

불규칙 접촉하중에서의 피로한도에 관한 연구

옥영구*, 안득만**, 조용주**, 이현우**

Study on the Fatigue Limit at Random Contact Loading

Young Gu Ok*, Deuk Man An**, Yong Ju Cho**, Hyun Woo Lee**

ABSTRACT

This paper analyzes the subsurface stress at the spherical contact using Hamilton equation, and with that data, calculates the fatigue limit under the variations of friction coefficient using fatigue theory. After rough surface being made, this paper figures out the random load generated by contacting to the rough surface, analyzes the stress of its subsurface, and calculates the fatigue limit of the rough surface using fatigue theory. The three parts of the fatigue theory are applied, which are critical plane theory, stress invariant theory and mesoscopic theory.

Key Words : spherical contact(구 접촉), rough surface(거친 표면), random load(불규칙 하중), critical plane(임계 평면), stress invariant(응력 불변량), mesoscopic theory(메조 이론), fatigue limit(피로 한도)

1. 서론

대부분의 기계요소들은 윤활 상태에서 접촉하고 접촉표면들은 전단저항을 감소시키기 위해 윤활제에 의해 완전히 분리되어 있거나 부분적으로 분리되어 있다. 그러나 기계요소의 작동조건이 가혹해지면서 유막이 파손되어 윤활 상태는 경계윤활이나 혼합윤활영역에 접어들게 되고 이때 거친 표면의 돌기(Asperity)들이 서로 직접 접촉하게 되면서 하중사이클동안의 반복적인 국부 응력집중에 기인하는 피로마멸이 생겨 표면에 심각한 손상을 야기하게 된다. 이러한 접촉피로마멸의 중요성은 접촉현상의 존재가 접촉을 고려하지 않았을 때의 설계수명을 심각하게 단축시키며 따라서 안전한 설계가 되지 못하는데 있다. 본 연구에서는 구 접촉 상태에서 피로수명 판정식을 적용하여 피로한도(fatigue

limit)에 해당하는 하중과 마찰계수를 예측하고 이것을 바탕으로 거친 표면의 접촉에서도 피로한도에 해당하는 조건을 구하고자 한다. 또한 표면간의 접촉을 실제 표면에 가까운 Gaussian 표면들 간의 접촉으로 모델링하여 접촉시뮬레이션을 통해 접촉물체의 피로균열 시작거동을 연구하고자 한다.

2. 피로 이론

피로하중을 받는 재료가 무한수명이 되기 위해서는 재료 내부에 미세 균열이 발생하지 않거나 균열이 발생하더라도 그 균열이 진전하지 않을 조건을 찾아야 한다. 이러한 무한 수명 조건은 작용하중에 의한 재료내의 응력이 피로한도 근방에서 변화할 때 가능하게 된다. 구 접촉 하에서 표면 아래 응력의 시간에 따른 변화는 다축 비비례하중

☞ 2002년 1월 21일 접수

* 부산대학교 대학원 기계설계공학과

** 부산대학교 기계공학부

(multi-axial nonproportional loading)이 작용하는 경우로 생각할 수 있으며 이와 같은 상태에 적용할 수 있는 피로 판정식은 지금 까지 많은 이론들이 나와 있다^{(1),(2)}. 본 논문에서는 다음 세 가지 부류의 피로 이론을 사용하고자 한다. 그리고 피로 판정식에 사용되는 응력량들은 참고문헌 [3]에 있는 정의를 따른다.

2.1 임계 평면 이론

1973년 Brown과 Miller는 피로균열의 성장에 관한 현상의 물리적인 해석을 바탕으로 하여 다축 피로 이론은 제시하였다⁽⁶⁾. 임계평면 이론은 균열이 특정한 면에서 시작되어 진전한다고 가정하고 균열이 생성되기 쉬운 평면의 조건을 제시한 다음 그 평면에 작용하는 응력량을 조사하여 그것을 조합하여 표현된 식을 피로조건에 적용하면 수명을 예측할 수 있다⁽⁷⁾.

임계평면이 정의되면 한 점을 통과하는 여러 면을 분석하여 임계평면을 결정하게 된다. 본 연구에서는 Simburger⁽⁴⁾가 사용한 지역 좌표계를 사용하였고, B. Weber et al⁽⁵⁾이 제시한 단위 반지름의 반구에 균일한 면적을 분포시키는 방법을 사용하여 임계 평면을 구하였다.

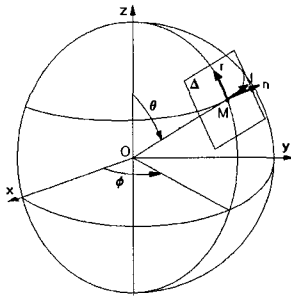


Fig. 1 Simburger's mathematical concept for reviewing all the material planes

또한 임계평면 이론 중에서 Matake⁽⁸⁾가 제시한 식을 사용하였다. Matake 조건은 임계평면에 작용하는 C_a 와 N_{max} 의 선형 조합으로 구성되어있다. 여기서 C_a 와 N_{max} 는 임계평면에서 전단응력의 진폭과 수직응력의 최대값을 나타낸다.

Matake 조건에서는 전단 응력의 진폭이 최대가 되는 면을 임계평면으로 정의한다.

$$(\phi^*, \theta^*): \text{Max}[C_a(\phi, \theta)] \quad (1)$$

여기서 (ϕ^*, θ^*) 는 임계 평면에 해당하는 (ϕ, θ) 값을 나타내며 θ 와 ϕ 는 Fig. 1과 같이 정의된다. $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ 은 지역 좌표계를 나타낸다. 피로 조건은 다음과 같다.

$$C_a(\phi^*, \theta^*) + xN_{max}(\phi^*, \theta^*) \leq \lambda \quad (2)$$

여기서 재료상수 x 와 λ 의 값들은 식 (2)를 순수 완전 반복 비틀림을 주는 경우와 완전 반복 굽힘을 주는 경우에 적용함으로써 구해진다. 그러므로 재료 상수는 다음과 같이 된다.

$$x = \left(\frac{2t_{-1}}{f_{-1}} \right) - 1, \quad \lambda = t_{-1} \quad (3)$$

여기서 f_{-1} 은 반복 굽힘이 작용하는 경우의 피로한도이고 t_{-1} 은 반복 비틀림이 작용하는 경우의 피로한도이다. 식 (2)의 부등식을 만족하게 되면 균열이 발생하지 않게 되고, 부등식을 만족하지 않게 되면 균열이 발생하게 된다.

2.2 응력 불변량 이론

응력 불변량을 이용한 피로 조건은 정수압 응력과 편차응력의 이차 불변량을 사용하여 표현된다. 이 조건은 임계평면 이론과는 달리 균열이 시작되는 방향은 알 수 없다. 다만 주어진 사이클 동안 균열의 발생 여부만 결정할 수 있다. 여기서는 Crossland⁽⁹⁾ 식을 사용하였으며, 피로 조건식은 다음과 같다.

$$\sqrt{J_{2,a}} + x\Sigma_{H,max} \leq \lambda \quad (4)$$

여기서 $J_{2,a}$ 는 이차 응력불변량의 진폭을 나타내며 $\Sigma_{H,max}$ 는 정수압 응력의 최대값을 나타낸다.

$$x = \frac{3t_{-1}}{f_{-1}} - \sqrt{3}, \quad \lambda = t_{-1} \quad (5)$$

x 와 λ 는 재료 상수이며 순수 전단 실험과 반복 굽힘 실험으로 구할 수 있다.

2.3 Meso- 접근법에 의한 조건

금속의 피로 거동은 여러 가지 영역(scale)으로 분석될 수 있다. 공학에서 사용되는 영역은 재료를 연속체로 볼 수 있는 범위 즉 macro-영역을 주로 사용한다. 또한 금속의 피로 거동은 micro- 영역 즉 전위(dislocation) 영역에서 분석될 수 있다. 이제는 micro-와 macro- 영역의 임계범위에서 재료의 피로 거동을 분석해보자. 이러한 영역을 meso- 영역 (mesoscopic scale)이라고 하며, 금속의 결정(grain) 크기의 영역에 해당된다(Fig. 2). meso- 접근법은 70년대 초반에 Dang Van^{(10),(11)}에 의해 소개되었고, 80년대 후반에 Papadopoulos^{(10),(12)}에 의해 더욱 발전되었다. 여기서는 Dong Van 조건을 사용했다. Dong Van이 제시한 조건은 macro-영역의 응력 사이클(engineering stress)에 근거하여 계산되어진 각각의 시간에 해당하는 meso- 응력 요소들을 사용하여 구성되어 있다.

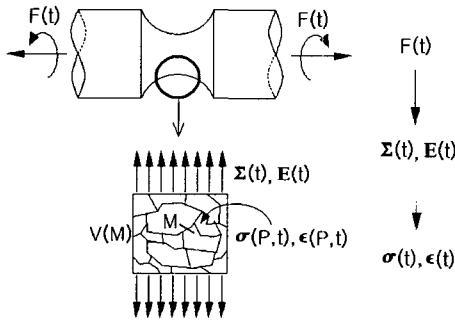


Fig. 2 Different steps of the proposed fatigue calculations: macroscopic and mesoscopic scale

이 조건에 의하면 피로 파괴는 $\{\tau(t), p(t)\}$ 의 조합으로 나타난 제적이 안정영역으로 정의된 영역을 벗어 날 때 일어나게 된다. 여기서 $\tau(t)$ 와 $p(t)$ 는 각각 meso- 영역의 전단응력과 정수압 응력을 나타낸다⁽¹¹⁾. 안정영역은 두 개의 직선으로 구성되어 있고, 다음과 같이 정의된다.

$$f(\sigma) \equiv \tau \pm x p \mp \lambda = 0 \quad (6)$$

여기서 x 와 λ 는 다음과 같다⁽¹³⁾.

$$x = \frac{t_{-1} - f_{-1}/2}{f_{-1}/3}, \quad \lambda = t_{-1} \quad (7)$$

meso- 요소인 σ 와 ϵ 은 특정 방향의 결정에서 하중 $F(t)$ 의 함수로 계산되어진다. macro-요소와 meso- 요소의 관계는 참고문헌 [10, 11]에 주어져 있다.

3. 수치 해석적 접근

Fig. 3과 같은 등방성이고 균질 두 non-conformal 탄성체에 수직하중과 접선하중이 작용할 때 접촉면적과 접촉면 압력분포의 변화를 알기 위해 사각조각 표면에 작용하는 균일한 분포하중에 의한 변위의 해를 이용하여 두 탄성체사이의 접촉 문제를 수치적으로 해석한다. 탄성체 1과 2의 표면을 매끄럽다고 가정한다면 접촉부 근처의 표면을 2차 포물면으로 근사할 수 있다. Fig. 3에서 각 탄성체의 주축방향 곡률이 같은 경우 ($R_{1x} = R_{1y}$, $R_{2x} = R_{2y}$) 즉, 두 개의 구(sphere)들의 접촉문제를 고려하자. 일반적으로 이러한 두 개의 구 면간의 접촉 문제는 강체 구와 반 무한 평판의 접촉으로 등가시켜 해석할 수 있다(Fig. 4). 두 물체의 최초의 접촉점 O 에 수직하중 P 와 접선하중 Q 가 동시에 작용할 때 표면 위의 점 $M(x,y,z)$ 과 $N(x,y,z)$ 은 접촉영역에서 접하게 된다.

$f(x,y)$ 는 두 탄성체의 표면 위의 두 점 $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ 사이의 접촉 전의 형태함수(shape function)이고 $e(x,y)$ 는 접촉 후의 형태함수라고 하자. 하중이 가해지면서 두 탄성체 위의 점들은 식 (8)과 같은 관계를 가지며 $f(x,y)$ 에서 $e(x,y)$ 로 변한다.

$$e(x, y) = f(x, y) + u_{z1}^P + u_{z2}^P + u_{z1}^Q + u_{z2}^Q - \delta \quad (8)$$

여기서, u_{z1}^P, u_{z2}^P 과 u_{z1}^Q, u_{z2}^Q 은 각각 수직하중 P 와 접선하중 Q 에 의한 두 탄성체의 표면 위의 두 점 $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ 에서의 변위로서 각 탄성체의 안 쪽을 양의 방향으로 한다. δ 은 표면에서 멀리 떨어진 점 T_1, T_2 의 유효강체변위(effectively rigid displacement)이다. 수직하중과 접선하중이 동시에 작용할 때 접촉영역 Ω 내에서 $e(x,y)=0$ 으로 두 탄성체위의 두 점 $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ 간의 거리는 식 (8)로 부터 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\int \int_{\Omega} (u_{z1}^P + u_{z2}^P + u_{z1}^Q + u_{z2}^Q) dx dy = \delta - f_1(x, y) \quad (9)$$

여기서 $u_{z1}^{q_x}, u_{z2}^{q_x}$ 는 사각조각 표면에 작용하는 균일한 접선 분포하중에 의한 변위로서 Cho 등의 변위해를 이용하였다⁽¹⁴⁾. 식 (9)를 단순 이산화하면 다음과 같다.

$$C_1 \sum_{j=1}^k F_{ij} p_j + C_2 \mu \sum_{j=1}^k F'_{ij} p_j = \delta - f_i \quad (10)$$

여기서 $C_1 = (1 - \nu_1^2) / \pi E_1 + (1 - \nu_2^2) / \pi E_2$ 이고 k 는 접촉영역 Ω 내에서의 사각조각 표면들의 수이고, F_{ij} 는 요소 j 에서의 수직분포하중에 의한 요소 i 에서의 영향을 나타내는 영향함수(influence function)이다. 그리고

$$C_2 = (1 - 2\nu_1)(1 + \nu_1) / 2\pi E_1 - (1 - 2\nu_2)(1 + \nu_2) / 2\pi E_2 \quad (11)$$

이고 F'_{ij} 는 접선하중에 대한 영향함수이다.

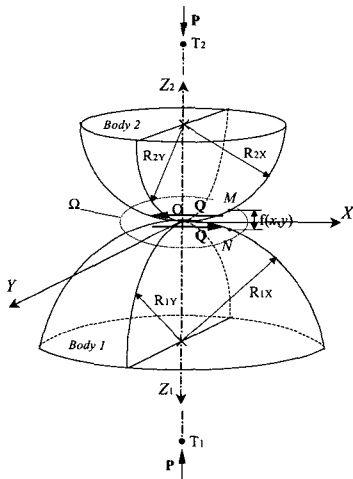


Fig. 3 Schematic diagram of two non-conformal contact bodies

Fig. 5와 같은 임의의 형상의 접촉면에 의한 접촉문제는 Fig. 6과 같은 균일한 분포하중이 작용하는 사각조각 표면으로 이산화하여 수치적으로 해석할 수 있다. 여기서는 크기가 $2a \times 2b$ 이고 면의 중심이 $C(x_c, y_c, 0)$ 인 하나의 사각조각 표면에

x 방향으로 하중의 세기가 q_x 로 균일하게 작용할 때 반 무한체내의 임의의 점 $A(x, y, z)$ 에서의 응력 분포를 구하였다⁽¹⁴⁾.

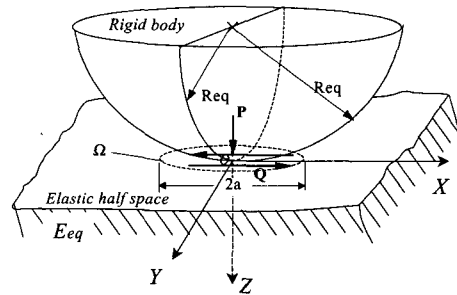


Fig. 4 Schematic diagram of an equivalent contact geometry

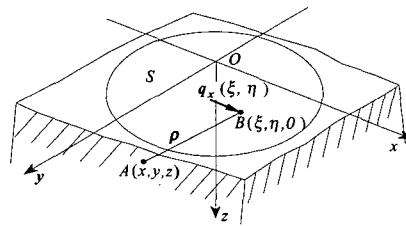


Fig. 5 The elastic half space subject to a distributed tangential loading of an area S

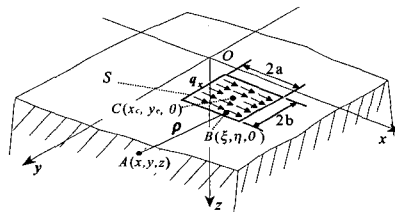


Fig. 6 The elastic half space subject to a uniform tangential loading of a rectangular patch.(a, b=half length of a rectangular patch in the x, y direction, q_x =a uniform shear stress)

4. 피로해석

4.1 구 접촉

Fig. 3에서 각 탄성체의 주축방향 곡률이 같은 경우를 고려해 보자. 반지름이 각각 R_1 , R_2 이고, 두 구의 중심에 하중 P 가 작용하고 있으며, 서로 다른 각속도 ω_1 과 ω_2 로 회전하고 있다. 두 개의 구 접촉 문제는 등가된 하나의 구와 반 무한 평면과의 접촉문제로 해석할 수 있다. 회전 각속도가 서로 다르므로 접촉 표면에는 수직하중 뿐만 아니라 마찰력도 작용하게 된다. 구의 표면 아래의 임의의 한 점 p 를 정하면 그 점은 시간에 따라서 다른 응력 상태에 놓이게 된다. 구가 한바퀴 회전한 다음에는 같은 응력 상태가 반복되므로 구가 한바퀴 회전하는 것을 한 사이클로 둘 수 있다. 따라서 두 개의 구접촉 문제를 한 개의 등가된 구와 반무한 평면의 접촉 문제로 등가하고 Fig. 7에서 보는 것과 같이 구의 한 점 p 가 $-\pi R_e$ 에서 πR_e 까지 이동하는 동안에 받게 되는 응력 상태를 Hamilton^{(15),(16)} 식으로부터 구할 수 있고 이것을 분석하여 구 접촉 문제의 피로해석을 할 수 있다. 등가 반지름 R_e 와 등가 탄성 계수 E_e 는 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (12)$$

$$\frac{1}{E_e} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

여기서 ν_1 , ν_2 , E_1 , E_2 는 각각 물체 1과 2의 프와송 비와 탄성 계수이다.

Hamilton 식의 경우 반무한 평면 위의 한 지점에 구가 접촉하여 Hertz의 압력 분포형태로 수직하중과 마찰력이 작용하는 경우를 해석한 것이다. 그래서 r 값이 무한대로 가게 되면 응력 값은 영으로 수렴하게 된다. 하지만 우리가 다루고 있는 구는 유한한 길이 즉 $2\pi R_e$ 의 길이만큼 반복되게 되므로 이 식을 조금 수정하여 사용해만 한다.

Hamilton의 식을 분석해 보면 전단력이 작용하는 경우 $-\pi R_e$ 와 πR_e 에서 응력 값이 서로 다른 경우가 발생한다. 이러한 현상을 보완하기 위하여 $-\pi R_e$ 의 위치에 원점에서와 같은 하중을 작용시

키고, 이 하중은 $-\pi R_e$ 와 0 사이에만 영향을 입힌다고 가정한다.

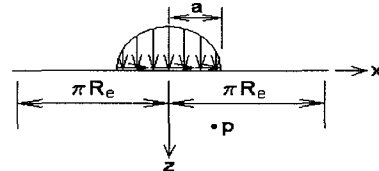


Fig. 7 Pressure distribution on the infinite plane due to surface tractions

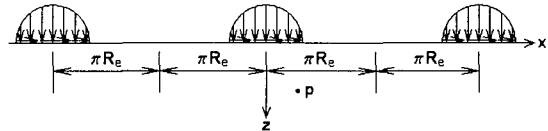


Fig. 8 Modified pressure distribution on account of symmetry condition

마찬가지로 $2\pi R_e$ 의 위치에 동일한 하중을 작용시키고 이 하중은 0에서 πR_e 사이에만 영향을 입힌다고 가정한다. Fig. 8과 같이 모델링하여 x 값이 $-\pi R_e$ 에서 πR_e 까지 변화하는 것을 한 사이클로 하여 그때의 표면 아래 응력 값을 분석하여 피로해석에 적용할 수 있다.

4.1.1 결과 및 고찰

앞 절에 설명한 내용에 기초하여 미끄럼 구접촉 해석을 수행하였으며, Matake 조건과 Crossland 조건 그리고 Dong Van 조건을 미끄럼 구접촉 피로 해석에 각각 적용하였다. 해석에 사용된 재료의 물성치는 Table 1에 주어져 있다⁽³⁾.

그리고 구의 반지름은 각각 $R_1 = 32.5$ mm, $R_2 = 11$ mm를 사용하였다. Fig. 9는 세 가지 조건에 대하여 마찰 계수 변화에 따른 피로한도에 해당하는 작용하중을 나타내고 있다. 세 조건이 각기 다른 물리적 접근 방법을 사용하였지만 특정 마찰 계수에서 균열 생성 위치가 표면아래서 표면으로 이동하게 되는 임계하중이 급격하게 감소하게 되는 것을 알 수 있다. Table 2에 그때의 마찰 계수와 임계하중이 주어져 있다. 마찰 계수에 따른 균열 생성 깊이가 Fig. 10에 주어져 있다. Fig. 10에서 볼

수 있는 것처럼 Dong Van 조건이 가장 낮은 마찰 계수에서 표면으로 균열의 발생 위치가 이동하게 된다.

Table 1 Material properties and fatigue limit data of 30NCD16 (MPa)

Material	f_{-1}	t_{-1}	σ_f	E	ν
30NCD16	660	410	1880	2×10^5	0.3

Table 2 Friction coefficient and critical load, when crack initiation point is moved surface

	Matake	Crossland	Dang Van
마찰계수	0.18	0.26	0.07
임계하중	196.98N	192.11N	210.71N

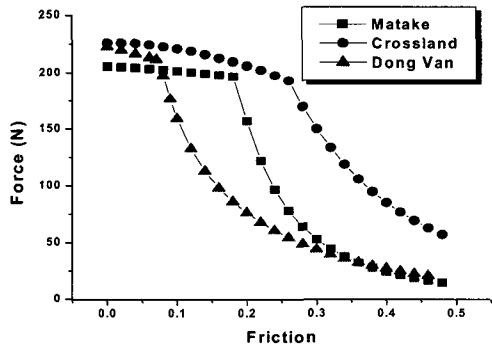


Fig. 9 Critical force of various criteria against friction coefficient

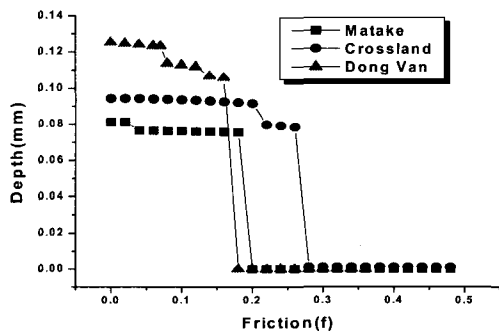


Fig. 10 Depth of crack initiation according to friction coefficient

4.2 불규칙한 표면의 접촉 해석

4.2.1 불규칙한 표면의 생성

불규칙한 표면의 접촉을 시뮬레이션하기 위한 쌍의 거친 표면간의 접촉을 가압하는 강체 상당 표면(rigid body equivalent surface)과 반 무한탄성체 면으로 모델링하여 구의 접촉해석절차에 따라 돌기 접촉압력을 계산하였다. Fig. 11은 거친 Gaussian 표면을 컴퓨터시뮬레이션에 의해 수치적으로 생성한 것이다. 이 결과는 Cho 등의 연구결과에서 인용한 것으로 256×256 의 표면데이터를 포함한다⁽¹⁷⁾. 본 연구에서는 Fig. 11의 거친 표면에서 73×73 (from $i, j=1$ to 73)의 표면데이터를 발췌하여 접촉해석에 이용하였다.

Fig. 12는 Fig. 11의 Gaussian 표면에 세가지 피로 조건에 해당하는 무한수명이 되기 위한 하중에서 3차원 접촉면 압력분포를 도시한 것이다.

4.2.2 3차원 불규칙 접촉의 표면 아래 응력분포

Fig. 11의 Gaussian 표면에 대해 미끄럼 접촉시의 표면 아래 응력분포는 다음과 같이 구한다. 우선, 접촉압력이 작용하는 실 접촉면을 균일한 하중의 세기 p, q 가 작용하는 미소사각조각 표면들로 이산화하여, 각 미소표면들의 균일한 하중의 세기에 의한 반 무한 탄성체내의 임의의 위치로의 영향을 중첩함으로써 표면 아래 응력분포를 구할 수 있다. Fig. 13은 $\mu=0$ 에서 Gaussian 표면에 대한 표면 아래 응력분포를 이용하여 J_2 값을 나타낸 것이다.

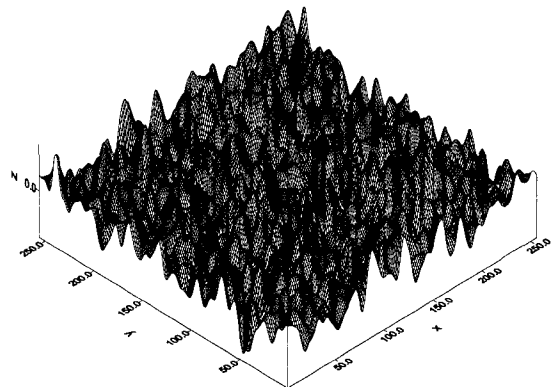


Fig. 11 Rough surface generated by computer simulation

4.2.3 결과 및 고찰

불규칙한 접촉 하에서 세 가지 피로 이론을 적용하여 보았으며 Table 3에 마찰계수 $\mu=0$ 인 경우에 그 결과를 나타내었다.

마찰계수 $\mu=0$ 인 경우에 Matake 조건과 Crossland 조건을 비슷한 하중에서 피로한도를 나타내었지만 Dong Van 조건의 경우 낮은 하중에서 피로한도가 나타남을 알 수 있다. 불규칙 접촉의 경우 구 접촉에 비해서 더 낮은 하중에서 피로한도를 가지게 되며 미끈한 면의 접촉보다 거친 면의 접촉이 피로 수명이 짧음을 예측할 수 있다.

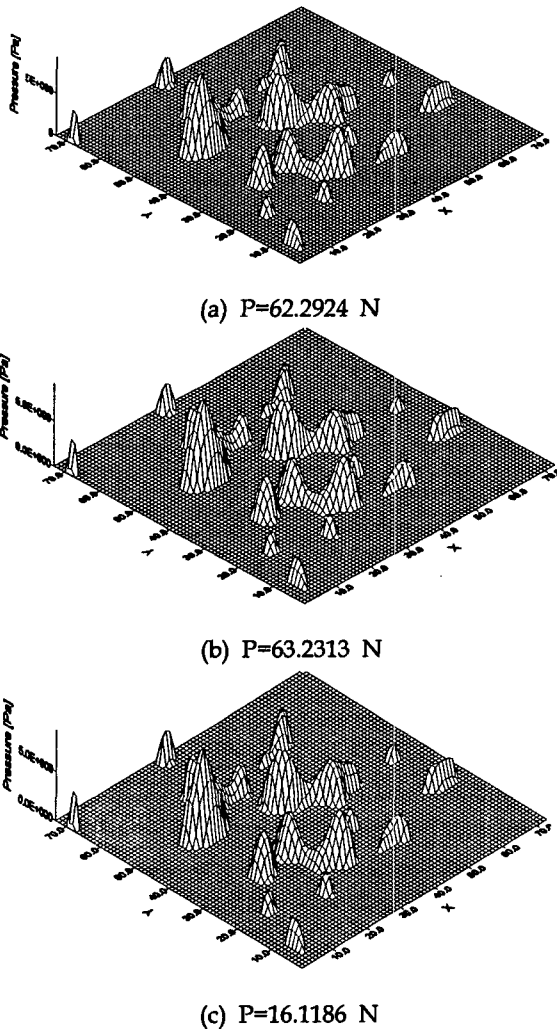


Fig. 12 3-D contact pressure distribution on the surface of semi-infinite solid according to the variation of P

Table 3 Critical force at the fatigue limit of rough surface contact ($\mu=0$)

Matake	Crossland	Dong Van
62.2924 N	63.2313 N	16.1186 N

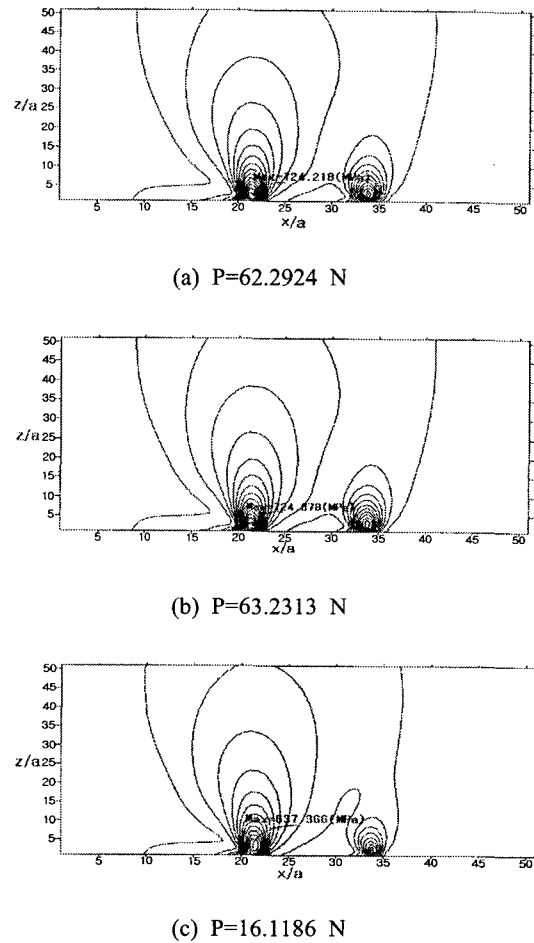


Fig. 13 Lines of constant J_2 for gaussian rough surface according to variation of P along y at $j=37$ node

5. 결론

구 접촉과 3차원 불규칙 접촉 하에서 임계평면 이론, 응력 불변량 이론, Mesoscopic 이론, 이렇게 세 가지 피로 조건을 적용하여 피로한도에 해당하는 하중을 구하였다.

1. 각각의 피로 조건은 서로 다른 물리적 접근 방법을 취하고 있지만 구 접촉의 경우 마찰 계수의 변화에 대한 무한 수명의 임계하중의 변화 양상이 비슷한 경향을 나타내고 있음을 확인 할 수 있었다. 특히 마찰 계수가 특정한 값 이상을 가지게 되면 균열 시작 위치가 표면 아래에서 표면으로 이동하게 되는 것을 알 수 있다.

2. 특정 마찰 계수 이상에서는 피로한도에 해당하는 하중이 급격하게 감소하는 것을 알 수 있다. 세 조건 모두 이러한 현상을 나타내고 있음을 확인 할 수 있다.

3. 불규칙 접촉의 경우 Dong Van 조건이 Crossland와 Matake과 비교하여 약 70% 정도 낮은 하중에서 피로한도에 도달했고, Crossland와 Matake 조건은 비슷한 값에서 피로한도에 도달함을 할 수 있다.

참고문헌

1. Y. S. Garud, "Multiaxial fatigue: a survey of the state of the art," *Journal of Testing and Evaluation*, Vol. 9, No. 3, pp. 165-178, 1981.
2. Bong-Ryul You, Soon-Bol Lee, "A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals," *Int. J. Fatigue*, Vol. 18, No. 4, pp. 235-244, 1996.
3. I. V. Papadopoulos, P. Davoli, "A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals," *Int. J. Fatigue*, Vol. 19, No. 3, pp. 219-235, 1997.
4. A Simbürger, "Festigkeitsverhalten zäher Werkstoffe bei einer mehrachsigen, phasen verschobenen Schwingbeanspruchung mit körperfesten und veränderlichen Hauptspannungsrichtungen, LBF Darmstadt," Bericht Nr. FBB121, 1975.
5. B. Weber, B. Kenneugne, J. C. Clement, J. L. Robert, "Improvements of multiaxial fatigue criteria computation for a strong reduction of calculation duration," *Computational Materials Science*, Vol. 15, pp. 381-399, 1999.
6. M. W. Brown, K. J. Miller, "A Theory for Fatigue Failure under multiaxial stress-strain conditions," *Proc. Inst. Mech. Eng.* Vol. 187, No. 65, pp. 745-755, 1973.
7. J. A. Bannantine, J. J. Comer, J. L. Handrock, "Fundamentals of metal fatigue analysis," Prentice Hall, pp.256-258, 1990.
8. Matake, T. Bull, *JSME* Vol. 20, No. 257, 1977.
9. Corssland, B. In, "Effect of large hydrostatic pressure on the torsional fatigue strength of an alloy steel," *Pro. Int. Conf. on Fatigue of Metals*, Institution of Mechanical Engineers, London, pp. 138-149, 1956.
10. Dang Van K., "High-Cycle Metal Fatigue From Theory to Applications," SpringerWienNewYork, pp. 57-143, 1999.
11. Dang Van K., Griveau B., and Message O., "On a new multiaxial fatigue criterion; theory and application," *2nd Int. Conf. on Biaxial/Multiaxial Fatigue*, Sheffield, UK, pp. 479-496, 1985.
12. I.V. Papadopoulos, "A new criterion of fatigue strength for out-of-phase bending and torsion of hard metals," *Int. J. Fatigue*, Vol. 16, pp. 377-384, 1994.
13. K. Dang Van, M. H. Maitournam, B. Prasil, "Elastoplastic Analysis of Repeated Moving Contact Application to Railways Damage Phenomena," *Wear* Vol. 196, pp. 77-81, 1996.
14. 조용주, 이문주, "반 무한체위의 사각조각 표면에 작용하는 접선하중에 의한 반 무한체내의 응력해석," *대한기계학회논문집, A권, 제24권*, pp. 1032-1038, 2000.
15. G. M. Hamilton, L. E. Goodman, "The stress field created by a circular sliding contact," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 88, pp. 371-376, 1966.
16. G. M. Hamilton, "Explicit Equations for the stresses beneath a sliding spherical contact," *I. Mech. E. Vol. 197C*, pp. 53-59, 1983.
17. 김태완, 강민호, 구영필, 조용주, "Kurtosis를 고려한 3차원 거친표면의 탄성 접촉해석," *한국윤활학회 제31회 춘계학술대회* pp. 34-41, 2000.