The Korean Communications
in Statistics Vol. 9, No. 2, 2002
pp. 401-410

Developing Noninformative Priors for Parallel-Line Bioassay

YeongHwa Kim [1] JungEun Heo [2]

Abstract

This paper revisits parallel-line bioassay problem, from a Bayesian point of view using noninformative priors such as Jeffreys' prior, reference priors, and probability matching priors. After finding the orthogonal transformation, the class of first order and second order probability matching priors are derived. Jeffreys' prior and reference priors are derived also. Numerical examples are given to show the effectiveness of noninformative priors.

Keywords : Noninformative priors, Parallel-line bioassay, Probability matching priors, Reference priors

1. 서론

생물검정(Bioassay)이란 어떤 자극(약품, 호르몬, 방사선, 독극물 등)에 대해 생물학적 유기체 내에서 일어나는 반응을 분석함으로써 그 자극의 효과를 평가하는 것을 말한다. 회귀분석이나 최우추정법과 같은 일반적인 통계적 방법들이 생물검정에서 주로 쓰이는 것은 물론, 생물검정에 대한 수많은 통계적 방법들이 통계학의 발전에 따라 개발되어오고 있다. Finney(1971, 1978)에 의해 이러한 다양한 통계적 방법들이 통합되어 집대성되었는데, 특히 Finney(1971)는 주로 양적반응(quantal response)데이터에 대한 프로빗모형(probit model)을 다루고 있으며, Finney(1978)는 보다 일반적인 데이터의 분석방법들을 소개하고 있다.

평행선 생물검정(Parallel-line Bioassay)는 기존의약품과 새로운 의약품의 생물학적인 효과를 측정하는 방법 중 하나이다. 대부분의 투약반응실험(dose-response experiment)에서 양적반응과 투약수준의 로그값(log dose)은 선형관계를 갖는다고 알려져 있으므로, 기존의약품과 새로운 의약품의 투약수준의 로그값에 대한 반응의 그래프는 선형이고 평행한 것이 가장 이상적인 경우가 될 것이다. 따라서 이러한 실험의 데이터 분석에 대한 표준적인 접근법은, 잔차의 정규성 가정하에서 최소제곱법을 사용하여 두 의약품의 투약수준의 로그값에 대한 반응에 평행 회귀직선을 적합시키는 것이 된다(Finley(1978)).

1) Department of Statistics, Chung-Ang University, Seoul, Korea. E-mail : gogators@dreamwiz.com
2) Visiting Assistant Professor, Department of Statistics & Psychatry, University of Pittsburgh, Pittsburgh, U.S.A. E-mail : jheo@mail.com

본 논문에서는 의약품에 대한 반응(response)을 Y, 투약수준의 로그값(log dose)을 x, 효과비의 로그값(log potency ratio)을 μ, 기존의약품 투약수준의 반응에 대한 회귀선의 절편(intercept)을 α, 두 의약품의 투약수준의 반응에 대한 회귀선의 공통 기울기(common slope)를 β 라 하고, 기존의약품의 p가지 투약수준과 새로운 의약품의 q가지 투약수준에 대해 n 번 반복하여 측정하여 얻어진 관측치에 대해 다음 모형을 가정한다.

$$Y_{1ik} = \alpha + \beta x_{1i} + \varepsilon_{1ik} \quad , \quad i=1,\ldots,p \ , \ k=1,\ldots,n$$
$$Y_{2jk} = \alpha + \beta(x_{2j} + \mu) + \varepsilon_{2jk} \quad , \quad j=1,\ldots,q \ , \ k=1,\ldots,n$$

여기서 ε_{1ik} 와 ε_{2jk} 는 i.i.d. 이며 $N(0,\sigma^2)$ 을 따른다. 즉, Y_{1ik} 와 Y_{2jk} 는 서로 독립이며 각각 $Y_{1ik} \sim N(\alpha+\beta x_{1i}, \sigma^2)$, $Y_{2jk} \sim N(\alpha+\beta(x_{2j}+\mu), \sigma^2)$ 을 따른다. 두 의약품 투약수준의 로그값(log dose)의 차이로 표현되는 효과비의 로그값(log potency ratio)이 본 논문에서 추정하고자 하는 모수이다.

2장에서는 Cox와 Reid(1987)의 방법을 따라 직교변환(orthogonal transformation)을 구하고, Jeffreys 의 사전분포, 준거사전분포(reference priors), probability matching priors 등의 무정보적 사전분포(noninformative priors)를 유도하였다. 3장에서는 2장에서 유도된 무정보적 사전분포에 대하여 관심이 있는 모수인 μ의 주변사후분포(marginal posterior distribution)를 구하였다. 4장에서는 실제 예를 통해서 무정보적 사전분포의 유효성을 입증하였다.

2. 무정보적 사전분포(Noninformative Priors)

반복이 없는 단일 실험에 대해 가정된 모형의 로그우도함수(log likelihood function)는 다음과 같다.

$$\log L \propto -(p+q)\log\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{p}(y_{1i}-\alpha-\beta x_{1i})^2 + \sum_{j=1}^{q}(y_{2j}-\alpha-\beta(x_{2j}+\mu))^2\right]$$

따라서 Fisher 정보행렬(information matrix)은 다음과 같이 얻어진다.

$$I(\mu,\alpha,\beta,\sigma) = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \beta^2 q & \beta q & \beta x_{2.} + \beta q\mu & 0 \\ & p+q & x_{1.} + x_{2.} + q\mu & 0 \\ & & \sum_{i=1}^{p} x_{1i}^2 + \sum_{j=1}^{q}(x_{2j}+\mu)^2 & 0 \\ & SYM. & & 2(p+q) \end{bmatrix}$$

여기서 $x_{1.} = \sum_{i=1}^{p} x_{1i}$, $x_{2.} = \sum_{j=1}^{q} x_{2j}$ 이다.

무정보적 사전분포를 구하기 위하여 Cox와 Reid(1987)가 제안한 직교변환(orthogonal transformation)을 고려한다. 관심이 있는 모수가 μ 이므로, 먼저 변수변환을 다음과 같이 정의한다.

$$\mu=\theta_1,\ \alpha=\alpha(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4),\ \beta=\beta(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4),\ \sigma=\sigma(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$$

Cox와 Reid(1987)의 방법을 따라 다음의 미분방정식을 풀면 직교변환을 얻게 된다.

① $(p+q)\dfrac{\partial\alpha}{\partial\mu}+[x_{1.}+x_{2.}+q\mu]\dfrac{\partial\beta}{\partial\mu} = -\beta q$

② $[x_{1.}+x_{2.}+q\mu]\dfrac{\partial\alpha}{\partial\mu} + [\sum_{i=1}^{p}x_{1i}^2+\sum_{j=1}^{q}(x_{2j}+\mu)^2]\dfrac{\partial\beta}{\partial\mu} = -\beta x_{2.}-\beta q\mu$

③ $\dfrac{2(p+q)}{\sigma^2}\dfrac{\partial\sigma}{\partial\mu}=0$

정리 1. *위 조건을 만족하는 직교변환은 다음과 같다.*

$$\mu=\theta_1,\ \alpha=\theta_3-\frac{x_{1.}+x_{2.}+q\theta_1}{p+q}\theta_2 g^{-\frac{1}{2}}(\theta_1),\ \beta=\theta_2 g^{-\frac{1}{2}}(\theta_1),\ \sigma=\theta_4$$

여기서 $g(\theta_1)=\dfrac{pq}{p+q}\theta_1^2+2\left(\dfrac{x_{2.}p-x_{1.}q}{p+q}\right)\theta_1+\sum_{i=1}^{p}x_{1i}^2+\sum_{j=1}^{q}x_{2j}^2-\dfrac{(x_{1.}+x_{2.})^2}{p+q}$ *이다.*

(증명) 식 ①, ③으로부터 위 미분방정식의 가능한 해를 다음과 같이 취할 수 있다.

$$\mu=\theta_1,\ \alpha=\theta_3-\frac{x_{1.}+x_{2.}+q\theta_1}{p+q}\beta,\ \sigma=\theta_4$$

이를 ②식에 대입하고 $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\theta_1}=-\dfrac{q\beta}{p+q}-\dfrac{x_{1.}+x_{2.}+q\theta_1}{p+q}\dfrac{\partial\beta}{\partial\theta_1}$ 를 이용하여 정리하면

$$\left[\frac{pq}{p+q}\theta_1^2+2\left(\frac{x_{2.}p-x_{1.}q}{p+q}\right)\theta_1+\sum_{i=1}^{p}x_{1i}^2+\sum_{j=1}^{q}x_{2j}^2-\frac{(x_{1.}+x_{2.})^2}{p+q}\right]\frac{\partial\beta}{\partial\theta_1}$$
$$=\left[\frac{(x_{1.}+x_{2.})q+q^2\theta_1}{p+q}-(x_{2.}+q\theta_1)\right]\beta$$

을 얻게 된다. 그러므로 $g(\theta_1)$을 위와 같이 정의하면 이 식은 다음과 같게 된다.

$$g(\theta_1)\frac{\partial\beta}{\partial\theta_1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g(\theta_1)}{\partial\theta_1}\beta$$

따라서, $\beta\propto g^{-\frac{1}{2}}(\theta_1)$ 이므로 $\beta=\theta_2 g^{-\frac{1}{2}}(\theta_1)$ 로 취하면 위의 결과를 얻게 된다.

Remark 1. 위 **정리 1**은 원래의 모수에 대해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\theta_1 = \mu,\ \theta_2 = \beta g^{\frac{1}{2}}(\mu),\ \theta_3 = \alpha + \frac{x_{1.} + x_{2.} + q\mu}{p+q}\beta,\ \theta_4 = \sigma$$

보조정리 1. *직교변환* $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ *에 대한 Fisher 정보행렬은 다음과 같다.*

$$\boldsymbol{I}_\theta = Diagonal\left(\frac{C\theta_2^2}{\theta_4^2 g^2(\theta_1)},\ \frac{1}{\theta_4^2},\ \frac{p+q}{\theta_4^2},\ \frac{2(p+q)}{\theta_4^2}\right)$$

여기서 $C = \frac{1}{p+q}\left[pq\left(\sum_{i=1}^{p} x_{1i}^2 + \sum_{j=1}^{q} x_{2j}^2\right) - qx_{1.}^2 - px_{2.}^2\right]$ *이다.*

(증명) 원래의 모수 $(\mu, \alpha, \beta, \sigma)$의 Fisher 정보행렬을 **정리 1**을 이용하여 변환된 모수 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$에 대해 표현하면 다음과 같으며

$$\boldsymbol{I} = \frac{1}{\theta_4^2}\begin{bmatrix} \theta_2^2 g^{-1}(\theta_1)q & \theta_2 g^{-\frac{1}{2}}(\theta_1)q & \theta_2 g^{-\frac{1}{2}}(\theta_1)(x_{2.} + q\theta_1) & 0 \\ & p+q & x_{1.} + x_{2.} + q\theta_1 & 0 \\ & & \sum_{i=1}^{p} x_{1i}^2 + \sum_{j=1}^{q}(x_{2j} + \theta_1)^2 & 0 \\ & SYM. & & 2(p+q) \end{bmatrix}$$

변수변환에서 얻어지는 Jacobian 행렬은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1} & 0 \\ 0 & -\frac{x_{1.} + x_{2.} + q\theta_1}{p+q} & g^{-\frac{1}{2}}(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

따라서 $\boldsymbol{I}_\theta = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{J}^T$ 이므로 위의 결과를 얻게 된다.

1) Jeffreys의 사전분포 (π_J)

Jeffreys(1961)가 제안한 사전분포(π_J)는 Fisher 정보행렬(information matrix)의 행렬식값의 양의 제곱근에 비례하므로 **보조정리 1** 로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\pi_J \propto \frac{|\theta_2|}{\theta_4^4 g(\theta_1)}$$

따라서 역변환을 취하면 $|J| = g^{\frac{1}{2}}(\mu)$ 이므로 원래의 모수 $(\mu, \alpha, \beta, \sigma)$ 에 대한 Jeffreys의 사전분포 $\pi_J(\mu, \alpha, \beta, \sigma)$는 다음과 같다.

$$\pi_J(\mu, \alpha, \beta, \sigma) \propto \frac{|\beta| g^{\frac{1}{2}}(\mu)}{\sigma^4 g(\mu)} |J| = \frac{|\beta|}{\sigma^4}$$

2) 두 그룹 준거사전분포 (Two-group Reference Prior : π_{2R})

모수 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$를 서로 직교인(rectangular) 두 그룹으로 나누어 $\theta_{(1)} = \theta_1$, $\theta_{(2)} = (\theta_2, \theta_3, \theta_4)$ 라 하고, Bernardo(1979), Berger 와 Bernardo(1992 a,b)가 제안한 두 그룹 준거사전분포(two-group reference prior)를 Datta 와 Ghosh(1995)의 정리를 이용하여 구하기 위하여 **보조정리 1** 에서 얻어진 Fisher 정보행렬을

$\boldsymbol{I_\theta} = Diagonal\,[\, h_1(\boldsymbol{\theta}),\ h_2(\boldsymbol{\theta})]$ 라 하자. 여기서

$$h_1(\theta) = \frac{C\theta_2^2}{\theta_4^2 g^2(\theta_1)} \quad h_2(\theta) = Diagonal\left(\frac{1}{\theta_4^2}\ ,\ \frac{p+q}{\theta_4^2}\ ,\ \frac{2(p+q)}{\theta_4^2} \right)$$

라 하면, Datta 와 Ghosh(1995)의 정리에 따라 두 그룹 준거사전분포 π_{2R} 은 다음과 같이 구해진다.

$$\pi_{2R} \propto \frac{1}{\theta_4^3 g(\theta_1)}$$

따라서 원래의 모수 $(\mu, \alpha, \beta, \sigma)$ 에 대한 두 그룹 준거사전분포 $\pi_{2R}(\mu, \alpha, \beta, \sigma)$는 다음과 같다.

$$\pi_{2R}(\mu, \alpha, \beta, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma^3 g(\mu)} |J| = \frac{1}{\sigma^3 g^{\frac{1}{2}}(\mu)}$$

3) One-at-a-time준거사전분포 (π_R)

모수 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$를 서로 직교인(rectangular) 네 그룹으로 나누어 $\theta_{(1)} = \theta_1$, $\theta_{(2)} = \theta_2$, $\theta_{(3)} = \theta_3$, $\theta_{(4)} = \theta_4$ 라 하고, **보조정리 1** 에서 얻어진 Fisher정보행렬을

$\boldsymbol{I_\theta} = Diagonal\,[\, h_1(\boldsymbol{\theta}),\ h_2(\boldsymbol{\theta}),\ h_3(\boldsymbol{\theta}),\ h_4(\boldsymbol{\theta})]$ 라 하면, Datta 와 Ghosh(1995)의 정리에 따라 one-at-a-time 준거사전분포 π_R 은 다음과 같이 구해진다.

$$\pi_R \propto \frac{1}{\theta_4 g(\theta_1)}$$

따라서 원래의 모수에 대한 one-at-a-time 준거사전분포 $\pi_R(\mu, \alpha, \beta, \sigma)$는 다음과 같이 얻어진다.

$$\pi_R(\mu,\alpha,\beta,\sigma) \propto \frac{1}{\sigma g(\mu)}|J| = \frac{1}{\sigma g^{\frac{1}{2}}(\mu)}$$

4) Second-order probability matching prior (π_S)

Second-order probability matching prior(π_S)를 구하려면 먼저 First-order probability matching priors를 구해야 하는데, 이는 **보조정리 1** 과 Tibshirani(1989)에 의해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\pi_F \propto \frac{|\theta_2|}{\theta_4 g(\theta_1)} h(\theta_2,\theta_3,\theta_4)$$

여기서 $h(\theta_2,\theta_3,\theta_4)$는 임의의 양함수(positive function)이며, Mukerjee 와 Ghosh(1997)의 조건을 만족하는 임의의 $h(\theta_2,\theta_3,\theta_4)$를 구하여 π_F에 대입하면 Second-order probability matching prior를 얻게 된다. 계산의 편의를 위해서 위에서 정의되었던 $g(\theta_1)$ 을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$g(\theta_1) = s_1 + s_2 + \frac{pq}{p+q}(\overline{x_1} - \overline{x_2} - \theta_1)^2$$

여기서 $s_1 = \sum_1^p (x_{1i} - \overline{x_1})^2$, $s_2 = \sum_1^q (x_{2j} - \overline{x_2})^2$, $\overline{x_1} = \frac{1}{p}x_{1.}$, $\overline{x_2} = \frac{1}{q}x_{2.}$ 이다.

정리 2. *직교변환* $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$ *에 대한* Second-order probability matching prior 는 $h(\theta_2,\theta_3,\theta_4) \propto 1$ *이므로 다음과 같으며*

$$\pi_S \propto \frac{|\theta_2|}{\theta_4 g(\theta_1)}$$

원래의 모수에 대하여 표현하면 다음과 같다.

$$\pi_S(\mu,\alpha,\beta,\sigma) \propto \frac{|\beta|}{\sigma}$$

(증명) 보조정리 1 에서 얻어진 Fisher 정보행렬을 $\boldsymbol{I_\theta} = ((I_{ij}))$, $i,j=1,2,3,4$ 라 하면, $\boldsymbol{I_\theta}$ 는 대각행렬이므로 $I_{ij} = 0, \forall\ i \neq j$, $i,j=1,2,3,4$ 이다. 또한 Mukerjee와 Ghosh(1997)의 정리를 이용하기 위해 필요한 계산식들을 정리하면 다음과 같다.

$$L_{1,1,1} = E\left(\frac{\partial l}{\partial \theta_1}\right)^3 = 0 \quad , \quad L_{112} = E\left(\frac{\partial^3 l}{\partial\theta_1^2 \partial\theta_2}\right) = -\frac{1}{\theta_2} I_{11} \quad ,$$

$$L_{113} = E\left(\frac{\partial^3 l}{\partial\theta_1^2 \partial\theta_3}\right) = 0 \quad , \quad L_{114} = E\left(\frac{\partial^3 l}{\partial\theta_1^2 \partial\theta_4}\right) = \frac{2}{\theta_4} I_{11}$$

또한 I^{ij}, $i,j=1,2,3,4$ 를 $\boldsymbol{I_\theta}$ 의 역행렬의 원소라 정의하면 Mukerjee와 Ghosh(1997)가

제안한 Second-order probability matching prior의 조건식 $\triangle_2(\pi, \boldsymbol{\theta}) = 0$ 은 다음과 같은 식이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left[I_{11}^{-\frac{1}{2}} L_{112} I^{22} h(\theta_2, \theta_3, \theta_4)\right] + \frac{\partial}{\partial\theta_4}\left[I_{11}^{-\frac{1}{2}} L_{114} I^{44} h(\theta_2, \theta_3, \theta_4)\right] = 0$$

따라서 각 항을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$-\frac{\sqrt{C}\theta_4}{g(\theta_1)} \frac{\partial}{\partial\theta_2} h(\theta_2, \theta_3, \theta_4) + \frac{\sqrt{C}}{p+q} \frac{\partial}{\partial\theta_4} h(\theta_2, \theta_3, \theta_4) = 0$$

위 식을 만족하는 하나의 가능해인 $h(\theta_2, \theta_3, \theta_4) \propto 1$ 를 대입하고, 원래의 모수에 관해 변환하면 면 위 정리의 결과를 얻게 된다.

Remark 2. π_J, π_{2R}, π_R 은 π_F 에서 적절한 임의의 양함수 $h(\theta_2, \theta_3, \theta_4)$를 취하면 First-order probability matching prior가 될 수 있지만 Second-order probability matching prior가 될 수는 없다.

3. 사후분포

Remark 3. Jeffeys의 사전분포와 Second-order probability matching prior는 다음과 같이 표현할 수 있으며,

$$\pi(\mu, \alpha, \beta, \sigma) \propto \frac{|\beta|}{\sigma^m}$$

m=1 일 때 Second-order probability matching prior를 나타내고, m=4 일 때 Jeffreys의 사전분포를 나타낸다.

Remark 4. 준거사전분포(reference priors)는 다음과 같이 표현할 수 있으며,

$$\pi(\mu, \alpha, \beta, \sigma) \propto \frac{|\beta|}{\sigma^m g^{\frac{1}{2}}(\mu)}$$

m=1 일 때 One-at-a-time 준거사전분포(one-at-atime reference prior)를 나타내며, m=4 일 때 두 그룹 준거사전분포(two-group reference prior)를 나타낸다.

표현의 단순화를 위하여 먼저 다음과 같은 표기를 정의한다.

$$
\begin{aligned}
y_{1..} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} y_{1ik}\ , \qquad y_{2..} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} y_{2jk} \\
S_{XY1} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} y_{1ik}x_{1i} - \frac{(y_{1..}+y_{2..})x_{1.}}{p+q} \\
S_{XY2} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} y_{2jk}x_{2j} - \frac{(y_{1..}+y_{2..})x_{2.}}{p+q} \\
S &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} y_{1ik}^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} y_{2jk}^2 - \frac{(y_{1..}+y_{2..})^2}{n(p+q)} \\
D &= \frac{py_{2..}-qy_{1..}}{p+q} \\
C(\mu) &= S - \frac{(S_{XY1}+S_{XY2}+D\mu)^2}{ng(\mu)} \\
e(\mu) &= \left[\frac{S-C(\mu)}{C(\mu)}\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

정리 3. $\pi(\mu,\alpha,\beta,\sigma)\propto \frac{|\beta|}{\sigma^m}$ 에 대한 μ의 주변사후분포는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\pi^A(\mu) \propto\ & \frac{1}{g(\mu)}\frac{2}{n(p+q)+m-4}S^{-\frac{n(p+q)+m-4}{2}} \\
&+\frac{2e(\mu)}{g(\mu)}[C(\mu)]^{-\frac{n(p+q)+m-4}{2}}\int_0^{e(\mu)}(w^2+1)^{-\frac{n(p+q)+m-2}{2}}dw
\end{aligned}
$$

여기서 $g(\cdot)$ **정리 1**에서 정의된 것과 같다.

정리 4. $\pi(\mu,\alpha,\beta,\sigma)\propto \frac{|\beta|}{\sigma^m g^{\frac{1}{2}}(\mu)}$ 에 대한 μ의 주변사후분포는 다음과 같다.

$$
\pi^B(\mu)\propto\frac{1}{g(\mu)}[C(\mu)]^{-\frac{n(p+q)+m-3}{2}}
$$

여기서 $g(\cdot)$ **정리 1**에서 정의된 것과 같다.

Remark 5. **정리 3**과 **정리 4**의 증명은 그 과정이 매우 복잡하고 길어 본 논문에서는 그 내용을 생략한다.

Remark 6. **정리 3**과 **정리 4**의 주변사후분포는 $n(p+q)+m>5$ 일때 적합성(propriety)을 갖는다. 이의 증명은 Yin(1998)의 정리 3.3.1 과 동일하다.

4. 실증분석

3장에서 구한 무정보적 사전분포(Noninformative Priors)의 유효성을 실제 예를 통해서 입증해 보기 위해 Finley(1978, p105)의 데이터를 사용한다. 다음 <표 1>의 데이터는 비타민 B_{12} 에 대한 Leichmann 유산균의 성장반응에 관한 것이며, 각각의 무정보적 사전분포 에 대응하는 모수의 주변사후분포를 통해 얻어지는 사후분포의 분위수(posterior quantile)을 사용하여 구한 95% Bayesian 신뢰구간을 Finley(1978)의 것과 비교해본다.

<표 1> 비타민 B_{12} 에 대한 Leichmann 유산균의 성장반응

약품	Standard			Test		
투약수준	-1.0	0.0	1.0	-1.0	0.0	1.0
반 응	0.96	1.06	1.17	0.91	1.09	1.15
	0.91	1.07	1.14	0.93	1.04	1.15
	0.92	0.99	1.14	0.98	0.97	1.14
	0.76	0.86	1.13	0.96	1.06	1.16
	1.03	1.06	1.13	0.89	1.04	1.10
	0.93	1.02	1.15	1.01	1.02	1.15

Finley(1978)가 Fieller(1954)의 방법을 따라 구한 95% 신뢰구간은 (-0.193 , 0.551) 이며 신뢰구간의 길이는 0.744 이다. 다음의 <표 2>는 **정리 3** 과 **정리 4** 에서 얻어진 주변사후분포함수를 사용하여 얻어진 95% Bayesian신뢰구간과 신뢰구간의 길이를 보여주고 있다. 이 예를 통하여 각 무정보적 사전분포가 신뢰구간 추정을 잘 수행하는 것을 알 수 있으며, 시후분포의 분위수(posterior quantile)을 사용하여 얻어진 Bayesian 신뢰구간이 Finey(1978)의 신뢰구간보다 짧은 것을 알 수 있다. <표 2>에서 P_{α} 는 하위 $100\alpha\,\%$ 분위수를 의미한다.

<표 2> Bayesian Posterior Quantiles

사전분포	$P_{0.025}$	$P_{0.975}$	길 이
π_J	-0.165	0.523	0.688
π_{2R}	-0.170	0.517	0.687
π_R	-0.181	0.529	0.710
π_S	-0.182	0.541	0.723

참고문헌

[1] Berger, J.O., and Bernardo, J.M.(1992a). On the development of reference priors (with discussion). In J.M.Bernardo, J.O.Berger, A.P.Dawid & A.F.M.Smith, *Bayesian Statistics* vol. 4, 35-60. Oxford University Press, London.

[2] Berger, J.O., and Bernardo, J.M.(1992b). Ordered group reference priors with application to the multinomial problem. *Biometrika,* vol. 79, 25-37.

[3] Bernardo, J.M.(1992). Reference posterior distributions for Bayesian inference. *JRSS B,* vol. 41, 113-147.

[4] Cox, D.R., and Reid, N.(1987). Parameter orthogonality and approximate conditional inference. *JRSS B,* vol. 49, 1-39.

[5] Datta, G.S., and Ghosh,M.(1995). Some remarks on noninformative priors. *JASA* vol. 90, 1357-1363.

[6] Fieller, E.C.(1954). Some problems in interval estimation. *JRSS B,* vol. 16, 175-185.

[7] Finney, D.J.(1971). *Probit Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge.

[8] Finney, D.J.(1978). *Statistical Methods in Biological Assay.* Charles Griffin & Company , London.

[9] Jeffreys, H.(1961). *Theory of probability.* Oxgord University Press, Oxford.

[10] Mukerjee, R., and Ghosh, M.(1997) Second order probability matching priors. *Biometrika,* vol. 84, 970-975.

[11] Tibshirani, R.(1989). Noninformative priors for one parameter of many. *Biometrika,* vol. 76, 604-608.

[12] Yin,M(1998). Noninformative priors with applications. Ph.D dissertation of the University of Florida.

[2002년 2월 접수, 2002년 5월 채택]