한국정밀공학회지 제19권 제9호 (2002년 9월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 19, No. 9, September 2002.

외연적과 내연적 유한요소법에 의한 자동차 로어암의 하이드로포밍 공정해석

김정*, 최한호**, 강범수***

Analysis of Hydroforming Process for an Automobile Lower Arm by Using Explicit and Implicit FEM

Jeong Kim*, Han Ho Choi**, Beom Soo Kang***

ABSTRACT

Recently tube hydroforming has been widely applied to the automotive industries due to its several advantages over conventional methods. In this paper, attention is paid to comparison of an implicit and an explicit finite element method widely used for numerical simulation of a hydroforming process. For an explicit FEM, a huge amount of computational time is required because of the very small time increment to solve a quasi-static problem. Hence, when an explicit FEM is used for a hydroforming process, it is general to convert the real problem to a virtual problem with a different processing time and mass density by appropriate scaling factor. However it is difficult to figure out how large the scaling should be adopted enough to ignore the dynamic effects and maintain the desired accuracy. In this paper, the comparison of the results obtained from both methods focus on the accuracy of the predicted geometrical shape and the stress with various scaling factors which are applied to analyze hydroforming process of an automobile lower arm.

Key Words : Implicit FEM (내연적 유한요소법), Explicit FEM (외연적 유한요소법), Hydroforming (하이드로포밍), Lower Arm (로어암)

기호설명

π = functionals

$\sigma_{ij}, \bar{\sigma}$ = stresses and effective stress

$\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\bar{\varepsilon}}$ = strain-rates and effective strain-rate

ρ = mass density

Δt = time increment

K = a penalty constant to remove the incompressibility constraint

F_i, t_i = surface tractions on surface boundary S_F

$v_i, \dot{u}^{(i)}$ = admissible nodal velocities

L = characteristic element dimension

접수 2002년 1월 7일 접수
* 부산대학교 항공우주공학과 대학원
** 부경대학교 기계공학부
*** 부산대학교 항공우주공학과

S_U, S_F, S_C = Surface boundary defined prescribed velocity, traction
$\mathbf{M}$ = mass matrix
$\mathbf{K}$ = tangent stiffness matrix
V_d = dilatational wave speed
$W_{\text{int}}^{plastic}$ = plastic internal energy
E_k = kinetic energy

1. 서론

하이드로포밍(hydroforming) 기술은 액압(hydraulic pressure)을 이용하여 부품을 성형하는 기술로서 사용되는 원소재에 따라 크게 판재(sheet) 하이드로포밍과 튜브(tube) 하이드로포밍으로 나눌 수 있다. 전자는 다품종 소량의 부품을 생산하기 위해 개발된 기술로서 도요타자동차의 일부 부품에 적용된 바 있다. 후자는 주로 폐단면 구조의 샤시 및 차체 부품을 제작하는데 사용된다. 튜브 하이드로포밍은 튜브를 적당히 절단한 후 금형 속에 장착하여 관 양측을 밀봉한 후 내부에 압력을 부가하여 성형하는 방법이다. 사용되는 튜브는 주로 강관, 알루미늄관, 스테인레스관 등이며 필요에 따라서는 하이드로포밍 전에 굽힘(bending) 공정과 같은 예비 성형을 먼저 하기도 한다.

자동차 부품을 성형하는 데 있어서 기존의 하프셸(half shell)방식은 강판을 프레스 성형 후 용접하여 제작하므로 다단계의 공정이 요구되는데 비하여, 하이드로포밍 공법은 한번의 공정에서 완료될 수 있으므로 다음과 같은 장점 등을 가지고 있다. 첫째, 용접 공정이 필요 없고 금형수가 대폭 삭감되어 비용절감이 가능하며 프레스 작업에 비해 재료수율이 높다는 것 이다. 둘째로는 점(spot)용접이 아닌 심(seam)용접 구조이므로 강성 및 강도, 특히 피로강도가 높기 때문에 두께를 많이 줄일 수 있다는 것이다. 또한 가공경화를 이용하면 최대 30%까지의 경량화도 가능한 것으로 알려져 있다.

이러한 장점에도 불구하고 하이드로포밍 공정기술의 체계적인 연구는 근래에 들어 이루어지기 시작하여 그 제반기술이 부족한 실정이다. 따라서 현장에서는 거의 시행착오에 의하여 공정설계를 수행하고 있는 실정이다. 최근 컴퓨터기술의 발전과 함께 하이드로포밍 공정설계에도 수치해석기법이 적용되고 있으며, 이러한 수치해석을 이용한 공정설계는 종전의 많은 시행착오와 설계비용을 줄일 수 있다[1].

유한요소법은 하이드로포밍 공정설계에 많이 적용되어지고 있는 수치해석 기법 중 하나이다. 특히 외연적(explicit) 유한요소법을 활용한 하이드로포밍 공정설계는 최근 많은 활용사례를 보여주고 있다. 외연적 유한요소법의 가장 큰 장점은 대변형 문제에서 접촉조건의 변화에 따라 해의 수렴을 위한 반복적인 계산 과정을 필요치 않으므로 컴퓨터의 메모리 관리가 용이하며 큰 3차원 문제에서도 계산시간을 상당히 단축할 수 있다는 것이다[2]. 그러나 이에 따른 해의 신뢰성이 내연적(implicit) 유한요소법보다는 떨어질 수 있으며, 또한 준정적 상태(quasi-static state)를 고려할 경우에는 관성 또는 동적 효과를 무시할 수 있어야 하기 때문에 아주 작은 시간증분(time increment)이 요구되며 이는 오히려 많은 계산시간이 소요될 수 있음을 의미한다. 일반적으로 이러한 문제점을 해결하기 위하여 적절한 시간척도(time scale)와 질량척도(mass scale)를 부가하여 가상의 성형문제로 가정한 후 해석을 수행하고 있다[3~5].

본 연구에서는 재료의 강소성 모델을 근거로 자체 개발한 3차원 유한요소해석 프로그램[6]인 Implicit HydroFORM-3D와 Explicit LS-Dyna3D를 사용하여 자동차의 로어암 부품에 대한 하이드로포밍 해석을 수행한 후 두가지 방법에 의한 해석결과를 서로 비교하였다. 또한 외연적 유한요소해석에서는 시간척도와 질량척도의 변화에 따른 동역학적 효과(dynamic effect)에 대한 오차를 추정하여 적절한 시간척도와 질량척도를 선정할 수 있는 방법을 제시하고자 하였다.

2. 이론적 배경

2.1 내연적 유한요소법

유동방정식에 근거를 두고 탄성체의 체적력을 무시할 때, 변형의 지배방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다[7].

$$\sigma_{ij,j} = 0 \tag{1}$$

경계면 S는 3가지 영역 즉, $S = S_U + S_F + S_C$로

가정한다. 여기서 S_U는 속도가 정의된 면, S_F는 표면력 F가 정의된 면, 그리고 S_C는 표면의 접선 방향으로는 표면력이 정의되고 법선 방향으로는 속도가 정의된 면을 말한다. 따라서 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij}n_j = F_i \quad on\ S_F$$
$$u_i = \overline{u}_i \quad on\ S_U \tag{2}$$

여기서, n_j는 경계면에 대한 j번째 법선 벡터 성분, F_i는 체적력의 i번째 성분, $\overline{u}_i$는 정의된 속도의 i번째 성분이다. 따라서 주어진 유한요소 영역에 대한 지배방정식을 범함수의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\delta\pi = \int_V \overline{\sigma}\delta\dot{\overline{\varepsilon}}dV + K\int_V \dot{\varepsilon}_v\delta\dot{\varepsilon}_v dV - \int_{S_F} F_i\delta u_i dS = 0 \tag{3}$$

여기서 $\overline{\sigma}, \dot{\overline{\varepsilon}}$은 유효 응력(effective stress)과 유효 변형률(effective strain rate)을 말한다. 체적 V는 3차원 육면체 요소로 분할되며 요소내의 속도장은 $u_i = N_{ij}v_j$로 표현된다. 여기서 N_{ij}는 3×24의 형상함수(shape function)에 대한 행렬, v_j는 24개의 절점에서의 속도 벡터이다. 운동방정식을 이용하여 구성방정식을 선형화된 변분 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{v} = \mathbf{f} \tag{4}$$

여기서 $\mathbf{K}$는 접선 강성행렬(tangent stiffness matrix)로 (3)식의 2차 미분식과 동일하며 $\mathbf{f}$는 절점의 하중벡터를 나타낸다. 식(4)의 속도 증분 벡터 $\Delta\mathbf{v}$를 구하기 위해는 뉴튼-랩슨(Newton-Raphson)방법과 같이 해의 수렴을 위한 반복계산이 필요하다.

2.2 외연적 유한요소법

전 절의 내연적 유한요소법과 유사하게 재료의 한 지점에서 지배방정식과 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho\ddot{u}_i \tag{5}$$
$$\sigma_{ij}n_j = t_i \quad on\ S_F$$
$$u_i = \overline{u}_i \quad on\ S_U \tag{6}$$

여기서 σ_{ij}는 코시 응력(Cauchy stress), ρ_i는 현재 밀도, $\ddot{u}_i$는 가속도, b_i는 체적력, t_i는 표면력이다.

외연적 방법의 계산효율은 대각 혹은 집중 질량 행렬(diagonal or lumped mass matrix)을 사용한 외연적 적분 수행에 의존한다. i번째 시간증분에서 식(5)의 운동방정식이 평형조건을 만족하기 위해서는 다음과 같이 가속도가 표현되어진다.

$$\ddot{u}^{(i)} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}^{(i)} - \mathbf{I}^{(i)}) \tag{7}$$

$F^{(i)}$는 표면력과 체적력 등에 의한 외력 벡터(applied load vector), $I^{(i)}$는 응력 발산 등에 의한 내력 벡터(internal force vector), $\mathbf{M}$은 질량 행렬(mass matrix)이다. (i+1)번째 시간증분에서 변위 벡터는 식(5)의 운동방정식을 중앙차분법(central difference method)에 의한 직접 적분을 수행하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} + \Delta t^{(i+1)}\dot{u}^{(i+\frac{1}{2})}$$
$$\dot{u}^{(i+\frac{1}{2})} = \dot{u}^{(i-\frac{1}{2})} + \frac{\Delta t^{(i+1)} + \Delta t^{(i)}}{2}\ddot{u}^{(i)} \tag{8}$$

여기서 $\dot{u}$와 u는 각각 전체 절점에서의 속도 벡터(velocity vector)와 변위 벡터(displacement vector)를 나타낸다. 식(8)에서 알 수 있는 바와 같이 이전 시간증분에서 기지의 $\dot{u}^{(i-\frac{1}{2})}$, $\ddot{u}^{(i)}$로부터 현재 시간증분에서의 미지수 $u^{(i+1)}$를 외연적 적분으로부터 쉽게 구할 수 있음을 잘 보여준다. 형상은 초기 형상에 변위 증가를 더하여 구해진다.

식(7),(8)에서 보듯이 외연적 적분방법에서는 내연적 방법과 달리 해를 구하기 위한 반복계산 및 접선 강성행렬을 구하는 과정이 필요하지 않음을 알 수 있다. 하지만 외연적 적분은 시간증분 Δt와 관련한 다음의 제한 조건을 만족하는 경우에만 조건적인 안정(conditionally stable)한 해를 구할 수 있다.

$$\Delta t \approx L / V_d \qquad (9)$$

여기서 L은 특성 요소 길이(characteristic element dimension), V_d는 재료의 팽창 파장 속도(dilatational wave speed)를 말한다. 식(9)의 제한조건을 만족하는 시간 증분은 실제 성형시간과 비교해 볼 때 상대적으로 매우 작은 값이 되며 이로 인하여 많은 계산시간이 소요되게 된다. 따라서 외연적 유한요소해석에서는 다음과 같은 계산시간을 단축시키는 방법이 일반적으로 널리 사용되고 있다. 첫째가 성형 속도, 예를 들면 하이드로포밍 공정의 경우에 압력증가 속도를 임의로 높임으로써 해석시간을 단축시킬 수 있다. 이를 시간척도(time scale)기법이라고 말한다. 둘째로는, 소재의 밀도를 임의로 증가시켜 시간증분을 증가시킬 수 있는데 이를 질량척도(mass scale)기법이라고 한다. 따라서 외연적 유한요소법에서는 준정적인 상태을 유지하면서, 즉 관성효과 혹은 동적 효과(inertia or dynamic effect)가 해에 영향을 미치지 않으면서 얼마나 빨리 성형시간을 가속시킬 수 있는지를 결정하는 것이 가장 중요하다.

본 논문에서는 하이드로포밍 공정해석에서 널리 사용되고 있는 외연적 유한요소법의 이러한 시간 및 질량척도의 효과를 고찰하기 위하여 자동차 로어암에 대한 하이드로포밍 공정해석을 수행하여 내연적 유한요소법과 비교하였다. 아울러 동적효과에 대한 운동에너지 오차를 추정하고 이를 활용한 시간척도와 질량척도를 적절하게 선정할 수 있는 방법을 제시하고자 하였다.

3. 로어암의 하이드로포밍 성형해석

3.1 해석 조건

Fig. 1의 (a)는 자동차부품의 로어암으로 기존의 프레스가공 후 용접하여 제작한 형상이며, (b)는 하이드로포밍 공법을 사용하여 일체형으로 제작하려는 형상의 CAD 모델이다.

최종 로어암의 성형을 위해서는 하이드로포밍용 금형에 맞추기 위한 초기 굽힘성형 및 스탬핑 공정이 필요하다[8]. 성형 해석에 사용되는 초기 튜브의 바깥 직경은 63.5 mm이고 두께는 2.6 mm 이다. 굽힘성형 전의 초기 길이는 600 mm이다. 해석에 사용되어지는 소재는 등방성 재료로 가정하였

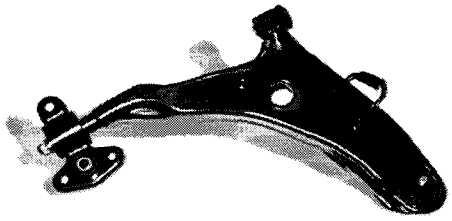


Fig. 1(a) A conventional stamping-welded lower arm assembly

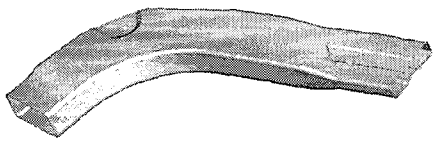


Fig. 1(b) CAD model to be hydroformed

으며, 8절점 육면체요소를 사용하여 분할하였고, 금형은 4절점 사각패치가 사용되었다. 소재의 응력-변형률 관계식은 Table 1에 나타나 있다.
스탬핑 공정 후 상·하 하이드로포밍 금형은 완전히 닫힌 상태가 되고 소재의 양 끝단에 압축력과 압력을 가할 실린더(axial feeding cylinder)를 장착한다. Fig. 2는 하이드로포밍 성형해석을 위한 유한요소 모델링을 보여주고 있으며, Fig. 3과 같은 압력하중 경로를 부가하여 하이드로포밍 성형이 시작된다. 초기에 튜브 내부의 압력을 40MPa까지 증가시켜 일정시간 동안 동일한 압력을 유지한 후 교정압력 단계에서는 80MPa까지 부가한다.

Table 1 Material property of a tubular blank

	STKM-11A
K-value ($\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^n$)[MPa]	468.3
Work hardening exponent, n	0.206
Yield stress [MPa]	215.1

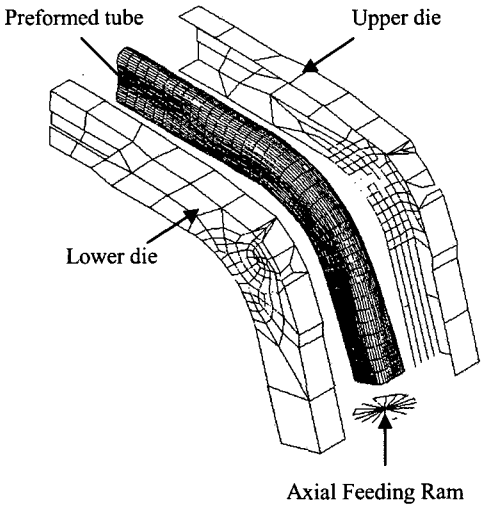


Fig. 2 Finite element model for hydroforming process of an automobile lower arm

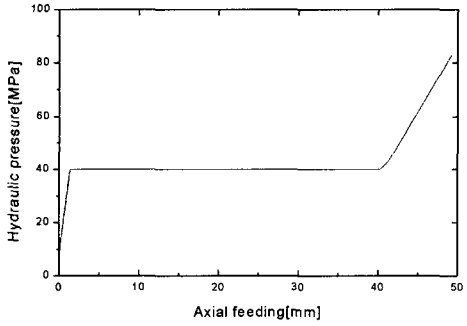


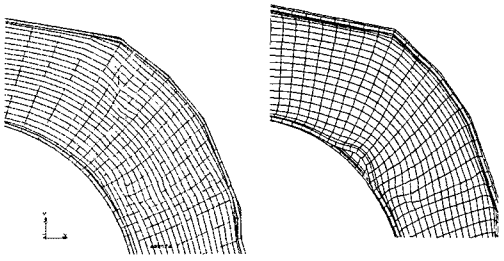
Fig. 3 Hydraulic pressure versus axial feeding displacement

3.2 하이드로포밍 성형해석

자동차 로어암의 하이드로포밍 공정에 대하여 동일한 성형조건을 가지고서 내연적 유한요소법과 외연적 유한요소법을 각각 사용하여 해석을 수행하였다. 내연적 방법은 자체 개발한 강소성 유한요소 해석 프로그램인 HydroFORM-3D를 사용하였고, 외연적 유한요소해석을 위해서는 상용 프로그램인 LS-Dyna3D를 사용하였다. 각 해석 방법에 의한 주요 해석 결과는 Table 2에 정리하여 비교하였다. 외연적 해석의 경우는 질량을 100 배, 성형시간을 0.01 배로 비례척하여 수행한 결과를 보여 주고 있다.

Table 2 The result of hydroforming analysis

FEM Code	Implicit	Explicit
$\bar{\sigma}_{max}$ [MPa]	475.2	499.0
$\bar{\varepsilon}_{max}$	0.738	0.766
t_{min} [mm]	1.730	2.384
Clamping force	3,403 kN	3,489 kN
Axial feeding force	162.0 kN	112.9 kN



(a) Implicit method (b) Explicit method

(c) Experimental prototype

Fig. 4 Actual shape and numerical one predicted by using implicit and explicit methods

최대 응력값과 최대 변형률값은 외연적방법이 다소 크게 나타났으며, 최소 두께값은 내연적 방법이 더 작은 값을 보였다. 클램핑 하중은 각각 유사한 반면 압축실린더의 하중은 내연적 방법이 크게 나타났다. Fig. 4는 실제 하이드로포밍 공정을 통하여 제작된 시제품과 성형해석 후의 최대 확관이 발생하는 부위을 확대하여 보여주고 있다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 내연적 유한요소해석 결과는 실험 결과와 같이 성형 후 주름이 발생하지 않았지

만, 임의의 시간척도와 질량척도를 사용한 외연적 방법은 동력학적 효과(dynamic effect)에 기인한 주름현상이 발생하였음을 알 수 있다. 따라서 이러한 동력학적 효과에 대한 정량적인 분석을 토대로 적절한 시간 및 질량 척도를 선택하여야만 정확한 해를 구할 수 있음을 보여준다.

4. 동력학적 효과와 오차추정

시간척도와 질량척도에 의한 외연적 유한요소 해석 결과의 영향을 평가하기 위하여 Table 3과 같이 서로 다른 네 가지 경우에 대한 하이드로포밍 해석을 수행하였다. Alpha-433 CPU를 탑재한 Digital 워크스테이션을 사용할 때, 해석시간은 A, B, C, D 각각 73, 52, 76, 225분이 소요되었다. 이 결과로부터 해석시간을 줄이기 위해서는 시간척도는 작게 하고, 질량척도는 큰 값을 부여해야 함을 알 수 있다.

Table 4는 네 가지 경우에 대한 성형해석 후 유효응력값의 분포 범위를 나타낸 것이다. 해석 조건 C를 제외한 모든 경우에 있어서 Fig. 4(b)와 같은 주름현상이 발생하였으며, 해석 조건 C 또한 Table 4에서 보는 바와 같이 다른 경우에 비하여 응력값이 현저하게 작게 나타나고 있음을 알 수 있다. 이것은 부적절한 시간 및 질량척도를 사용함에 따른 동적효과에 의하여 해의 불안정성을 잘 보여주고 있는 것이다. 따라서 성형해석을 위하여 외연적 유한요소법을 사용하는 경우, 시간 및 질량 척도값을 신중히 선택하지 않는다면 안정적인 해를 얻기가 상당히 어렵다는 것을 말해 주고 있다. Belytschko 등은 안정적인 해를 얻기 위한 척도값을 결정하기 위하여 동적효과에 대한 오차 추정방법을 제시하였으며, 그 관계식을 소성일(plastic work)에 대한 운동에너지의 변화비로서 다음과 같이 표현하였다[9,10].

$$e(t)=\frac{1}{W_{\text{int}}^{plastic}(t)}\int_0^t\int_\Omega dE_k=\frac{E_k(t)-E_k(t_y)}{W_{\text{int}}^{plastic}(t)} \qquad (10)$$

여기서 $W_{\text{int}}^{plastic}$는 소성 내부 에너지(plastic internal energy)이며, E_k는 운동에너지(kinetic energy), t_y는 소성 변형이 시작되는 시간이다.

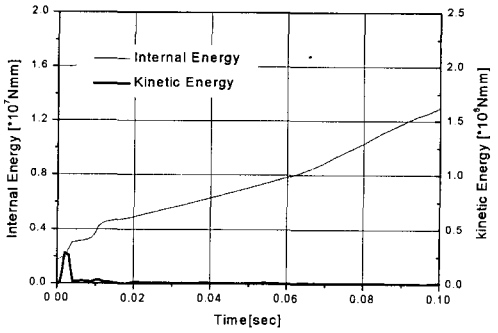
Table 3 Analysis cases with different mass and time scale

Case	Mass scale	Time scale
A	100	0.11
B	1,000	0.11
C	1	0.011
D	1,000	1.1

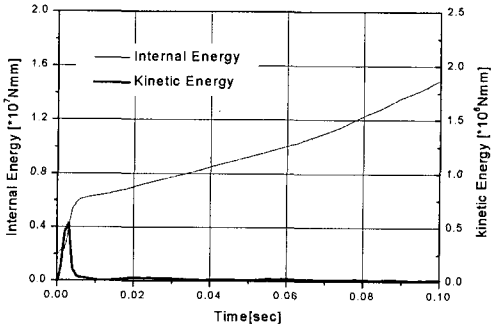
Table 4 Effective stress distribution of each case

Case	Stress distribution [MPa]
A	192.6 ~ 456.0
B	124.2 ~ 435.3
C	52.8 ~ 191.1
D	141.8 ~ 456.7

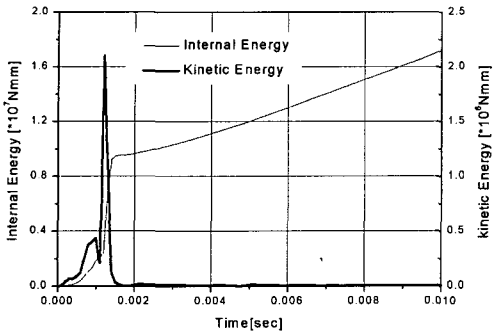
식(10)의 동적효과에 대한 오차값은 동적해와 정적해의 차이로 인해 발생하며, 그것은 소성 내부 에너지에 대한 운동에너지의 비값 그리고 전달되는 에너지로 표현할 수 있다.



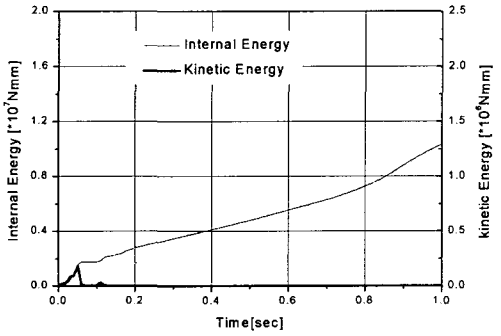
(a) CaseA



(b) Case B



(c) Case C



(d) Case D

Fig. 5 Internal energy and kinetic energy history for each case

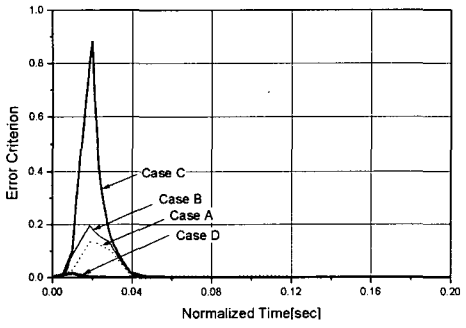


Fig. 6 Error estimates for dynamics effects

Fig. 5는 계산된 소성 내부에너지와 운동에너지를 네 가지 해석조건에 대해서 함께 나타낸 그래프이다. Fig. 6은 식(10)를 이용하여 얻은 동적효과에 의한 오차 추정치이다. 해석조건 C의 경우에는 Fig. 5(c)에서 알 수 있듯이 운동에너지의 과도한 증가로 인하여 성형 초반부에 큰 오차값을 보이고 있다. 이것은 해석조건 C의 경우가 동적효과에 가장 민감함을 보여 주고 있으며, 이에 따라 해석결과, 특히 응력값의 불안정성이 발생되었음을 말해 주고 있다. Fig. 6에서 해석조건 D의 최대 오차 추정치는 1.7%로서, 이 결과를 통해 운동에너지가 소성내부에너지 값의 대략 5%(0.05) 이내가 되도록 질량척도와 시간척도를 결정하는 것이 가장 바람직 할 것으로 판단되어진다.

5. 결론

본 연구에서는 자동차의 로어암 부품에 대한 하이드로포밍 성형해석을 내연적과 외연적 유한요소법에 의하여 수행하였으며, 또한 외연적 유한요소 해석에서는 시간척도와 질량척도에 의한 해의 오차를 추정하여 비교하였다. 그 결과를 정리하면 다음과 같다.

(1) 하이드로포밍 성형해석에서의 내연적 방법과 외연적방법은 유사한 결과를 얻을 수 있었다. 다만 동일 압력조건에서 내연적 방법이 대체로 정확한 변형형상을 보여주고 있다.

(2) 준정적상태를 고려한 성형해석을 할 경우에는 외연적 유한요소법은 질량척도와 시간척도를 사용하여 계산시간을 줄일 수 있어야 한다. 계산시간은 시간척도가 작을수록, 질량척도는 클수록 줄어든다. 그러나 적절하지 못한 척도값의 사용은 해의 정확성을 떨어뜨릴 수 있다.

(3) 안정적인 해를 얻기 위해서는 적절한 척도값의 선택이 필요한데, 그 값의 결정을 위하여 내부 소성일에 대한 운동에너지의 변화비로 표현되어지는 동적 효과에 대한 오차 추정 방법을 사용하였다.

(4) 외연적 유한요소해석 결과의 신뢰성은 동적효과에 많은 영향을 받으며, 운동에너지가 소성내부에너지 값의 5% 이내가 되도록 질량척도와 시간척도를 결정하는 것이 바람직하다.

후 기

이 연구는 부산대학교 ERC/NSDM과 두뇌한국21(BK21)사업의 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. Dohmann, F. and Hartl, C., "Tube hydroforming research and practical application," J. of Material Processing Technology, Vol. 71, pp. 174-186, 1997.
2. Jung, D.W. and Yang, D.Y., "Step wise combined implicit-explicit finite element simulation of autobody stamping processes," J. of Materials Processing Technology, Vol. 83, pp. 245-260, 1998.
3. Wang, S.P., Choudhry, S., and Wertheimer, T.B., "Comparison between the static implicit and dynamic explicit methods for FEM simulation of sheet forming processes," White papers in MARC Corp., 1997.
4. Sun, J.S., Lee, K.H., and Lee, H.P., "Comparison of implicit and explicit finite element methods for dynamic problems," J. of Material Processing Technology, Vol. 105, pp. 110-118, 2000.
5. Rebelo, N., Nagtegall, J.C., and Taylor, L.M., "Industrial application of implicit and explicit finite element methods to forming processes," Numerical Methods for Simulation of Industrial Metal Forming Processings ASME, CED-Vol.5/ AMD Vol. 156, 1992.
6. Kim, J., Lei, L.P., Hwang, S.M., Kang, S.J., and Kang, B.S., "Manufacture of an automobile lower arm by hydroforming," Int. J. of Machine Tools & Manufacture, Vol. 42, pp. 69-78, 2002.
7. Kobayahsi, S., Oh, S.I., and Altan, T., Metal Forming and the Finite Element Method, Oxford University Press, New York, 1989.
8. 김정, 장유철, 강성종, 강범수, "유한요소법을 이용한 자동차 로어암의 액압성형 해석," 한국소성가공학회지, 제10권, 제7호, pp. 534-542, 2001.
9. Mattiasson, K., Bernspang, L., and Samuelsson, A., "Solution of quasi-static, force driven problems by means of a dynamic explicit approach and an adaptive loading procedure," Engineering Computations, Vol. 13, No. 2/3/4, pp.172-189, 1996.
10. Chung, W.J., Cho, J.W., and Belytschko, T., "On the dynamic effects of explicit FEM in sheet metal forming analysis," Engineering Computations, Vol. 15 No. 6, pp.750-776, 1998.