회전체의 Isophote 구성요소의 효율적인 계산

(Efficient Computation for Connected Components of an Isophote in a Surface of Revolution)

김 구 진 † 이 인 권 ††
(Ku-Jin Kim) (In-Kwon Lee)

요 약 본 논문에서는 회전체(surface of revolution)의 isophote를 계산하는 효율적이고 안정성 있는 알고리즘을 제시한다. 회전체는 곡면의 특성 상 곡면이 원의 집합으로 이루어지며 하나의 원 위에 있는 점들에 대한 법선 벡터의 집합은 하나의 원뿔(cone)을 이룬다. 원뿔을 이루는 법선 벡터의 특성과 회전체의 대칭성을 이용하여 곡선과 직선의 교점 계산만으로 isophote에 속한 모든 구성요소(connected component)를 발견하는 방법을 제시한다. 또한 회전체 곡면 상의 isophote를 매개변수 곡선으로 표현함으로써 곡선을 쉽게 추적하는 방법을 제시한다.

키워드 : Isophote, 회전체, surface interrogation

Abstract This paper presents an efficient and robust algorithm to compute the isophote of a surface of revolution. A surface of revolution can be decomposed to a set of cross-sectional circles. The surface normals along each cross-sectional circle form a cone. Using the characteristics of the normal vectors and the symmetric property of the surface of revolution, we propose a method to find the connected components of an isophote, which requires intersecting a planar curve(and its reflection) with two rays. Moreover, we propose a closed-form representation of an isophote as a parametric curve.

Key words : Isophote, surface of revolution, surface interrogation

1. 서 론

곡면에 대한 isophote 란 무한히 먼 거리의 광원에서 곡면에 평행하게 빛을 보낼 때, 동일한 명도 (intensity)를 갖게 되는 곡면 상의 점들이 이루는 곡선이다. 주어진 곡면이 C^r-연속성 (continuity)을 가질 때, 해당 곡면의 isophote는 C^{r-1}-연속성을 갖는다. 이러한 성질에 의해 isophote는 곡면의 1차, 2차 미분과 Gaussian curvature의 비정규성을 가시화하는 수단으로 사용될 수 있다. 1984년 Poeschl[1] 이 isophote를 이용하여 곡면의 품질을 평가하는 방법을 제안하였고, 그 후 isophote 는 곡면의 특성을 분석하는 여러 방법 중의 한 가지로서 빈번하게 사용되어 왔다 [2, 3, 4].

Isophote를 다시 정의하면 방향벡터 $\boldsymbol{d}$와 각도 β가 주어질 때, 곡면에 속한 점들 중 그 법선 벡터와 $\boldsymbol{d}$사이의 각도가 β인 점들의 집합이라고 할 수 있다. 만약 β가 $\pi/2$로 주어진다면 isophote는 곡면의 윤곽곡선이 된다. 매개변수 곡면(parametric surface)에 대한 isophote 의 수식을 계산하는 이론적인 방법은 널리 알려져 있다. 매개변수 곡면 $S(t,\theta)$에 대해 isophote를 구한다고 하자. 이 곡면의 법선벡터가 $\boldsymbol{N}(t,\theta)$일 때, isophote는 다음의 식으로 표현된다.

$$\frac{\langle \boldsymbol{N}(t,\theta), \boldsymbol{d} \rangle}{\| \boldsymbol{N}(t,\theta) \| \cdot \| \boldsymbol{d} \|} = \cos\beta.$$

보통 isophote는 위와 같은 음함수(implicit function) 곡선의 형태로 유도된다. 음함수 곡선은 곡선의 차수에 따라 한 개 이상의 connected component 들로 구성될 수 있다. 일반적으로 음함수 곡선에서는 곡선을 이루는 모든 connected component를 발견하기가 어렵다. 또한 connected component들의 위상적인 구조를 미리 알지

· 본 연구는 두뇌한국 21 사업과 정보통신부 지정 ITRC 사업에서 지원되었습니다.
† 비 회 원 : 아주대학교 정보통신전문대학원 교수
kujinkim@ajou.ac.kr
†† 정 회 원 : 아주대학교 미디어학부 교수
iklee@ajou.ac.kr
논문접수 : 2001년 10월 24일
심사완료 : 2002년 5월 8일

못 하는 경우, 각 component에 속하는 점들을 추적하는 것도 어려운 일이다.

회전체(surface of revolution)는 CAD/CAM 또는 기하 및 곡면 모델링에서 자주 사용되는 중요한 입체로서 주어진 profile 곡선이 회전축을 중심으로 회전하여 얻어지는 곡면이다. 회전체는 cross-section 원들의 집합으로도 볼 수 있는데, 하나의 cross-section 원에 속하는 각 점에서의 법선 벡터의 집합은 회전축을 축으로 하는 원뿔(cone)을 구성한다. 본 논문에서는 이러한 법선 벡터의 특성과 회전체가 가진 대칭성을 이용하여 isophote를 이루는 모든 connected component 를 발견하는 효율적이고 안정성 있는 방법을 제시한다. 또한 isophote를 매개변수 곡선(parametric curve)으로 표현하는 방법을 제시한다. 매개변수 곡선 표현은 음함수 곡선 표현에 비해 곡선을 이루는 점들을 추적하기가 매우 용이하다는 특성을 갖는다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제2절에서는 회전체의 isophote를 계산하는 일반적인 방법을 소개한다. 제 3절에서는 회전체의 법선 벡터의 성질과 대칭성을 이용하여 isophote를 매개변수 곡선으로 표현하는 방법을 소개하고, isophote에 속한 모든 connected component를 발견하는 효율적이고 안정성 있는 방법을 제시한다. 또한, 제시한 알고리즘을 이용하여 회전체의 isophote를 구한 예를 보인다. 제4절에서 결론을 제시한다.

2. 회전체의 isophote를 계산하는 일반적인 방법

이 절에서는 회전체의 isophote를 계산하는 일반적인 방법을 설명한다. 주어진 방향 벡터가 $\boldsymbol{d}=(d_x, d_y, d_z)$, $\|\boldsymbol{d}\|=1$,이라 하자. 이때 일반성을 잃지 않고, 회전체의 profile 곡선 $C(t)$는 xz-평면 위에 포함되며 회전축은 z-축이라고 가정할 수 있다. 곡선 $C(t)=(x(t), 0, z(t))$ 라고 할 때, 회전체의 곡면 $S(t,\theta)$ 는 다음과 같이 구성된다.

$$S(t,\theta)=(x(t)\cos\theta,\ x(t)\sin\theta,\ z(t)).$$

곡면 $S(t,\theta)$의 법선벡터 $\boldsymbol{N}(t,\theta)$ 는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{N}(t,\theta)=\frac{\partial S(t,\theta)}{\partial t}\times\frac{\partial S(t,\theta)}{\partial\theta}$$

주어진 방향벡터 $\boldsymbol{d}=(d_x, d_y, d_z)$에 대한 $S(t,\theta)$의 isophote는 다음의 음함수 식과 같다.

$$\frac{\langle \boldsymbol{N}(t,\theta), \boldsymbol{d}\rangle}{\|\boldsymbol{N}(t,\theta)\|}-\cos\beta=0.$$

이 식을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(d_x z'(t)\cos\theta + d_y z'(t)\sin\theta - d_z x'(t))^2 \\ -\cos^2\beta(x'(t)^2+z'(t)^2)=0\end{aligned} \tag{1}$$

식 (1)의 좌변을 $H(t,\theta)$라 하자. Profile 곡선 $\boldsymbol{C}(t)$가 차수 m인 방정식으로 주어질 경우, 음함수 $H(t,\theta)=0$은 t에 대한 $2(m-1)$차이다. 또한, 식 (1)에서 $\cos\theta$와 $\sin\theta$를 각각 $\frac{1-u^2}{1+u^2}$와 $\frac{2u}{1+u^2}$으로 대치함으로써 u에 대한 4차의 식으로 표현할 수 있다. 그러므로, 고정된 t값, $t=t_*$,에 대해 $H(t_*,\theta)=0$ 을 만족하는 θ값들은 4차식의 근으로 구해지며, 이는 산술적인 계산이 가능하다.

함수 $H(t,\theta)=0$에서 고정된 t값에 따라 근에 해당하는 θ값은 산술적으로 구할 수 있지만, θ에 대한 해가 존재하거나 존재하지 않는 t값의 구간을 발견할 수 있는 산술적인 방법은 존재하지 않는다. 그러므로, isophote의 connected component가 존재하는 t값의 범위를 계산하기 위해서는 t값을 변화시키면서 근에 해당하는 θ의 존재 유무를 판단하는 방법 밖에는 없다. 이러한 경우, $H(t,\theta)=0$을 만족하는 모든 connected component를 발견하기가 어렵고, t값의 변화량보다 작은 범위 내에 있는 connected component의 경우 발견되지 않을 수도 있다. 또한 connected component가 존재하지 않는 구간 내에서도 θ에 대한 해의 존재 여부를 검사해야만 하므로 매우 비효율적이고 불안정한 방법이라고 할 수 있다.

회전체가 가진 대칭성과 법선벡터의 성질을 이용하여 이러한 문제점을 해결하는 방법을 다음 절에서 소개한다.

3. 회전체의 대칭성과 법선 벡터의 특성을 이용한 isophote 의 효율적인 계산

주어진 회전체와 방향벡터 $\boldsymbol{d}$에 회전이동과 평행이동을 적용함으로써 회전체의 축은 z-축, profile 곡선은 $\boldsymbol{C}(t)=(x(t),0,z(t))$, $t_{\min}\le t\le t_{\max}$,그리고, $\boldsymbol{d}=(d_x,0,d_z)$, $d_x\ge 0$, 이 되도록 변환할 수 있다. 이 때 $\|\boldsymbol{d}\|=1$ 이 성립한다고 하자.

곡선 $\boldsymbol{C}(t)$의 법선 벡터 $\boldsymbol{N}(t)$는 식 $\langle \boldsymbol{C}'(t), \boldsymbol{N}(t)\rangle=0$를 만족하므로 다음과 같이 구해진다.

$$\boldsymbol{N}(t)=(z'(t), 0, -x'(t)).$$

곡선 $\boldsymbol{C}(t)$ 상의 한 점 $\boldsymbol{C}(t_*)$에 대한 법선 벡터가 $\boldsymbol{N}(t_*)$라 할 때, 회전체에서 점 $\boldsymbol{C}(t_*)$를 지나는 cross-section 원, 즉 $S(t_*,\theta)$, $0\le\theta<2\pi$, 상의 점들의 법선 벡터는 $\boldsymbol{N}(t_*)$가 z 축을 중심으로 회전한 것과 같다. 원 $S(t_*,\theta)$ 상의 점은 다음과 같은 법선 벡터를 갖는다.

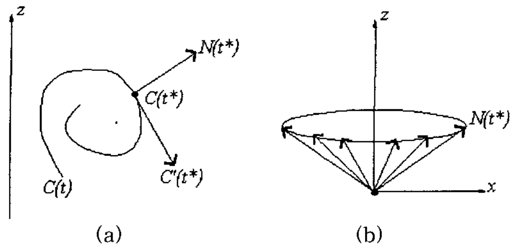


그림 1 점 $C(t_*)$에서의 법선벡터와 $C(t_*)$를 포함하는 cross-section 원 위의 점들의 법선벡터

$$N(t_*, \theta) = (z'(t_*)\cos\theta,\ z'(t_*)\sin\theta,\ -x'(t_*)).$$

그림 1(a)는 profile 곡선 $C(t)$ 상의 한 점에서의 법선벡터를 보인다. 그림 1(b)는 $C(t_*)$를 지나는 cross-section 원 $S(t_*, \theta)$ 상의 점들에서의 법선벡터가 z-축을 중심으로 $N(t_*)$를 회전하여 구해진 것과 같음을 보인다.

회전체 $S(t, \theta)$의 isophote는 다음 조건을 만족하는 곡면 상의 점들로 구성된다.

$$\frac{\langle N(t, \theta), d \rangle}{\| N(t, \theta) \|} = \cos\beta$$

이 식을 전개하면 다음과 같이 $\cos\theta$에 대해 정리할 수 있다.

$$\cos\theta = \frac{\cos\beta\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} + d_z x'(t)}{d_x z'(t)}.$$

위의 결과에 따라 고정된 t값, $t = t_*$에 대해 cross-section 원 $S(t_*, \theta)$ 상에서 isophote 에 속하는 점 $p(t_*)$는 $c(t_*) = \frac{\cos\beta\sqrt{x'(t_*)^2 + z'(t_*)^2} + d_z x'(t_*)}{d_x z'(t_*)}$ 일 때 다음과 같은 매개변수 곡선으로 표현된다.

$$p(t_*) = (c(t_*)x(t_*), \pm\sqrt{1 - c(t_*)^2}\,x(t_*), z(t_*)) \qquad (2)$$

식 (2)에서 주어진 매개변수 표현에 의해 isophote에 속하는 각 점들을 효율적이고 안정적으로 계산할 수 있다.

이제 isophote에 속하는 각 connected component를 발견하는 방법을 고려해 보자. 간단하게는 식 (2)를 이용하여 θ가 실근을 갖게 되는 t값의 범위(즉, connected component가 존재하는 구간)를 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$-1 \le \frac{\cos\beta\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} + d_z x'(t)}{d_x z'(t)} \le 1 \qquad (3)$$

곡선 $C(t)$가 차수 m인 방정식이라 할 때, 식 (3)의 차수는 $2(m-1)$이다. 만약 회전체의 특성을 이용한다면, 식 (3)보다 더욱 효율적인 방법으로 connected component가 존재하는 t 값의 범위를 계산할 수 있다. 이 방법은 회전체가 갖는 법선 벡터의 성질을 이용한다.

방향벡터 d와 일정 각도 β를 이루는 임의의 벡터의 집합은 원뿔을 이루는데, 이 원뿔의 정점은 원점이고 축은 d와 평행하며 half-angle은 β이다 (그림 2). 방향벡터 d와 각도 β를 이루는 벡터의 집합을 원뿔 Γ_d로 나타내자. 원뿔 Γ_d를 xz-평면과 교차시키면 $\delta = \tan^{-1}(\frac{d_z}{d_x}) \pm \beta$ 일 때 아래와 같은 두 개의 ray 가 구해진다.

$$x\sin\delta - z\cos\delta = 0 \qquad (4)$$

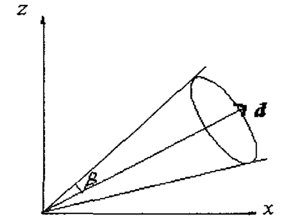


그림 2 벡터 d와 각도 β를 이루는 벡터들의 집합

회전체의 profile 곡선 $C(t)$의 법선벡터를 $N(t) = (z'(t),\ 0,\ -x'(t))$로 나타내고, $N(t)$ 의 z-축에 대한 대칭으로 얻어지는 벡터를 $N_-(t) = (-z'(t), 0, -x'(t))$ 라고 하자. $N(t)$와 $N_-(t)$는 t를 매개변수로 하는 곡선이라고 할 수 있다. 법선벡터 $N(t_*)$를 z-축을 중심으로 회전하여 얻어지는 원뿔을 $\Gamma(t_*)$라 하면, $\Gamma(t_*)$는 z-축을 중심으로 벡터 $N_-(t_*)$를 회전하여 얻는 원뿔과도 같다.

만약 $N(t) \cup N_-(t)$와 두 개의 ray $x\sin\delta - z\cos\delta = 0$가 $t = t_*$에서 교차한다면 두 원뿔 Γ_d와 $\Gamma(t_*)$는 서로 접하며, 그 역도 성립한다(그림 3 참조). 이 때, t_*는 isophote에 속하는 하나의 connected component 가 시작되거나 끝나는 경계값이 된다. 임의의 고정된 t값, $t = t_0$,에 대해 $N(t_0) \cup N_-(t_0)$에 속하는 한 벡터가 식

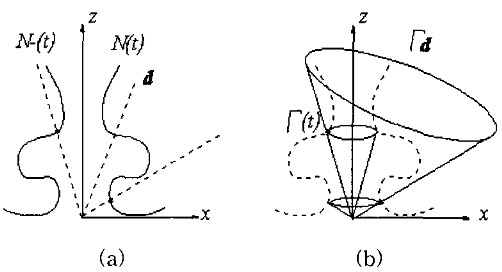


그림 3 두 원뿔 Γ_d 와 $\Gamma(t_*)$

(4)가 나타내는 두 개의 ray 사이의 영역에 존재하면, 즉 원뿔 Γ_d와 $\Gamma(t_0)$가 서로 두 개의 선분에서 교차하면, 이 원뿔들은 두 개의 공통된 벡터를 가지며, 이는 $S(t_0, \theta)$ 상에서 isophote에 속하는 두 개의 점이 존재한다는 것을 의미한다. 반대로 $\boldsymbol{N}(t_0) \cup \boldsymbol{N}_-(t_0)$에 속하는 어느 벡터도 두 ray 사이의 영역에 존재하지 않는다면 $\Gamma(t_0)$과 Γ_d는 서로 교차하지 않으며, 이는 $S(t_0, \theta)$ 상에서 isophote에 속하는 점이 존재하지 않는다는 것을 의미한다.

두 개의 ray $x \sin\delta - z \cos\delta = 0$와 곡선의 집합 $\boldsymbol{N}(t) \cup \boldsymbol{N}_-(t)$의 교점은 다음의 식으로 유도된다.

$$\pm z'(t)\sin\delta + x'(t)\cos\delta = 0. \tag{5}$$

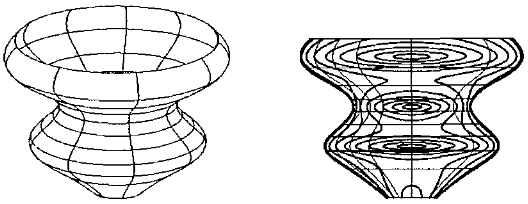
식 (5)의 근에 해당하는 t값들은 isophote에서 connected component 들이 존재하는 구간을 나타낸다. Profile 곡선 $C(t)$가 차수 m 인 방정식이라 할 때, 식 (5)는 $m-1$ 의 차수를 갖는다. 그러므로, 차수 $2(m-1)$인 식 (3)에 비해 효율적이고 안정적으로 connected component의 존재 구간을 구할 수 있다.

식 (2)와 식 (5)를 이용하여 회전체에 대한 isophote를 구하는 알고리즘은 다음과 같다.

Algorithm: Isophote_SurfaceOfRevolution
Input: $\boldsymbol{C}(t) = (x(t), 0, z(t))$ /* profile curve of a surface of revolution */
$\boldsymbol{d} = (d_x, 0, d_z)$ /* given direction vector */
β /* given fixed angle */
begin
/* degenerate case */
if $d_x = 0$ then begin
for each $t_* \in \left\{t \mid x'(t)\sqrt{d_z^2 - \cos^2\beta} \pm \cos\beta z'(t) = 0\right\}$ do
if $d_z x'(t_*) - \cos\beta\sqrt{z'(t_*)^2 + x'(t_*)^2} = 0$ then
draw a circle $S(t_*, \theta)$, where $0 \le \theta < 2\pi$;
exit;
end
for each $t_* \in \{t \mid z'(t) = 0\}$ do
if $d_z x'(t_*)/\|x'(t_*)\| = \cos\beta$ then draw a circle $S(t_*, \theta)$, where $0 \le \theta < 2\pi$;

/* generic case */
$\boldsymbol{N}(t) = (z'(t), 0, -x'(t))$;
T = $\{t \mid \sin\delta z'(t) \pm \cos\delta x'(t) = 0\} \cup \{t_{\min}, t_{\max}\}$, where $\delta = \tan^{-1}(\frac{d_z}{d_x}) \pm \beta$;
sort t values in T : T = $\{t_i \mid 0 \le i < n\}$;
for i = 1 to $n-1$ do begin
$t_* = (t_{i-1} + t_i)/2$;
if $z'(t_*) \ne 0$ and $1 \le \dfrac{\cos\beta\sqrt{x'(t_*)^2 + z'(t_*)^2} + d_z x'(t_*)}{d_x z'(t_*)} \le 1$ then begin
for j = 0 to m do begin
$t_* = t_{i-1} + \dfrac{j(t_i - t_{i-1})}{m}$;
$c = \dfrac{\cos\beta\sqrt{x'(t_*)^2 + z'(t_*)^2} + d_z x'(t_*)}{d_x z'(t_*)}$;
if $j = 0$ then begin
$p_1 = (cx(t_*), \sqrt{1-c^2}x(t_*), z(t_*))$;
$p_2 = (cx(t_*), -\sqrt{1-c^2}x(t_*), z(t_*))$;
draw two points p_1 and p_2;
end
else begin
draw a line from p_1 to $(cx(t_*), \sqrt{1-c^2}x(t_*), z(t_*))$;
draw a line from p_2 to $(cx(t_*), -\sqrt{1-c^2}x(t_*), z(t_*))$;
$p_1 = (cx(t_*), \sqrt{1-c^2}x(t_*), z(t_*))$;
$p_2 = (cx(t_*), -\sqrt{1-c^2}x(t_*), z(t_*))$;
end
end
end
end
end

그림 4에서는 주어진 회전체에 대하여 Algorithm: Isophote_SurfaceOfRevolution를 적용하여 isophote를 구한 예를 보인다. 그림 4(a)는 주어진 회전체이며, 그림 4(b)는 이 회전체에 대해 각도 β를 90도부터 10도씩 감소시키면서 구해진 모든 isophote 들을 제시한다. 그림에서 굵은 곡선이 isophote이며, 가장 바깥쪽의 isophote는 β가 90도인 경우이고, β값이 감소할수록 안쪽으로 isophote가 구해진다. 각도 β가 90도와 80도인 경우 구해진 isophote들이 거의 겹쳐 보이는 것을 알 수 있다. 각도 β가 50도일 때 isophote가 두 개의 연결된 구성요소로 나누어지며, 각도 β가 40도이하인 경우 isophote는 각각 3개의 구성요소를 가진다.



(a) (b)

그림 4 회전체와 isophote

4. 결 론

본 논문에서는 회전체에 대한 isophote를 계산하는 효율적이고 안정성 있는 알고리즘을 소개하였다. 회전체는 곡면이 원의 집합으로 구성되어 있으며, 또한 하나의 원 위에 속하는 모든 점에서 구한 법선 벡터가 원뿔을 이룬다는 특성을 갖는다. 회전체의 대칭성과 법선 벡터의 집합이 원뿔을 이루는 특성을 이용하여 profile 곡선과 직선의 교점 계산만으로 회전체의 isophote 에 속한 모든 connected component를 구하는 효율적인 방법을 제시하였다. 또한 connected component에 속하는 회전체 곡면 상의 점들을 매개변수 곡선으로 유도하였다. 이 방법은 현존하는 일반적인 방법에 비해 매우 효율적이고 안정성 있는 결과를 제공한다.

참 고 문 헌

[1] T. Poeschl, "Detecting surface irregularities using isophotes," *Computer Aided Geometric Design* **1** (1984) pp. 163-168.

[2] N. Guid, C. Oblonsek, B. Zalik, "Surface interrogation methods," *Computers & Graphics* **19**(4) (1995) pp. 557-574.

[3] H. Hagen, S. Hahmann, T. Schreiber, Y. Nakajima, B. Wordenweber, P. Hollemann-Grundstedt, "Surface interrogation algorithms," *IEEE Computer Graphics & Applications* **12**(5) (1992) pp. 53-60.

[4] M. Hosaka, *Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM*, Springer-Verlag, 1992.

김 구 진

1990년 이화여자대학교 전자계산학과(이학사). 1992년 한국과학기술원 전자계산학과(공학석사). 1998년 포항공과대학교 컴퓨터공학과(공학박사). 1998년 ~ 2000년 미국 Purdue University, Dept. of Computer Sciences 박사후 연수과정. 2000년 ~ 현재 아주대학교 정보통신전문대학원 조교수대우. 관심분야는 곡면 및 기하 모델링, CAD, 컴퓨터 그래픽스

이 인 권

1989년 연세대학교 전산과학과 학사. 1992년 포항공대 컴퓨터공학과 석사. 1997년 포항공대 컴퓨터공학과 박사. 1997년 ~ 1999년 비엔나 공대 연구원. 1999년 ~ 2001년 포항공대 정보통신연구소 선임연구원. 2001년 ~ 현재 아주대학교 미디어학부 조교수, 게임애니메이션 센터장. 관심분야는 컴퓨터 그래픽스, 컴퓨터 게임, 컴퓨터 음악 등.