각 근교계통의 $t(t=1$ 또는 $2)$번째 동반관계만을 이용하여 구성된 계획 D에서 i번째 근교계통의 gca효과(g_i)를 추정하기 위한 정규방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Y_i = r_1(\mu + g_i) + S_t(g_i) + \alpha \sum_{h=1}^{b} \beta_h(i) \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{3.2}$$

$$\sum_{h=1}^{b} B_h(i) = \frac{r_1 k}{\alpha}\mu + r_1 g_i + r_1 S_t(g_i) + r_1 S_l(g_i) + k \sum_{h=1}^{b} \beta_h(i) \tag{3.3}$$

여기서 Y_i는 i번째 근교계통에 관련된 관찰 값의 총합을 나타내고 $S_t(g_i)$는 i번째 근교계통과 t번째 동반관계에 있는 근교계통의 gca효과의 총합이고 $S_l(g_i)$는 i번째 근교계통과 t번째 동반관계에 있지 않은 근교계통의 gca 효과의 총합을 나타낸다. 또한 $B_h(i)$와 $\beta_h(i)$는 각각 i번째 근교계통이 나타난 h번째 블록에서의 관찰 값 총합과 블록효과를 나타낸다. (3.2)와 (3.3)에서 $g_i + S_t(g_i) + S_l(g_i) = 0$을 이용하여 축소정규방정식을 나타내면 다음과 같다.

$$Q_i = \begin{cases} r_1 g_i + S_1(g_i), & t = 1 \text{ 일 때} \\ r_1 g_i + S_2(g_i), & t = 2 \text{ 일 때} \end{cases} \tag{3.4}$$

여기서 $Q_i = Y_i - \frac{\alpha}{k}\sum_{h=1}^{b} B_h(i)$ 이다. $S_t(Q_i)$를 i번째 근교계통과 t번째 동반관계에 있는 근교계통에서 Q_i들의 총합이라 하면

$$S_t(Q_i) = \begin{cases} r_1 g_i + (r_1 + p_{11}^1) S_1(g_i), & t = 1 \text{일 때} \\ r_1 g_i + S_1(Q_i) - (p_{12}^2 - r_1 - p_{22}^2) S_2(g_i), & t = 2(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1) \text{일 때} \\ r_1 g_i + (r_1 + p_{22}^2) S_2(g_i), & t = 2(\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 1) \text{일 때} \end{cases} \tag{3.5}$$

이다. 여기서 $p_{t_1 t_2}^t$는 두 근교계통 i와 j가 t번째 동반관계에 있을 때 i번째 근교계통과는 t_1번째 동반관계이고 j번째 근교계통과는 t_2번째 동반관계에 있는 근교계통의 수를 나타낸다.
(3.4)와 (3.5)로부터 $t = 1$일 때

$$Q_i - \frac{S_1(Q_i)}{(r_1 + p_{11}^1)} = \left\{ r_1 - \frac{r_1}{r_1 + p_{11}^1} \right\} g_i \tag{3.6}$$

이고 $t = 2$일 때

$$\begin{cases} Q_i - \dfrac{S_1(Q_i) - S_2(Q_i)}{p_{12}^2 - r_1 - p_{22}^2} = \left(r_1 + \dfrac{r_1}{p_{12}^2 - r_1 - p_{22}^2} \right) g_i, & \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 \text{인 경우} \\ Q_i - \dfrac{S_1(Q_i)}{r_1 + p_{22}^2} = \left(r_1 - \dfrac{r_1}{r_1 + p_{22}^2} \right) g_i, & \lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 1 \text{인 경우} \end{cases} \tag{3.7}$$

이다. 따라서 (3.6)과 (3.7)로부터 gca 효과의 최소제곱추정량은 아래의 (3.8)과 같다.

$$\hat{g}_i = \begin{cases} A_1^{-1}[Q_i - A_2 S_1(Q_i)], & t = 1 \text{일 때} \\ A_1^{-1}\{Q_i - A_2[S_1(Q_i) - S_2(Q_i)]\}, & t = 2(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1) \text{일 때} \\ A_1^{-1}[Q_i - A_2 S_2(Q_i)], & t = 2(\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 1) \text{일 때} \end{cases} \tag{3.8}$$

여기서 A_1과 A_2는 아래의 (3.9), (3.10)과 같다.

$$A_1=\begin{cases} r_1-\dfrac{r_1}{r_1+p_{11}^1}=\dfrac{2(s_2-1)(s_2-2)}{2s_2-3}, & t=1\text{일 때} \\ r_1+\dfrac{r_1}{p_{12}^2-r_1-p_{22}^2}=\dfrac{-2s_2^2(s_1-1)(s_1-2)}{(s_2-1)-s_2(2s_1-3)}, & t=2(\lambda_1=0,\lambda_2=1)\text{일 때} \\ r_1-\dfrac{r_1}{r_1+p_{22}^2}=\dfrac{2(s_1-1)(s_1-2)}{2s_1-3}, & t=2(\lambda_1=\lambda_3=0,\lambda_2=1)\text{일 때} \end{cases} \tag{3.9}$$

$$A_2=\begin{cases} (r_1+p_{11}^1)^{-1}=(2s_2-3)^{-1}, & t=1\text{일 때} \\ (p_{12}^2-r_1-p_{22}^2)^{-1}=[(s_2-1)-s_2(2s_1-3)]^{-1}, & t=2(\lambda_1=0,\lambda_2=1)\text{일 때} \\ (r_1+p_{22}^2)^{-1}=(2s_1-3)^{-1}, & t=2(\lambda_1=\lambda_3=0,\lambda_2=1)\text{일 때} \end{cases} \tag{3.10}$$

두 근교계통간의 gca효과 차이를 추정하는데 있어서 블록계획 D의 효율성은 아래와 같이 계산된다. 먼저 블록 PDC 계획 D에서 두 근교계통의 gca 효과 차이의 분산 $Var(\hat{g}_i-\hat{g}_j)$을 아래와 같이 정의하자.

$$Var(\hat{g}_i-\hat{g}_j)=\begin{cases} \theta_1\sigma^2, & i,j\text{가 } t\text{번째 동반관계에 있는 경우} \\ \theta_2\sigma^2, & i,j\text{가 } t\text{번째 동반관계에 있지 않는 경우} \end{cases} \tag{3.11}$$

(3.8)을 이용하여 (3.11)의 θ_1과 θ_2를 구하면 $t=1$과 $t=2(\lambda_1=\lambda_3=0,\lambda_2=1)$일 때 $\theta_1=\dfrac{2}{A_1}(1+A_2)$, $\theta_2=\dfrac{2}{A_1}$이고 $t=2(\lambda_1=0,\lambda_2=1)$인 경우 $\theta_1=\dfrac{2}{A_1}(1-A_2)$, $\theta_2=\dfrac{2}{A_1}(1+A_2)$ 이다. 완전확률화 CDC계획을 D_c라 할 때 Singh과 Hinkelmann(1998)의 (16)식을 이용하여 D_c에 대한 계획 D의 효율성 $\mathrm{eff}(\hat{g}_i-\hat{g}_j)$를 (3.12)과 같이 정의하면

$$\mathrm{eff}(\hat{g}_i-\hat{g}_j)=\begin{cases} e_1^*, & i,j\text{가 } t\text{번째 동반관계에 있는 경우} \\ e_2^*, & i,j\text{가 } t\text{번째 동반관계에 있지 않는 경우} \end{cases} \tag{3.12}$$

$e_1^*=\dfrac{p(p-1)}{\theta_1(p-2)n_c}$ 이고 $e_2^*=\dfrac{p(p-1)}{\theta_2(p-2)n_c}$ 이다.

예제 2. 계획 D_1이 $v_1=p=s_1s_2=3\cdot 4=12, b_1=18, r_1=3, k_1=2, \lambda_1=1, \lambda_2=0$인 그룹분해가능 PBIB(2) 계획일 때 $p=9, n_c=18, b=3, r_c=1, k=6$인 블록 PDC 계획 D는 아래와 같은 블록을 갖는다.

{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8), (9,10), (11,12)},
{(1,3), (2,4), (5,8), (6,8), (9,11), (10,12)},
{(1,4), (2,3), (5,8), (6,7), (9,12), (10,11)}

계획 D에서 $\hat{g}_i$, $Var(\hat{g}_i - \hat{g}_j)$ 그리고 eff$(\hat{g}_i - \hat{g}_j)$을 구하면 $A_1 = 12/5, A_2 = 1/5$, $\theta_1 = 1, \theta_2 = 0.833$이므로 $\hat{g}_i = \frac{5}{12} Q_i - \frac{1}{12} S_1(Q_i)$이다. i번째 근교계통과 j번재 근교계통이 첫 번째 동반관계에 있을 때 $Var(\hat{g}_i - \hat{g}_j) = \sigma^2, e_1^* = 0.733$이고 두 번째 동반관계에 있을 때는 $Var(\hat{g}_i - \hat{g}_j) = 0.833\sigma^2, e_2^* = 0.880$이다.

아래의 [표 3.1]과 [표 3.2]는 $p \leq 24$일 때 그룹분류가능 PBIB(2)계획과 사각 PBIB(3) 계획으로부터 구성되는 PDC 계획 D의 효율성을 제시한 것이다.

[표 3.1] 계획 D의 효율성

α-분해가능 PBIB(2) 계획								계획 D					
v_1	s_1	s_2	b_1	r_1	λ_1	λ_2	α	p	n_c	b	k	e_1^*	e_2^*
6	3	2	12	4	0	1	2	6	12	2	6	0.833	1
8	2	4	12	3	1	0	1	8	12	3	4	0.778	0.933
8	4	2	24	6	0	1	1	8	24	6	4	0.933	1
10	5	2	40	8	0	1	2	10	40	4	10	0.964	1
12	2	6	30	5	1	0	1	12	30	5	6	0.88	0.978
12	3	4	18	3	1	0	1	12	18	3	6	0.733	0.88
12	4	3	54	9	0	1	1	12	54	9	6	0.943	1
12	6	2	60	10	0	1	1	12	60	10	6	0.978	1
14	7	2	84	12	0	1	2	14	84	6	14	0.985	1
16	2	8	56	7	1	0	1	16	56	7	8	0.918	0.989
16	8	2	112	14	0	1	1	16	112	14	8	0.989	1
18	3	6	45	5	1	0	1	18	45	5	9	0.85	0.944
18	9	2	162	16	0	1	2	18	144	8	18	0.992	1
18	3	6	108	12	0	1	2	18	108	6	18	0.911	1
18	6	3	135	15	0	1	1	18	135	15	9	0.981	1
20	4	5	150	15	0	1	1	20	150	15	10	0.96	1
20	10	2	180	18	0	1	1	20	180	18	10	0.993	1
20	5	4	30	3	1	0	1	20	30	3	10	0.704	0.844
20	5	4	180	16	0	1	2	20	160	8	20	0.974	1
21	7	3	189	18	0	1	2	21	189	9	21	0.987	1
22	11	2	220	20	0	1	2	22	220	10	22	0.995	1
24	6	4	36	3	1	0	1	24	36	3	12	0.697	0.836
24	3	8	84	7	1	0	1	24	84	7	12	0.896	0.965
24	4	6	216	18	0	1	1	24	216	18	12	0.965	1
24	8	3	252	21	0	1	1	24	252	21	12	0.99	1
24	3	8	176	16	0	1	2	24	192	8	24	0.929	1
24	4	6	60	5	1	0	1	24	60	5	12	0.836	0.929

[표 7.2] 계획 D의 효율성

α-분해가능 PBIB(3) 계획									계획 D					
v_1	s_1	s_2	b_1	r_1	λ_1	λ_2	λ_3	α	p	n_c	b	k	e_1^*	e_2^*
12	4	3	18	3	0	1	0	1	12	18	3	6	0.733	0.88
12	3	4	12	2	0	1	0	1	12	12	2	6	0.55	0.733
16	4	4	24	3	0	1	0	1	16	24	3	8	0.714	0.857
18	3	6	18	2	0	1	0	1	18	18	2	9	0.531	0.708
20	4	5	30	3	0	1	0	1	20	30	3	10	0.704	0.844
24	3	8	24	2	0	1	0	1	24	24	2	12	0.523	0.697
24	6	4	60	5	0	1	0	1	24	60	5	12	0.836	0.929
24	4	6	24	3	0	1	0	1	24	36	3	12	0.697	0.836

참고문헌

[1] Agarwal, S.C. and Das, M.N.(1990). Incomplete block designs for partial diallel cross. *Sankhya* 52, Series B, 75-81.

[2] Arya, A.S.(1983). Circulant plans for partial diallel crosses. *Biometrics* 39, 43-52.

[3] Curnow, R.N. (1963). Sampling the diallel cross. *Biometrics* 19, 287-306.

[4] Das, A. Dey, A. and Gupta, S.(1998). On optimality of some partial diallel cross designs. *Sankhya* B 60, 511-524.

[5] Fyfe, J. L. and Gilbert, N. E. G.(1963). Partial diallel crosses. *Biometrics* 19, 278-286.

[6] Ghosh, D.K. and Divecha, J.(1997). Two associate class partially balanced incomplete block designs and partial diallel crosses. *Biometrika* 84, 245-248.

[7] Griffing, B.(1956). Concepts of general and specific combining ability in relation to diallel crossing systems. *Australian Journal of Biological Sciences* 9, 463-493.

[8] Gupta, S. and Kageyama, S.(1995). Single replication orthogonal block designs for partial diallel crosses. *Communications Statistics -Theory and Methods* 24, 2601-2607.

[9] Hinkelmann, K. and Kempthorne, O.(1963). Two classes of group divisible partial diallel crosses. *Biometrika* 50, 281-291.

[10] Kempthorne, O. and Curnow, R.N.(1961). The partial diallel cross. *Biometrics* 17, 229-250.

[11] Mukerjee, R.(1997). Optimal partial diallel crosses. *Biometrika* 84, 939-948.

[12] Singh, M. and Hinkelmann, K. (1995). Partial Diallel Crosses in Incomplete Blocks.

[13] Singh, M. and Hinkelmann, K.(1998). Analysis of partial diallel crosses in incomplete blocks. *Biometrical Journal* 40, 165-181.

[2002년 5월 접수, 2002년 7월 채택]