韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2002, 8. 제 41권, 제 2호, 203-213.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Aug. 2002, Vol. 41, No. 2, 203-213.

변의 길이가 특별한 수열을 이루는 삼각형

김 병 무 (충주대학교)

I. 서 론

대학수학에서 수학에 대한 흥미를 일으키고 도전을 해 보도록 하는 기회를 제공하기 위한 몇 가지 시도(김병무, 1997; 2002b)가 있었는데, 특히 김병무(2002a)에서는 비유클리드기하의 가벼운 내용을 도입하여, 삼각형의 내각의 크기의 합이 180도보다 작을 수도 있고 클 수도 있는 경우가 있으며 이 경우에는 유클리드기하에서 전개되는 삼각형이나 사각형의 성질이 달라질 수 있다는 것을 보여줌으로써 미지의 세계에 대한 도전에 자극받을 수 있고 지적 호기심을 충족시킬 수 있는 영역을 넓혀나갈 수 있는 한 예를 보여주었다.

초·중·고 시절에 교과서에서 다룬 삼각형은 주로 이등변삼각형, 정삼각형, 직각삼각형에 대한 것이었다. 예각삼각형이나 둔각삼각형도 간혹 다루기는 하였지만 직각삼각형을 제외하고는 변의 길이가 특별한 성질을 만족하는 삼각형에 대한 언급은 거의 없었다.

본고에서는 삼각형의 세 변의 길이가 등차수열을 이루거나, 세 변의 길이의 차가 등비수열을 이루는 삼각형을 다루고, Heron의 공식을 이용하여 넓이를 구할 때 넓이가 정수, 유리수가 되는 삼각형들에 대해 알아본 후, 구체적인 경우의 예를 Mathematica의 도움으로 알아보기로 한다. 또한 이들 사이의 관계도 조사해 본다.

변의 길이가 c, $c+d$, $c+2d$(c와 d는 정수)인 삼각형을 arithmetic triangle(AT)이라 하는데, 이 AT에 대한 연구는 과거에 많이 이루어져 왔다(Braithwaite and Sellers, 1999).

한편, c와 r이 정수일 때 변의 길이의 차가 등비수열을 이루도록 세 변의 길이가 각각 $c+1$, $c+r$, $c+r^2$인 직각삼각형을 GRT(geometric right triangle)라 하는데, 본고에서는 피타고라스의 정리를 이용하여 이와 같은 GRT의 완전한 특성을 파악하고 이 특성과 ART(arithmetic right triangle)의 특성을 비교하고자 한다.

또, 두 삼각형의 특성의 혼합도 소개하고 GT(geometric triangle), RHT(rational Heron triangle)등 여러 삼각형에 대해 알아보고자 한다. 이들 삼각형의 정의는 본론에서 서술하기로 한다.

II. 본 론

1. 수열과 결합된 삼각형

수세기 동안 수학자들은 여러 가지 형태의 직각삼각형에 매혹되어 왔다. 실제로 Dickson(1971)은 그의 저서 'History of the Theory of Number'에서 이와 같은 업적에 25쪽을 할애하여 서술하고 있다.

최근 Beauregard와 Suryanarayan(1997)은 변의 길이가 c, $c+d$, $c+2d$ 인 삼각형인 AT(arithmetic triangle)와 대응하는 직각삼각형 사이의 관계를 연구했다. 이 때, AT라는 이름은 단순한 형태의 등차수열 '0, d, $2d$, $3d$, $4d$, … '의 각 항에 상수 c를 더한 것으로부터 나온 것이다.

이 연구에는 다음과 같은 질문이 있다 : 변의 길이가 등비수열을 이루는 직각삼각형을 찾을 수 있을까?

이 질문에 대하여는 c와 r이 정수일 때의 표준등비수열 'c, cr, cr^2'을 이용하면 이와 같은 삼각형은 존재하지 않음을 알게 된다. 왜냐하면 공약수 c로 나누면 변의 길이가 1, r, r^2(r은 정수)인 직각삼각형이 되어야 하기 때문이다. 그러나 이런 삼각형이 존재한다면 $(r^2)^2=r^2+1$ 또는 $r^4=r^2+1$이다. $r^4-r^2-1=0$를 풀면 $r^2=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$가 되어 분명히 r은 정수도 아니고 유리수도 아니다. 따라서 변의 길이가 등비수열을 이루

* 2002년 5월 투고, 2002년 8월 심사 완료.
* ZDM분류 : D15
* MSC2000분류 : 97D99
* 주제어 : 변의 길이가 수열을 이루는 여러가지 삼각형, 수학의 흥미

는 직각삼각형은 존재하지 않음을 알 수 있다.

이제 조금 변화시켜서 등비수열 $1, r, r^2$의 각 항에 상수 c를 더하면 $c+1, c+r, c+r^2$을 얻는다. 세 변의 길이가 각각 $c+1, c+r, c+r^2$(c, r은 정수)이고, 넓이가 정수값을 갖는 삼각형을 GT(geometric triangle)라고 한다.

그러면 다음과 같이 위의 질문을 다시 할 수 있다 : GT는 존재하는가?

이 질문과 관련하여 본고에서는 다음과 같은 내용을 서술하고자 한다.

1)에서 ART의 완전한 특성을 알아본다.

2)에서는 위의 질문을 제한하여 다음과 같이 질문한다 : GRT가 존재하는가? 이와 같은 삼각형은 몇 개 존재하는가? 이와 같은 직각삼각형의 생성원(primitive)은 몇 개인가? (참고 : 세 변의 길이의 최대공약수가 1이면 이 직각삼각형을 생성원이라 한다.)

3)에서는 위의 질문 중 마지막 질문이 제기된다.

4)에서 산술적(arithmetic)이라고 부르는 ART와 GRT의 특성을 혼합한 삼각형에 대해 논의를 한다.

1) ART의 존재

ART가 존재한다는 것은 분명하다. 실제로 잘 알려진 (3, 4, 5) 직각삼각형은 $c=3$이고 $d=1$인 ART이다. 이 세 쌍의 수는 AT(arithmetic triangle)와 관련된 많은 질문에 대한 동기가 되는 것은 의심의 여지가 없다.

그러나 이들 ART가 얼마나 많이 존재하는가? 이 질문은 꽤 쉽게 대답될 수 있다.

$(c, c+d, c+2d)$가 피타고라스 수라고 하자. 즉 $c, c+d, c+2d$는 직각삼각형의 직각을 낀 두 변과 빗변의 길이이다. 피타고라스 정리로부터, $c^2+(c+d)^2=(c+2d)^2$이다. 이 방정식을 정리하면 $c^2-2cd=3d^2$이다. 완전제곱식이 되도록 양변에 d^2을 더하면, $(c-d)^2=4d^2$이 되어 $c-d=\pm 2d$ 이다. 삼각형의 변의 길이이므로 $-2d$는 버리고, $c-d=2d$에서 $c=3d$. 따라서 모든 ART는 d가 양의 정수인 변의 길이가 $3d, 4d, 5d$를 갖는다는 것을 알 수 있다. 이것은 ART의 완전한 특성이다.

GRT에 대해 알아보기 전에, 분명히 무한개의 ART가 존재함을 유의하자. 그러나 단 하나의 생성원 (3, 4, 5)가 존재하고, 이 세 쌍의 수는 다른 ART의 분명한 생성원으로 작용한다.

2) GRT의 특성

ART의 분명한 존재 (3, 4, 5)에 반하여 GRT의 존재는 좀 더 알기 어렵다. 그러나 CAS(computer algebra system)의 도움으로 이와 같은 삼각형의 존재를 보이는 것은 쉽다. 실제로 최소의 r을 갖는 GRT는 (140, 147, 203)으로 주어진다. 여기서 $c=139$이고 $r=8$이다.

본고에서는 위와 유사한 분석을 이용하여, 모든 GRT의 특성을 알아보기로 한다.

$c+1, c+r, c+r^2$을 피타고라스 수라고 하면, $(c+1)^2+(c+r)^2=(c+r^2)^2$이고 이것을 정리하면, $c^2-2c(r^2-r-1)=r^4-r^2-1$이고, c를 r의 식으로 풀기 위해 $(r^2-r-1)^2$을 양변에 더하고 간단히 하면, $(c-(r^2-r-1))^2=2r(r+1)(r-1)^2$이다.

따라서, $c+1=r^2-r\pm 2(r-1)\sqrt{\dfrac{r(r+1)}{2}}$이 성립하는데, $r>0$이고 $c+1>0$이면 근호 안의 식은 $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$보다 크므로

$$c+1=r^2-r+2(r-1)\sqrt{\frac{r(r+1)}{2}} \qquad \cdots (1)$$

이다. 확실히, 이것은 ART의 특성보다 더 복잡하다. 그러나 GRT를 갖기 위해 정수 c에 의해 만족되어야 하는 기준을 정해야 한다.

c가 정수이기 위한 필요충분조건은 r이 정수일 때, 식 $y=\sqrt{\dfrac{r(r+1)}{2}}$가 정수인 것이다. 3)의 후반부까지 $r\geq 0$인 경우만 생각할 것이다. 이 경우에 제곱근 안의 식은 무엇인가? 그것은 삼각수(triangular number)이다. n번째 삼각수 S는 S=1+2+3+⋯+n 또는 S=n+(n-1)+⋯+3+2+1이다. 따라서, 2S=n(n+1) 또는 $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$이다.

대부분의 대답은 다음과 같다 : $c+1, c+r, c+r^2$이 Pythagorean triple에 대응하기 위한 필요충분조건은 $\dfrac{r(r+1)}{2}$이 완전제곱수이고 c가 (1)을 만족하는 것이다.

따라서, GRT가 존재하기 위한 필요충분조건은 완전제곱삼각수(sguare triangular number)가 존재하는 것이다. GRT의 특징을 알게 되어도 여러 가지 질문이 남아 있다.

하나는 다음과 같다 : 얼마나 많은 완전제곱삼각수가

존재하는가? Dickson(1971)은 존재의 질문에 대한 대답이 Euler에 의해 증명되었다고 지적한다.

그는 $y^2=\frac{r(r+1)}{2}$ 이 $r\geq 0$와 $y\geq 0$에 대해 성립하기 위한 필요충분조건은 어떤 음이 아닌 정수 n에 대해 아래의 식이 성립함을 증명했다.

$$r=r_n=\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n-2}{4}$$

$$y=y_n=\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}} \qquad \cdots (2)$$

따라서, 각각 n=0, 1, 2일 때 r=0, 1, 8이고 y=0, 1, 6이다. $n\geq 2$에 대해서는 Dickson은 다음 점화식으로 계산한다. $r_n=6r_{n-1}-r_{n-2}+2$와 $y_n=6y_{n-1}-y_{n-2}$ 이다.

n=2인 경우 r=8이므로 위의 (1)에서 c+1=64-8+2(7)$\sqrt{36}$=56+84=140이고 위에서 언급한 값이다. (n=0, n=1인 경우는 삼각형의 조건을 만족시키지 않는다)

따라서, 무한히 많은 이와 같은 완전제곱삼각수가 존재한다. 즉 이것은 많은 GRT가 존재함을 의미한다.

Mathematica를 이용하여 GRT를 구해보면 다음과 같다 (김병무, 1999; Abell and Braselton, 1997; Wolfram 1996).

In[47] : = Clear[c, r, n, grt]

$$c[r\_] := r^2-r+2(r-1)\sqrt{\frac{r(r+1)}{2}}-1$$

In[49] : = $r[n\_] := N\left[\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n-2}{4}\right]$

In[50] : = GRT = Table $[\{c[r[n]]+1,\ c[r[n]]+r[n],\ c[r[n]]+(r[n])^2\}]$

In[51] : = GRT

= Table $[\{c[r[n]]+1,\ c[r[n]]+r[n],\ c[r[n]]+(r[n])^2\},\ \{n, 1, 20\}]$

Out[51] = { {0., 0., 0. }, {140., 147., 203. }, {5712., 5760., 8112. },
{199752., 200039., 282695. }, {6.81912×10^6, 6.8208×10^6, 9.64488×10^6},
{2.31844×10^8, 2.31854×10^8, 3.278844×10^8},
{7.87702×10^9, 7.87708×10^9, 1.11398×10^{10}},
{2.67593×10^{11}, 2.67594×10^{11}, 3.78434×10^{11}},
{9.09034×10^{12}, 9.09034×10^{12}, 1.28557×10^{13}},
{3.08804×10^{14}, 3.08804×10^{14}, 4.36715×10^{14}},
{1.04903×10^{16}, 1.04903×10^{16}, 1.48355×10^{16}},
{3.5636×10^{17}, 3.5636×10^{17}, 5.03969×10^{17}},
{1.21057×10^{19}, 1.21057×10^{19}, 1.71201×10^{19}},
{4.11239×10^{20}, 4.11239×10^{20}, 5.81579×10^{20}},
{1.397×10^{22}, 1.397×10^{22}, 1.97566×10^{22}},
{4.74569×10^{23}, 4.74569×10^{23}, 6.71142×10^{23}},
{1.61214×10^{25}, 1.61214×10^{25}, 2.27991×10^{25}},
{5.47652×10^{26}, 5.47652×10^{26}, 7.74498×10^{26}},
{1.86041×10^{28}, 1.86041×10^{28}, 2.63101×10^{28}},
{6.3199×10^{29}, 6.3199×10^{29}, 8.93769×10^{29}}}

3) Primitive Pythagoras 삼각형

AT에 대한 것과 비교하여, 우선 GRT의 생성(generation)이 ART의 생성보다 훨씬 더 복잡하다는 것을 알아야 한다. 그러나 여전히 대답되어야만 할 질문이 있다. 즉, primitivity가 무엇인가? GRT는 primitive가 아니라는 것은 분명하다. 실제로 (2)에서처럼 r_n과 y_n에 대해 r>0인 모든 GRT에 대해 다음 결과를 증명할 수 있다 :

(명제1) $(c+1, c+r, c+r^2)$이 nondegenerate Pythagorean triple이 되도록 n이 1보다 큰 정수, $r=r_n$이고 $c+1$이 (1)에 의해 주어지면

$\gcd(c+1, c+r, c+r^2)=r-1$이다.

주의 r=2인 GRT가 존재하지 않으므로 GRT는 primitive가 아니라는 것을 의미함을 유의하고, 또 ART의 경우 gcd(c, $c+d$, $c+2d$)=d인 것도 유의한다.

증명) 위의 (1)식으로부터,

$c+1=r(r-1)+2(r-1)y=(r-1)(r+2y)$

단, $y=\sqrt{\dfrac{r(r+1)}{2}}$

따라서, $c+r=(c+1)+(r-1)=(r-1)(r+2y+1)$이고

$c+r^2=(c+1)+(r-1)(r+1)=(r-1)(2r+2y+1)$

$c+1$, $c+r$과 $c+r^2$은 분명히 모두 $r-1$의 배수이다.

또 $\dfrac{c+r}{r-1}=\dfrac{c+1+r-1}{r-1}=\dfrac{c+1}{r-1}+1$이 되어

$\gcd\left(\dfrac{c+1}{r-1}, \dfrac{c+r}{r-1}, \dfrac{c+r^2}{r-1}\right)=1$이다.

따라서, $\gcd(c+1, c+r, c+r^2)=r-1$ □

증명에 의하면 GRT$(c+1, c+r, c+r^2)$에 대응하는 primitive Pythagoras 삼각형은 직각을 낀 두 변의 길이의 차이가 1이다. 이것은 또 다른 질문을 야기한다 : 한 변의 길이가 다른 한 변보다 1큰 임의의 primitive Pythagoras 삼각형이 주어지면, 대응하는 GRT가 존재하는가? r>1에 대해 (3, 4, 5)인 삼각형을 제외하고 모든 경우에 대답은 '예'이다.

이것을 알기 위해 $(\alpha, \alpha+1, \beta)$가 primitive Pythagoras 삼각형이라고 하자.

$(c+1, c+r, c+r^2)$이 직각삼각형이고

$$(c+1, c+r, c+r^2) = ((r-1)\alpha, (r-1)(\alpha+1), (r-1)\beta) \quad \cdots (3)$$

인 정수c와 r을 찾아야 한다.

r이 맞는가를 확인해 보자. $c+1=(r-1)\alpha$ 라면

$c+r=c+1+r-1=(r-1)(\alpha+1)$이고,

$c+r^2=c+1+(r^2-1)=(r-1)\alpha+(r-1)(r+1)$

에서 $c+r^2=(r-1)(\alpha+r+1)=(r-1)\beta$이다.

(3, 4, 5)인 삼각형은 r=1이므로 문제가 된다. 이 경우 $r-1=0$이 되어 degenerate 삼각형이 된다. (3, 4, 5)인 삼각형은 빗변의 길이가 유일하게 가장 작은 변의 길이보다 정확히 2가 크고 변의 길이가 연속된 정수인 PPT(primitive Pythagoras 삼각형)이므로 $(\alpha, \alpha+1, \beta)$ 꼴의 모든 다른 직각삼각형은 GRT에 대응한다. 또 GT의 특성은 한 변의 길이가 다른 변의 길이보다 1이 큰 (3, 4, 5)로 주어진 삼각형 이외에 모든 PT(피타고라스 삼각형)의 특성을 나타낸다.

이제 순서대로 요약해 보자.

첫째, d<0이 허락되는 Beauregard와 Suryanarayan (1997)의 수식 형태를 따르면, (1)식의 r도 음수가 되는 것을 허락할 수 있다.

그러나 $R\geq0$에 대해 $r=-R-1$이고

$$\frac{r(r+1)}{2}=\frac{(-R-1)(-R)}{2}=\frac{R(R+1)}{2} \text{ 이다.}$$

$r<0$이고 $\dfrac{r(r+1)}{2}$이 제곱이라는 요구를 만족할 때는 언제나 $\dfrac{R(R+1)}{2}$은 같은 제곱이고 $R=-r-1\geq0$이다. 그러므로 $r<0$은 정확히 같은 결과를 유도한다.

둘째, 이들 r의 음수값이 (1)식에서 이용될 때, 대응하는 GRT $(c+1, c+r, c+r^2)$은

$\gcd(c+1, c+r, c+r^2)=1-r$과

$\left(\dfrac{c+1}{1-r}, \dfrac{c+r}{1-r}, \dfrac{c+r^2}{1-r}\right)$이

직각을 낀 두 변의 길이의 차이가 1인 primitive Pythagoras 삼각형임을 보일 수 있다.

이 경우에 주어진 PPT $(\alpha+1, \alpha, \beta)$에 대해 대응하는 GRT $(c+1, c+r, c+r^2)=(1-r)(\alpha+1, \alpha, \beta)$는

$$r=\frac{r(r-1)}{r-1}=\frac{[c+r^2-(c+r)]}{r-1}=\alpha-\beta$$

를 요구한다.

r<0이면 마찬가지로 r-1<0이므로, 이 경우에 (3, 4, 5) 삼각형에 대해 문제가 없다.

셋째, GT의 정의에 대해 $(c+a, c+ar, c+ar^2)$를이용하게 되면,

(1)식에서 $c+a=a[r^2-r+2(r-2)\sqrt{\frac{r(r+1)}{2}}]$로

대체하는 관계식을 구할 수 있다.

a로 나누면 (1)식의 방정식의 우변에 대한 식과 같은 우변에 대해 같은 값을 갖는다.

4) ART와 GRT의 혼합(Hybridization) 특성

primitive GRT는 존재하지 않으며, 또한 양의 정수 r에 대한 친밀한 GRT도 존재하지 않는다. 그래서 다음 내용을 ART라고 부르는 ART와 GRT의 혼합 특성으로 정리하려고 한다. 이들은 변의 길이가

$$c+0r^0, c+1r^1, c+2r^2$$

으로 간단히 나타내면 $c, c+r, c+2r^2$인 직각삼각형으로 정의된다. (3, 4, 5)는 primitive인 arithmetic Pytagorean triple임을 유의하고, 무한히 많은 ART가 존재함을 확인해 보자. GRT의 경우와 같이 매우 흥미롭게도 그들의 특성은 정확히 완전제곱삼각수에 달려있다.

더욱이, $(c, c+r, c+2r^2)$이 Pythagorean triple이라면, gcd $(c, c+r, c+2r^2)=r$임을 보일 수 있다.

왜냐하면 $(c+2r^2)^2=c^2+(c+r)^2$에서,

$$c^2+2c(r-2r^2)+r^2-4r^4=0$$

$$c=r(2r-1\pm2\sqrt{2r^2-r})$$

$$c=rk,\quad \gcd(\frac{c}{r}, \frac{c+r}{r}, \frac{c+2r^2}{r})$$

$$=\gcd(k, k+1, k+2r)=1$$

따라서, (3, 4, 5)는 유일한 primitive ART이다.

2. HT와 관련된 GT와 AT의 성질

앞에서 GT와 AT의 개념을 알아보았다. 그러나 이와 같은 삼각형의 결정을 직각을 포함하는 삼각형들로 제한하였다. GT와 AT는 변의 길이와 넓이가 유리수인 삼각형 RHT(rational Heron triangle)의 특별한 경우이다. 여기서는 직각이 아닌 각을 갖는 GT와 AT의 결정에 대하여 어떤 정리에 대한 이론을 더 발전시킨다. 자료는 관심 있는 학부학생도 다룰 수 있고, 또 수학자에게도 흥미로울 수 있다(Sastry, 2002).

1) HT(Heron triangle)의 소개

a, b, c는 $\triangle$ABC의 변의 길이를 나타낸다고 하면, 넓이에 대한 Heron의 공식은

$$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ s=\frac{1}{2}(a+b+c)\quad \cdots(4)$$

이다. $a, b, c, \triangle$가 정수이면, $\triangle$ABC는 HT(Heron triangle)라고 부른다. 그러나 $a, b, c, \triangle$가 유리수이면 $\triangle$ABC는 RHT(rational Heron triangle)라고 부른다 : 예를 들면, $(a, b, c, \triangle)$=(13, 14, 15, 84)는 HT이다. 물론 더 일반적으로 이것은 또한 RHT이다. 그러나 $(a, b, c, \triangle)=(\frac{13}{2}, 7, \frac{15}{2}, 21)$은 RHT만 된다.

PHT(primitive Heron triangle)는 gcd(a, b, c)=1인 HT를 말한다.

(정리1) HT에서는 ① 또는 ②가 성립한다.

① 한 변의 길이가 짝수이고, 나머지 두 변의 길이는 홀수이다.

② 세 변의 길이가 모두 짝수이다.

증명) 우선 PHT인 (a, b, c)를 생각하자. $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$는 정수임을 요구한다.

s가 정수가 아니라면 s는 소수 첫째자리가 5이다. 따라서 s-a, s-b, s-c도 소수 첫째자리가 5이어야 한다. 그러나 (4)는 분명히 이 경우에 $\triangle$가 정수일 수 없음을 보여준다. 따라서 모순이 일어나므로 s는 정수가 되어야 한다. 이것은 a, b, c의 하나가 정확히 짝수이면 나머지 둘은 홀수임을 가능하게 한다. $\triangle$ABC가 primitive가 아니면 gcd(a,b,c)=d>1 이다.

이제 $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d})$는 정확히 한 변의 길이가 짝수이고, 다른 두 변의 길이는 홀수인 PHT이다. d가 홀수이면 a, b, c 중의 하나는 정확히 짝수이고 나머지 둘은 홀

수이다. d가 짝수이면 a, b, c 모두 짝수임에 틀림없고 이 정리는 증명되었다. □

2) HT인 GT(geometric triangle)의 특성

t>0이고 r이 유리수라고 하자. 넓이 △가 유리수이면 $(t+1, t+r, t+r^2)$은 RGT(rational geometric triangle)를 만든다. 이들 유리수가 정수이면 $(t+1, t+r, t+r^2)$은 GT를 형성한다.

(정리2) GT $(t+1, t+r, t+r^2)$에서 t는 홀수인 정수이다.

증명) $s=\frac{1}{2}(3t+1+r+r^2)$은 (정리1)에서 보여진 것처럼 정수이다. r은 홀수 또는 짝수일 수 있으나 $1+r+r^2$은 항상 홀수이다. 따라서, t는 홀수이다. □

3) HT로부터 RGT의 결정

HT로부터 RGT를 만드는 것이 가능하다. 다음 정리는 어떻게 그러한 것이 성립될 수 있는가를 보여준다.

(정리3) (a, b, c)가 알려진 HT라고 가정하면 주어진 삼각형에 닮은 RGT는 많아야 네 개이다.

증명) (a, b, c)에 닮은 삼각형은(ka, kb, kc)꼴이고, k는 양의 유리수이다.

$(ka, kb, kc)=(t+1, t+r, t+r^2)$인 t와 r이 존재하면 이들은 유리수 등비수열을 이룬다.

즉, $t=ka-1$, $r=(b-a)k+1$, $r^2=(c-a)k+1$

따라서,

$$((b-a)k+1)^2=(c-a)k+1,\ k=\frac{a-2b+c}{(b-a)^2}>0$$

식 $a-2b+c$은 a, b, c의 순서를 바꾸면 6가지 방법으로 나타낼 수 있다. 그러나 기껏해야 이들 중 네 개가 양수일 수 있다. 따라서, 많아야 네 개의 k가 존재한다. □

연속하는 변의 길이가 HT가 되는 경우는 무한개 있음을 알 수 있다 :

(3, 4, 5), (13, 14, 15), (51, 52, 53) 등(.Dickson, 1971)으로, 이들은 $(2a-1, 2a, 2a+1)$의 꼴을 갖는다. 이 경우에는 $(2a-1)-2(2a)+(2a+1)=0$이 성립한다. 이들 변의 길이 순서를 $(2a, 2a-1, 2a+1)$로 놓고 (정리3)을 적용하면 (보조정리1)이 주어진다.

(보조정리1) HT$(2a, 2a-1, 2a+1)$는 GT$(6a, 6a-3, 6a+3)$을 생성한다.

증명) $k=\frac{2a-2(2a-1)+2a+1}{\{(2a-1)-2a\}^2}=3$이므로

따라서, $3(2a, 2a-1, 2a+1)=(6a, 6a-3, 6a+3)$ 이다.

예를 들면, (4, 3, 5) 삼각형은 (12, 9, 15) 삼각형을 야기한다. 더 일반으로, Hoppe는 HT의 길이가 등차수열(arithmetic progression)인 다음 식을 유도했다 :

$(a, b, c)=(3(p^2+q^2), 2(3p^2+q^2), 9p^2+q^2)$

(Dickson, 1971) □

정리3을 Hoppe의 결과에 적용하면 다음을 얻는다.

(보조정리2) HT $(3(p^2+q^2), 2(3p^2+q^2), 9p^2+q^2)$는 RGT $\left(\frac{9(p^2+q^2)}{3p^2-q^2}, \frac{6(3p^2+q^2)}{3p^2-q^2}, \frac{3(9p^2+q^2)}{3p^2-q^2}\right)$를 생성한다.

증명) $(3(p^2+q^2), 2(3p^2+q^2), 9p^2+q^2)$의 순서를 바꾸면 $(2(3p^2+q^2), 3(p^2+q^2), 9p^2+q^2)$ 이므로

$$k=\frac{6p^2+2q^2-2(3p^2+3q^2)+9p^2+q^2}{(3p^2-q^2)^2}$$

$$=\frac{3}{3p^2-q^2}$$

이다. 따라서,

$$\left(\frac{9(p^2+q^2)}{3p^2-q^2}, \frac{6(3p^2+q^2)}{3p^2-q^2}, \frac{3(9p^2+q^2)}{3p^2-q^2}\right)$$

를 생성한다. 이것은 GT가 되고,

$$\triangle=\left(\frac{3}{3p^2-q^2}\right)^2 6pq(3p^2+q^2)$$

이 되어 RGT이다. □

이제 정의와 (4)를 이용하여 RGT를 생성해 보자.

$(a, b, c)=(t+1, t+r, t+r^2)$을 RGT라고 하자.

(4)에서

$16\triangle^2=(3t+1+r+r^2)(t-1+r+r^2)(t+1-r+r^2)(t+1+r-r^2)$

이 된다.

특별한 해를 얻기 위해, $3t+1+r+r^2=2(t-1+r+r^2)$라 놓으면 $t=r^2+r-3$이고

$$\triangle^2=2(r-1)^4(r+2)^2(r+1)$$

이 된다.

$\triangle^2$을 유리수의 제곱이 되게 하려면 $r+1=2u^2$이라 놓는다(즉, $r=2u^2-1$).

이것은 $t=4u^4-2u^2-3$을 얻고,

$$(a, b, c, \triangle)$$
$$=(4u^4-2u^2-2,\ 4u^4-4,\ 8u^4-6u^2-2,\ 8u(u^2-1)^2(2u^2+1)) \quad \cdots \ (5)$$

u>1인 정수이면, 이 공식 (5)는 GT를 생성한다 : $u=3$은 $t=303$, $r=17$ 이고

$(a, b, c, \triangle)=(304, 320, 592, 29184)$이 된다.

$u>1$인 유리수이면, 이 공식 (5)는 RGT를 생성한다 :

$u=\frac{3}{2}$은 $t=\frac{51}{4}$, $r=\frac{7}{2}$이고

$(a, b, c, \triangle)=(\frac{55}{4}, \frac{65}{4}, 25, \frac{825}{8})$를 얻는다.

4) 등비수열을 이루는 이등변삼각형(IGT : isosceles geometric triangle)

앞에서 부분적으로만 GT를 결정했다. 다행히 다음과 같이 완전하게 IGT를 정할 수 있다. 변의 길이가 $t+1, t+r, t+r^2$인 GT는 세 가지 방법 중의 하나로 이등변삼각형이 될 수 있다 : (i) $t+1=t+r$ (ii) $t+r=t+r^2$ 또는 (iii) $t+1=t+r^2$

그러나 (i)과 (ii)는 $r=1$ 또는 $r=0$을 의미한다. r=1이면 정삼각형이고, $(t+1, t+1, t+1)$은 무리수 넓이를 갖게 된다. 따라서 $r\neq1$이다. 등비수열 1, r, r^2의 공비는 일반으로 0이 아니라고 가정되므로 $r\neq0$이다. 이제 (iii)에서 $r\neq1$이므로 $r=-1$이다.

따라서, IGT의 변의 길이는 $t+1$, $t-1$, $t+1$ (단, $t>1$)이다. 더욱이 정리1과 정리2는 t가 홀수임을 말한다. 따라서 $t=2u-1(u>1)$이라 하자. 이등변삼각형의 변의 길이는 $2u$, $2u-2$, $2u$, $u>1$꼴을 갖는다.

$(3u-1)(u+1)=v^2$ (정수제곱)이면

공식(4)에서 이 삼각형의 넓이

$\triangle=(u-1)\sqrt{(3u-1)(u+1)}$는 정수가 될 것이다. 이 방정식을 $U^2-3V^2=1$ 꼴로 놓는다.

(단, $U=\frac{3u+1}{2}$ 이고 $V=\frac{v}{2}$)

이 Fermat-Pell 방정식의 해는

$U_n+\sqrt{3}V_n=(2+\sqrt{3})^n$, n=1,2,3,…으로 주어진다.

여기서

$U_1=2,\ V_1=1 \Rightarrow \frac{3u+1}{2}=2,$

$\frac{v}{2}=1 \Rightarrow u=1, v=2$

u는 1보다 크지 않으므로 이 해는 받아들일 수 없다.

$U_2=7,\ V_2=4 \Rightarrow u=\frac{13}{3}, v=8$에서

변의 길이가 $\frac{26}{3}, \frac{20}{3}, \frac{26}{3}$이고 넓이가 $\frac{80}{3}$인 RIGT(rational IGT)를 얻는다.

$U_3=26,\ V_3=15 \Rightarrow u=17, v=30$에서 변의 길이가 34, 32, 34이고 넓이가 480인 IGT를 얻는다.

$U_4=97,\ V_4=56 \Rightarrow u=\frac{193}{3}, v=112$에서

변의 길이가 $\frac{386}{3}, \frac{380}{3}, \frac{386}{3}$이고 넓이 $\frac{21280}{3}$인 RIT(유리수이등변삼각형)을 만든다.

$U_5=362,\ V_5=209 \Rightarrow u=241, v=418$이고 변의 길이가 482, 480, 482이고 넓이가 100320인 IGT를 얻는다.

위의 작업은 홀수 index 해 $U_3, U_5, U_7, \cdots, U_{2n+1}, \cdots$은 변의 길이와 넓이가 정수인 IGT를 얻게 하고, 반면 짝수 index 해 $U_2, U_4, U_6, \cdots, U_{2n}, \cdots$은 정수가 아닌 변의 길이가 유리수인 RIGT를 얻게 한다. Mathematica를 이용하여 IGT와 RIGT를 몇 개만 간단하게 구해 본다.

```
In[1] := Clear[n, f]
       f[n_] := Expand[ (2+√3)^n ]
```

In[3] := Table[f[n], {n, 1, 30}]

Out[3] = { $2+\sqrt{3}$, $7+4\sqrt{3}$, $26+15\sqrt{3}$, $97+56\sqrt{3}$, $362+209\sqrt{3}$, $1351+780\sqrt{3}$,

$5042+2911\sqrt{3}$, $18817+10864\sqrt{3}$, $70226+40545\sqrt{3}$, $262087+151316\sqrt{3}$,
$978122+564719\sqrt{3}$, $3650401+2107560\sqrt{3}$, $13623482+7865521\sqrt{3}$,
$50843527+29354524\sqrt{3}$, $189750626+109552575\sqrt{3}$, $708158977+408855776\sqrt{3}$,
$2642885282+1525870529\sqrt{3}$, $9863382151+5694626340\sqrt{3}$,
$36810643322+21252634831\sqrt{3}$, $137379191137+79315912984\sqrt{3}$,
$512706121226+296011017105\sqrt{3}$, $1913445293767+1104728155436\sqrt{3}$,
$7141075053842+4122901604639\sqrt{3}$, $26650854921601+15386878263120\sqrt{3}$,
$99462344632562+57424611447841\sqrt{3}$, $371198523608647+214311567528244\sqrt{3}$,
$1385331749802026+799821658665135\sqrt{3}$,
$5170128475599457+2984975067132296\sqrt{3}$,
$19295182152595802+11140078609864049\sqrt{3}$,
$72010600134783751+41575339372323900\sqrt{3}$ }

In[4] := Clear[x, u]

In[5] := x[u_] := $\frac{3u+1}{2}$

In[6] := {Solve[$\frac{3u+1}{2}$ ==2, u], Solve[$\frac{3u+1}{2}$ ==7, u], Solve[$\frac{3u+1}{2}$ ==26, u],

Solve[$\frac{3u+1}{2}$ ==97, u], Solve[$\frac{3u+1}{2}$ ==362, u], Solve[$\frac{3u+1}{2}$ ==1351, u],

Solve[$\frac{3u+1}{2}$ ==5042, u], Solve[$\frac{3u+1}{2}$ ==18817, u], Solve[$\frac{3u+1}{2}$ ==70226, u]

Solve[$\frac{3u+1}{2}$ ==262087, u], Solve[$\frac{3u+1}{2}$ ==978122, u]}

Out[6] = {{{u → 1}}, {{u → $\frac{13}{3}$ }}, {{u →17}}, {{u → $\frac{193}{3}$ }}, {{u → 241}},

{{u → $\frac{2701}{3}$ }}, {{u → 3361}}, {{u → $\frac{37633}{3}$ }}, {{u →46817}},

{{u → $\frac{524173}{3}$ }}, {{u →652081}}

In[7] := Clear[△, u, t, IGT, RIGT]

In[8] := △[u_] := $(u-1)\sqrt{(3u-1)(u+1)}$

In[9] := t[u_] := 2u-1
In[10] := IGT[u_] := {t[u]+1, t[u]-1, t[u]+1, △[u]}
In[11] := RIGT[u_] := {t[u]+1, t[u]-1, t[u]+1, △[u]}
In[12] := {IGT[17], IGT[241], IGT[3361], IGT[46817], IGT[652081]}
Out[12] = {{34, 32, 34, 480}, {482, 480, 482, 100320}, {6722, 6720, 6722, 19561920}, {93634, 93632, 93634, 3796309440}, {1304162, 1304160, 1304162, 736483931040}}

In[13] := {RIGT[$\frac{13}{3}$], RIGT[$\frac{193}{3}$], RIGT[$\frac{2701}{3}$], RIGT[$\frac{37633}{3}$], RIGT[$\frac{524173}{3}$]}

Out[13] = {{ $\frac{26}{3}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{26}{3}$, $\frac{80}{3}$ }, { $\frac{386}{3}$, $\frac{380}{3}$, $\frac{386}{3}$, $\frac{21280}{3}$ }, { $\frac{5402}{2}$, $\frac{5396}{3}$, $\frac{5402}{2}$, 1402960}, { $\frac{75266}{2}$, $\frac{75260}{3}$, $\frac{75266}{3}$, $\frac{817624640}{3}$ }, { $\frac{1048346}{3}$, $\frac{1048340}{3}$, $\frac{1048346}{3}$, $\frac{158630615440}{3}$ }}

다음에는 일반적인 AT를 논한다. IRAT (isoscele rational arithmetic triangle)도 같은 방법으로 결정될 수 있으므로 다음에서는 이들을 논하지 않기로 한다.

5) AT(arithmetic triangle)와 RAT

$t>0$이고 r은 유리수라 하자. 넓이 △가 유리수라면 삼각형 $(t, t+r, t+2r^2)$은 RAT(rational arithmetic triangle)이다.

이 유리수들이 정수이면 $(t, t+r, t+2r^2)$은 AT이다. 다음 두 정리의 증명은 각각 정리2, 정리3의 증명과 유사함을 알 수 있다.

(정리4) $(t, t+r, t+2r^2)$이 AT라 하자. t와 r은 같은 기우성(parity)을 갖는다. 즉, 모두 짝수이거나 홀수이다.

증명) $s=\frac{1}{2}(3t+r+2r^2)=\frac{1}{2}\{3t+r^2+r(r+1)\}$에서 정수가 되려면 t가 짝수일 때 r도 짝수, t가 홀수일 때 r도 홀수가 되어야 한다.

즉 모두 짝수이거나 홀수이다. □

(정리5) (a, b, c)는 알려진 HT라 하자. 주어진 삼각형과 닮은 RAT는 많아야 3개이다.

증명) (a, b, c)에 닮은 삼각형은 (ka, kb, kc)꼴이고 k는 양의 유리수이다.

$(ka, kb, kc)=(t, t+r, t+2r^2)$인 t와 r이 존재하면 이들은 유리수 등차수열이다.

즉 $t=ka$, $r=k(b-a)$, $2r^2=k(c-a)$이다.

따라서, $2k^2(b-a)^2=k(c-a)$이므로

$k=\frac{c-a}{2(b-a)^2}>0$이다.

k의 값을 구하는 식은 a, b, c의 순서를 바꾸면 6가지 방법으로 나타낼 수 있다.

그러나 많아야 3개가 양수임을 알 수 있다. □

정의와 (4)로부터 시작되는 RAT를 이제 결정하자.

$(a, b, c)=(t, t+r, t+2r^2)$을 RAT라 하자.

그러면(4)에서

$16\triangle^2=(3t+r+2r^2)(t+r+2r^2)(t-r+2r^2)(t+r-2r^2)$ 이다.

특별한 해를 얻기 위해 $t=2r^2+r$이라 놓으면,

$\triangle^2=4r^4(2r+1)^2(r)$

유리수 제곱을 만들기 위해 $r=u^2$이라 놓으면,

$(a, b, c, \triangle)$

$=(2u^4+u^2, 2u^4+2u^2, 4u^4+u^2, 2u^5(2u^2+1))\cdots(6)$

예를 들면, (6)의 식에서

$u=2 \Rightarrow (36, 40, 68, 576)$

$u=\frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{32})$

RAT를 Mathematica를 이용하여 구해 보자.

In[1] := Clear[a, b, c, u, △, RAT]

In[3] := {a[u_], b[u_], c[u_], △[u_]} = $\{2u^4+u^2,\ 2u^4+2u^2,\ 4u^4+u^2,\ 2u^5(2u^2+u)\}$

Out[3] = $\{u^2+2u^4,\ 2u^2+2u^4,\ u^2+4u^4,\ 2u^5(u+2u^2)\}$

In[4] := RAT=Table[{a[u], b[u], c[u], △[u]}, $\{u, \frac{1}{2}, 10, \frac{1}{2}\}$]

Out[4] = $\{\{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{\frac{99}{8}, \frac{117}{8}, \frac{45}{2}, \frac{729}{8}\}$

$\{36, 40, 68, 640\}, \{\frac{675}{8}, \frac{725}{8}, \frac{325}{2}, \frac{46875}{16}\}, \{171, 180, 333, 10206\},$

$\{\frac{2499}{8}, \frac{2597}{8}, \frac{1225}{2}, \frac{117649}{4}\}, \{528, 544, 1040, 73728\},$

$\{\frac{6723}{8}, \frac{6885}{8}, \frac{3321}{2}, \frac{2657205}{16}\}, \{1275, 1300, 2525, 343750\},$

$\{\frac{14883}{8}, \frac{15125}{8}, \frac{7381}{2}, \frac{5314683}{8}\}, \{2628, 2664, 5220, 1213056\},$

$\{\frac{28899}{8}, \frac{29237}{8}, \frac{14365}{2}, \frac{33787663}{16}\}, \{4851, 4900, 9653, 3529470\},$

$\{\frac{51075}{8}, \frac{51525}{8}, \frac{25425}{2}, \frac{11390625}{2}\}, \{8256, 8320, 16448, 8912896\},$

$\{\frac{84099}{8}, \frac{84677}{8}, \frac{41905}{2}, \frac{217238121}{16}\}, \{13203, 13284, 26325, 20194758\},$

$\{\frac{131043}{8}, \frac{131765}{8}, \frac{65341}{2}, \frac{235229405}{8}\}, \{20100, 20200, 40100, 42000000\}\}$

III. 결 론

본고에서는 수열과 관련된 여러 가지 삼각형의 관계와 특성을 알아보고 구체적으로 Mathematica를 이용하여 계산하기 힘든 삼각형들을 구해 보았다. 수학에 흥미를 갖고 새로운 세계를 찾는데 대학수학에서 어느 정도의 능력이 있어야 되는가의 기준은 경험에 의하면 고등학교 과정의 수학을 완벽히 소화해 내고 미적분학에서 상당한 수준에 도달해야 충분함을 알 수 있다. 더 넓은 수학의 세계를 맛보는 기회를 갖도록 학생들을 격려하고 이끄는 것은 그들을 지도하는 교수의 몫이므로 수학에 종사하는 교수들은 보다 나은 자료의 개발에 노력해야 할 것이다. 어린 아이들이 다른 놀이를 하다가도 TV의 광고에 재빨리 고개를 돌리는 모습을 보면 새롭고 재미있는 자료의 개발은 분명히 학생들을 수학의 매력에 빠지도록 도울 것으로 보인다.

본고에서 제시한 정리3은 GRT(Sastry, 2002)의 또 다른 특징을 주는데 이용될 수 있다. 여기서는 primitive GT 또는 AT를 만들지는 않았으므로 그들이 존재하는지는 아직 모른다. 따라서 GRT와 RAT의 확장된 연구가

계속되면 수학에 흥미를 더하는데 도움을 줄 것이다.

참 고 문 헌

김병무 (1997). 흥미 및 동기유발을 위한 대학수학 수업 자료와 평가, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 36(2), pp.127-133, 서울:한국수학교육학회.

김병무 (2002). 대학수학에서 비유크리드 기하의 지도, 한국수학교육학회지 시리즈 E. <수학교육 논문집> 13, pp.80-91, 서울: 한국수학교육학회.

김병무 (2002). 대학수학에서 급수의 합에 대한 다양한 접근, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 41(1), pp91-100, 서울: 한국수학교육학회.

김병무 (1999), 미분적분을 위한 Mathematica 연습, 서울: 교우사.

Edwin S. Braithwaite & James A. Sellers (1999). *Geometric Right Triangle,* Mathematics and Computer Education **33(2)**, Spr. pp.154-160.

K. R. S. Sastry (2002), *Geometric and Arithmetric Triangle,* Mathematics and Computer Education **36(1)**, Winter, pp.259-264.

L. E. Dickson (1971), *History of the Theory of Number VolumeII* Chelsea Publishing(reprint).

Martha L. Abell & James P. Braselton (1997). *Mathematica by Example,* Second Edition, Academic Press.

R. Beauregard & E. Suryanarayan (1997), Arithmetic Triangle, *Mathematics Magazine* **70**, pp.105-115.

Stephen Wolfram (1996). *Mathematica,* Third Edition Mathematica Version 3, Cambridge University Press.

Several Triangles with the Sides Connecting Sequences

Kim, Byung-Moo

Dept. of General Arts, Chungju National University, Chungju-Shi,Chungbuk 380-702, Korea ;
E-mail : bmkim6@hotmail.com

In this paper, we introduce the concepts of geometric and arithmetic triangles. Geometric and arithmetic triangles are special types of rational Heron triangles - triangles with rational sides and area. In addition, the theory illustrated in this paper gives certain theorems on the determination of non-right angled geometric and arithmetic triangles. In the meantime, with the help of Mathematica, we compute the sides and area of several triangles(GRT, IGT, RIGT, RAT). Since the material presented in this paper is within the reach of undergraduates, it can attract attention of mathematics students and may also be of interest to the mathematicians. In this content, we believe this paper can help undergraduates to have interests in the new world of mathematics.