韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2002, 8. 제 41권, 제 2호, 227-231.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Aug. 2002, Vol. 41, No. 2, 227-231.

피타고라스의 세 수

박 웅 배 (상도중학교)
박 혜 숙 (서원대학교)

I. 서 론

고대 기하학은 유사한 것들에 대한 실험과 관찰, 추측, 때로는 직관에 의하여 도달된 경험의 과정들로 이루어져 있다. 이집트인들은 피라미드의 부피에 대한 정확한 공식을 발견했는가 하면 직사각형의 넓이를 구하는 방법으로 모든 사각형의 넓이가 구해진다고 믿기도 하였다. 그 후 탈레스를 필두로 그리스인들은 기하학적 명제는 시행착오가 아니라 연역적 추론에 의하여 세워져야 한다고 주장하여 기하학을 논리적으로 전개하였다. 탈레스에 의하여 시작된 기하학의 체계화는 피타고라스와 그의 제자들에 의하여 발전하게 된다(Greenberg(이우영 역), 1990). 피타고라스는 남부 이탈리아에 종교적 성격이 짙은 학파를 만들어 수학, 과학, 천문학, 음악 등을 연구하였다. 이 학파에서 발견된 새로운 내용이나 지식은 피타고라스의 이름으로 발표하였으므로 피타고라스의 정리도 피타고라스 자신이 증명한 것인지는 알 수 없다.

피타고라스의 정리가 나오기 이전에도 이 내용에 대한 기록이 전해져 내려온다. 고대 이집트에서도 끈에 12개의 매듭을 만들어 끈의 길이의 비가 3 : 4 : 5가 되도록 삼각형을 만들어 직각이 됨을 측정했다고 한다. 또, 메소포타미아의 유적에서 발견된 함무라비 시대의 바빌로니아인의 점토판에는 $a^2+b^2=c^2$을 만족하는 피타고라스의 세 수 a, b, c가 설형문자로 기록되어 15쌍이나 발견되고 있다. 비록 피타고라스의 정리에 대한 증명은 없지만, 이 점토판으로 미루어 볼 때 그 당시의 바빌로니아에서도 피타고라스의 정리를 알고 있었던 것 같다 (박윤범 · 박혜숙 · 권혁천 · 육인선, 2002).

중국에서는 피타고라스의 정리를 '구고현(勾股弦)의 정리'라고 불렀는데, 이것은 중국에서 가장 오래된 문헌인 '주비산경(周婢算經)'에 적혀 있다. 이 책의 기본이 되는 것이 바로 구고현의 정리로서, 이 책에서는 구고현의 정리의 내용과 증명을 한 장의 그림으로 대치하고 있다. 또한 한나라 시대(1세기 경)의 수학책인 '구장산술(九章算術)'의 제 9장 '구고(句股)'의 장에서는 피타고라스의 정리의 활용 문제와 피타고라스의 세 수를 찾을 수 있다 (차종천 역, 2000).

한편, 우리나라에서는 신라시대의 천문관측 기구로 알려져 있는 첨성대에 피타고라스의 수가 이용되고 있음을 발견할 수 있다. 즉, 첨성대의 높이와 밑면의 정사각형의 대각선의 길이의 비가 5 : 4이며, 첨성대의 밑의 원의 지름과 위의 원의 지름의 비는 5 : 3으로 피타고라스의 세 수인 3, 4, 5가 쓰이고 있다. 이 외에도 신라시대의 건축물에서는 피타고라스의 정리의 흔적을 찾을 수 있다(안소정, 2000).

현재 우리나라의 중등학교 수학에서, 제 7차 교육과정에서는 피타고라스의 정리를 9-나 단계에서 다루되 피타고라스의 정리의 역은 증명 없이 문제 상황을 통해 간단히 다루도록 하고 있다(교육부, 1998). 교과서나 참고서에 나오는 피타고라스의 정리 관련 문제에서 등장하는 피타고라스의 세 수는 {3, 4, 5}, {5, 12, 13}, {8, 15, 17}, {7, 24, 25} 등이거나 이들의 배수들이 대부분이다. 물론 계산을 간단히 하기 위하여 교과서에서 쉬운 수를 예로 보여주는 것이겠지만 이런 것은 자칫 피타고라스의 세 수인 자연수 쌍은 이것들밖에 없다고 오해할 수도 있을 것이다.

이런 점에 착안하여 본고에서는 3이상의 모든 자연수는 세 변의 길이가 모두 자연수인 직각삼각형의 한 변의 길이가 될 수 있음을 밝히고 이 수들을 찾아보기로 한다.

---

* 2002년 7월 투고, 2002년 8월 심사 완료.
* ZDM분류 : G43
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 피타고라스의 세 수, 피타고라스의 정리.

이런 수의 쌍에는 비록 복잡한 수가 섞여 있어서 문제로 주어지면 계산하기 쉽지 않을 수도 있지만 정보화 교육을 강조하는 제 7차 교육과정에서는 계산기의 사용도 권장하여 이런 수를 계산하게 해 봄으로써 학생들이 피타고라스의 정리나 자연수의 성질을 이해하는데 도움이 될 수 있을 것이다.

Ⅱ. 본 론

1. 피타고라스의 세 수의 정의

여기서는 피타고라스의 세 수를 정의하고 간단한 예를 살핀다.

정의 1. 정수를 계수로 가지는 방정식의 해 중에서 그 값이 모두 정수인 해를 **정수해**라 하고, 이러한 방정식의 정수해만을 구하는 경우에 이 방정식을 **부정방정식**(indeterminate equation) 또는 **디오판투스 방정식**(Diophantine equation)이라 한다.

부정방정식

$$x^2+y^2=z^2$$

을 만족시키는 양의 정수해 x, y, z를 **피타고라스의 세 수**(Pythagorean triple)라 한다(김응태 · 박승안, 1989)

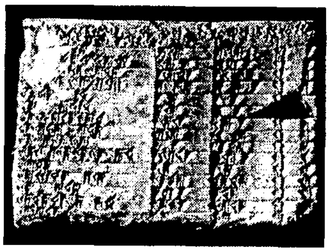
정의 2. 피타고라스의 세 수 중에서 세 개의 자연수가 1이외의 어떤 공통 인수도 갖지 않을 때 이를 **원시 피타고라스의 세 수**(primitive Pythagorean triple)라 한다(이종우 편저, 1997).

예. 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있는 자연수 세 개의 쌍은 다음과 같은 것들이 있다(한국사전연구원, 1989).

{3, 4, 5}	{5, 12, 13}
{8, 15, 17}	{12, 35, 37}
{20, 21, 29}	{7, 24, 25}
{9, 40, 41}	{11, 60, 61}
{16, 63, 65}	{28, 45, 53}
{13, 84, 85}	{33, 56, 65}
⋮	⋮

2. 플림프톤 322

19세기 초에 메소포타미아에서 발견된 바빌로니아 점토판 50만 개 중에서 약 300개가 수학에 관련된 점토판으로, 그 중에서 'Plimpton 322'로 알려진 점토판에는 바빌로니아 고어체로 쓰여진 피타고라스의 세수가 여러 쌍 적혀 있다.



<그림 1> 플림프톤 322

이 점토판은 기원전 1900년에서 기원전 1600년 사이에 쓰여진 것으로 추정되며 1945년에 분석되었다. 이 판의 뒤의 3줄의 숫자를 10진법으로 고치면 다음과 같다(이종우 편저, 1997).

119	169	1
3367	4825	2
4601	6649	3
12709	18541	4
65	97	5
319	481	6
2291	3541	7
799	1249	8
481	769	9
4961	8161	10
45	75	11
1679	2929	12
161	289	13
1771	3229	14
56	106	15

위의 예에서 11번째 줄의 {45, 60[4], 75}와 15번째 줄

4) 플림프톤 322의 점토판에는 설형문자로 쓰여진 숫자가 4줄 적혀 있는데, 위에서 나열한 뒤의 3줄의 숫자는 각각 직각삼각형의 밑변의 길이, 빗변의 길이, 번호를 뜻한다. 첫 번째 줄에는 분수 형태를 표시하는 수가 있어서 두 번째와 세 번째 수로 직각삼각형의 높이를 계산할 수 있도록 되어 있다. 이 60이라는 수와 뒤의 90이라는 수는 첫 번째 수인 분수 형

의 {56, 90, 106}을 제외한 13개의 쌍은 모두 원시 피타고라스의 세 수가 된다. 이것으로 미루어 보아 당시의 바빌로니아에서는 비록 피타고라스의 정리에 대한 명확한 언급은 없지만 피타고라스의 정리에 대하여 잘 알고 있었다고 추측할 수 있다.

3. 피타고라스의 세 수를 찾는 방법

피타고라스의 세 수에 대하여는 다음의 결과가 있는데, 증명은 김응태 · 박승안(1989)을 참조한다.

<u>정리 1.</u> 부정방정식

$$x^2+y^2=z^2,\quad (x, y)=1$$

의 양의 정수해 x, y, z는 다음과 같은 꼴로 나타내어진다.

$$\{x,\ y\}=\{m^2-n^2,\ 2mn\},\ z=m^2+n^2 \quad \cdots (*)$$

여기서 $(m,\ n)=1,\ m>1,\ n\geq 1$이고, $m\not\equiv n \pmod 2$이다.

위의 정리에서 '$m\not\equiv n \pmod 2$'라 함은 m과 n이 동시에 짝수이거나 홀수일 수는 없다는 것을 뜻하므로 위의 식 (*)에서 x, y 중의 $2mn$은 4의 배수가 됨을 알 수 있다. 이 정리를 이용하여 피타고라스의 세 수를 구하는 것은 짝수와 홀수의 쌍, 혹은 홀수와 짝수의 쌍 $(m,\ n)$을 생각하여 위의 식 (*)에 대입하여야 한다. 그러나 이 값으로 1과 2를 제외한 모든 자연수가 등장하는지 확인하기는 쉽지 않다. 따라서 본고에서는 3이상의 모든 자연수가 세 변의 길이가 모두 자연수인 직각삼각형의 한 변의 길이가 될 수 있음을 쉽게 찾아낼 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

<u>보조정리</u> 자연수 n이 3이상인 홀수일 때 다음 세 수 a, b, c는 피타고라스의 세 수가 된다.

$$a=n,\ b=\frac{n^2-1}{2},\ c=\frac{n^2+1}{2}$$

이 때, b는 4의 배수이고 c는 홀수이다.

증명)

n이 홀수이므로 $n=2k+1$(k는 자연수)로 놓을 수 있다. 그러면

$$b=\frac{n^2-1}{2}=\frac{(2k+1)^2-1}{2}$$
$$=\frac{4k^2+4k}{2}=2k(k+1)$$

이다. 따라서 b는 4의 배수인 자연수이다. 또,

$$c=\frac{n^2+1}{2}=\frac{(2k+1)^2+1}{2}$$
$$=\frac{4k^2+4k+2}{2}=2k(k+1)+1$$

이므로 c는 홀수인 자연수이다. 한편,

$$a^2+b^2=n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{4n^2+n^4-2n^2+1}{4}$$
$$=\frac{n^4+2n^2+1}{4}$$
$$=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$
$$=c^2$$

이므로 세 수 a, b, c는 피타고라스의 세 수가 된다. □

<u>주</u> 위의 보조정리의 세 수는 정리 1의 세 수에 $n=1$을 대입한 세 수를 모두 2로 나누면 얻을 수도 있으나 이 때, n이 짝수이면 성립하지 않음에 유의하여야 한다.

<u>정리 2.</u> 3이상인 임의의 자연수는 세 변의 길이가 모두 자연수인 직각삼각형의 직각을 낀 변의 길이가 될 수 있다.

증명)

(i) 위의 보조정리에서 a, b가 직각을 낀 두 변의 길이가 되므로, 3이상인 임의의 홀수는 세 변의 길이가 모두 자연수인 직각삼각형의 직각을 낀 한 변의 길이가 될 수 있다.

태의 수에 두 번째, 세 번째 수를 적용하여 얻을 수 있는 수이다(Clark 대학 Computer Science Dept.의 David Joyce의 홈페이지 참조 http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/plimpnote.html).

(ii) 이제 3이상인 짝수에 대하여 살펴보자. 짝수 k는 모두 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$k=2^r q \quad (r\geq 1,\ q\text{는 홀수})$$

(ii-1) q가 3이상인 홀수인 경우에는 위의 (i)에서 얻은 세 수 $\{q,\ q_1,\ q_2\}$를 모두 2^r배한 $\{k=2^r q,\ 2^r q_1,\ 2^r q_2\}$이 피타고라스의 세 수가 되므로 k는 세 변의 길이가 모두 자연수인 직각삼각형의 직각을 낀 한 변의 길이가 될 수 있다.

(ii-2) $q=1$인 경우에는 $k=2^r(r\geq 2)$이 되므로 4의 배수가 된다. 그런데 {3, 4, 5}가 피타고라스의 세 수가 되므로 이 세 수에 2^{r-2}를 곱한 세 수인 다음 수가 피타고라스의 세 수가 된다.

$$\{2^{r-2}\cdot 3,\ k=2^{r-2}\cdot 4,\ 2^{r-2}\cdot 5\}$$

따라서 임의의 4의 배수는 변의 길이가 모두 자연수인 직각삼각형의 직각을 낀 한 변의 길이가 될 수 있다.

위의 (i)과 (ii)에서 3이상인 자연수는 세 변의 길이가 모두 자연수인 직각삼각형의 직각을 낀 변의 길이가 될 수 있음을 알 수 있다. □

III 피타고라스의 세 수의 예

<표 1> 피타고라스의 세 수 -- 정리 1 사용
〔여기서 $x=m^2-n^2,\ y=2mn,\ z=m^2+n^2,\ (m,\ n)=1,\ m>1,\ n\geq 1,\ m\not\equiv n \pmod 2$이다.〕

m	n	x	y	z
2	1	3	4	5
4	1	15	8	17
6	1	35	12	37
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3	2	5	12	13
5	2	21	20	29
7	2	45	28	53
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4	3	7	24	25
8	3	55	48	73
10	3	91	60	109
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

정리 1을 이용하여 피타고라스의 세 수 $x,\ y,\ z$를 구해 보면 아래의 <표 1>과 같다. 이 때, $x,\ y$는 직각을 낀 두 변의 길이로서 서로 바꾸어도 무방하다.

<표 1>에서 알 수 있듯이 3이상인 자연수가 모두 등장하는지 확인하기는 쉽지 않다. 그러나 정리 2를 이용하면 3이상의 모든 자연수가 가능함을 쉽게 알 수 있다 (<표 2> 참조).

<표 2> 피타고라스의 세 수 -- 정리 2 사용
〔여기서 a가 3이상인 홀수인 경우에는
$a=n,\ b=\dfrac{n^2-1}{2},\ c=\dfrac{n^2+1}{2}$ 이다.〕

a	b	c	비고
3	4	5	
4	3	5	a=3인 경우와 동일
5	12	13	
6	8	10	a=3인 경우의 2배
7	24	25	
8	6	10	a=4인 경우의 2배
9	40	41	
(9	12	15)	(a=3인 경우의 3배)
10	24	26	a=5인 경우의 2배
11	60	61	
12	16	20	a=3인 경우의 4배
13	84	85	
14	48	50	a=7인 경우의 2배
15	112	113	
(15	20	25)	a=3인 경우의 5배
16	12	20	a=4인 경우의 4배
17	144	145	
18	24	30	a=3인 경우의 6배
19	180	181	
20	15	25	a=4인 경우의 5배
21	220	221	
(21	28	35)	(a=3인 경우의 7배)
22	120	122	a=11인 경우의 2배
23	264	265	
24	32	40	a=3인 경우의 8배
25	312	313	
(25	60	65)	(a=5인 경우의 5배)
⋮	⋮	⋮	⋮

그 외에 박두일 · 신동선 · 강영환(1999)은 basic 프로그래밍을 이용하여 직각을 낀 한 변의 길이가 3~65까지가 되는 피타고라스의 세 수를 구하였는데, 중간에 누락된 수가 많다.

<표 2>에는 다소 복잡한 수들이 섞여 있으나 이를 활용하면 실생활 문제의 활용이나 피타고라스의 정리에 대한 이해, 나아가서 자연수의 성질에 대한 이해를 돕는데 도움이 될 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 교육부 고시 제 1997-15호 [별책 8].

김응태 · 박승안 (1989). 정수론, 서울: 이우출판사.

박두일 · 신동선 · 강영환 (1999). 중학교 수학 3 교사용 지도서, 서울: 교학사.

박윤범 · 박혜숙 · 권혁천 · 육인선 (2002). 중학교 수학 3 교사용지도서, 서울: 대한교과서.

안소정 (2000). 우리 겨레 수학이야기, 서울: 도서출판 산하

이종우 편저 (1997). 기하학의 역사적 배경과 발달, 서울: 경문사.

차종천 역 (2000). 구장산술 주비산경, 서울: 범양사 출판부.

한국사전연구원 (1989). 수학사전, 서울: 교육문화원.

Greenberg, M.J.(이우영 역) (1990). Euclid 기하학과 비 Euclid 기하학, 서울: 경문사.

On the Pythagorean triple

Park, Woong Bae

Sangdo middle school, Sadang-5dong 181-20, Seoul, 156-095, Korea

Park, Hye Sook

Dept. of Math. Edu., Seowon University, Mochung-dong 231, Cheongju, 361-742, Korea

E-mail: hyespark@seowon.ac.kr

The Pythagorean theorem and Pythagorean triple are well known. We know some Pythagorean triples, however we don't know well that every natural number can belong to some Pythagorean triple.

In this paper, we show that every natural number, which is not less than 2, can be a length of a leg(a side opposite the acute angle in a right triangle) in some right triangle, and list some Pythagorean triples.

* ZDM classification : G43
* MSC2000 classification : 97D40
* key word : on the Pythagorean triple, Pythagorean theorem.