

비정규 공정하에 붓스트랩 EWMA관리도의 수행도 평가

이만웅 · 송서일

동아대학교 산업시스템공학과

Evolution of Performance for Bootstrap EWMA Control Chart under Non-normal Process

Man Woong Lee · Suh Ill Song

Dept. of Industrial Systems Engineering, Dong-A University

In this study, we establish bootstrap control limits for EWMA chart by applying the bootstrap method, called resampling, which could not demand assumptions about pre-distribution when the process is skewed and/or the normality assumption is doubtful. The results obtained in this study are summarized as follows : bootstrap EWMA control chart is developed for applying bootstrap method to EWMA chart, which is more sensitive to small shifts of process. With the purpose of eliminating a skewness of the resampling distribution, the bootstrap control limits are established by using a modified residual, and its performance is analyzed by ARL.

It is shown that the bootstrap EWMA control chart developed in this study includes the properties of standard EWMA control chart that is sensitive to a small shift, and detects process in out of control more quickly than standard EWMA chart.

Keywords : Bootstrap, EWMA, Control Chart, Resampling, Nonnormality

1. 서론

국제경쟁이 심화됨에 따라 많은 기업은 시장에서 계속해서 살아나기 위하여 품질의 중요성을 인식하게 되었다. 제조상품의 품질은 사양, 생산과 검사에 의하여 검토될 수 있다. 제품품질을 검사, 제어 그리고 개선하는데 사용되는 많은 기법들 중 통계적 공정관리는 공정의 품질과 제품의 품질을 개선하는데 유용하게 사용되고 있는 문제해결도구이다.

지금 널리 사용되고 있는 전통적인 Shewhart 관리도는 모수적인 방법이며, 이 기법들에는 공정의 통계적인 특성에 관한 기본적인 가정들로서 관측치들이 독립이고, 모집단은 정규분포를 따른다고 가정을 요구한다. 그렇지

만 이러한 가정들은 현실에 위배되는 경우가 종종 있다. 예를 들면, 측정된 변수들의 정규성에 대한 검정이 기각되거나, 관측치 내에 상당한 계열 상관관계가 있을 수도 있다.

그와 같은 경우에 설정된 관리한계가 정확하게 기준을 만족하지 않을 수 있다. 따라서 사전 분포 가정을 필요로 하지 않는 컴퓨터를 이용하는 재샘플링(resampling) 절차인 붓스트랩(bootstrap)이 이러한 상황에 사용될 수 있으며, 잠재적으로 유용한 실용적인 품질 개선도구가 될 수 있다.

따라서 본 연구에서는 작은 공정변화에 민감하도록 개발된 EWMA 관리도에 사전분포의 가정이 필요없는 붓스트랩 기법을 적용하여 붓스트랩 EWMA 관리도를

개발하고, 이렇게 개발된 붓스트랩 관리도들은 표준 방법이 모수적인 방법으로 모집단 분포가 치우침을 가지거나 공정분포가 정규적이지 못한 꼬리부분이 두터운 경우에는 바람직스럽지 못한 결과들을 제시하는데 반하여, 본 연구에서 제시된 비모수적인 방법에 의한 붓스트랩 관리도들은 모집단 분포의 가정 없이 사용할 수 있다는 것을 제시하고자 한다.

2. 붓스트랩 EWMA관리도

2.1 EWMA 관리도

Roberts⁵⁾에 의해 소개된 EWMA 관리도의 모집단에서 모형은

$$x_i = \mu_i + \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \dots \quad (1)$$

이고, ε_i 는 독립적인 확률변수이고 $N(0, \sigma^2)$ 을 따른다. 바람직한 상황(desired situation)은 $\mu_i = \mu_0$ $i=1, 2, \dots$ 이다. 여기서 μ_0 는 공정의 목표값이다. EWMA 통계량이 연속적인 값인 확률표본 x_1, x_2, \dots 에 의해서 발생되어지면, EWMA 통계량은 식 (2)와 같다.

$$Z_i = \lambda \bar{x}_i + (1-\lambda)Z_{i-1} \quad i=1, 2, \dots \quad (2)$$

여기서 $0 < \lambda \leq 1$ 은 평활상수이고, 초기치 값은 식 (3)으로 둔다.

$$Z_0 = \bar{x} \quad (3)$$

이때 EWMA 관리도의 점근적인 관리한계는 식 (4)과 식 (5)와 같고,

$$UCL = \bar{x} + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)n}} \quad (4)$$

$$LCL = \bar{x} - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)n}} \quad (5)$$

이것은 표본 수 i 가 적당하게 클 경우에 계산된다.

2.2 EWMA 붓스트랩 관리도의 개발

이제 EWMA 관리도의 붓스트랩 절차는 다음과 같이 설계할 수 있다. 이 모형에서 모수 λ 가 기지이고, σ^2

은 미지이며 현재의 관측치로부터 추정되어야한다고 가정하고, 관측치의 모형은

$$x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad (6)$$

으로, 붓스트랩 관리도 설계 절차는 다음과 같다. [단계 1] 잔차 e_{ij} 를 계산한다.

$$e_{ij} = x_{ij} - Z_i \quad (7)$$

여기서, $i=1, \dots, k$ 이고, $j=1, \dots, n$, $Z_0 = \bar{x}$ 이며, Z_i , $i=1, \dots, k$ 는 식 (8)에 주어져 있다. 이때 잔차는 식 (9)에 의해서 조정된다.

$$\tilde{e}_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{nk} \sum_i \sum_j e_{ij} \quad (9)$$

[단계 2] 잔차 e_j^* ($j=1, \dots, n$)의 붓스트랩 표본을 얻기 위하여 조정된 잔차 ($\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_N$)으로부터 n 개를 복원으로 재샘플링한다.

[단계 3] 식 (10)과 식 (11)을 되풀이하여 붓스트랩 관측치 $\bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_k^*$ 를 계산한다.

$$x_j^* = \bar{x} + a e_j^* \quad (10)$$

여기서, a 는 조정된 분산값으로

$$\sqrt{\frac{nk}{nk-1} \left(\frac{n(2-\lambda)}{n(2-\lambda)+2\lambda^2-3\lambda} \right)} \quad \text{이다.}$$

$$\bar{x}_i^* = \sum_{j=1}^n x_j^* / n \quad (11)$$

[단계 4] [단계 3]에서 구한 k 개의 \bar{x}_i^* 를 가지고 $Z_0^* = \bar{x}$ 인 EWMA 통계량값 $Z_i^* = \lambda \bar{x}_i^* + (1-\lambda)Z_{i-1}^*$ 을 구한다.

[단계 5] B 만큼을 [단계 3]과 [단계 4]를 반복한다.

[단계 6] B 붓스트랩 예측치들 $Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_B^*$ 을 소트한다.

[단계 8] $\frac{\alpha}{2} \cdot B$ 와 같은 값들이 그 값 아래 있게 되는 가장 적은 Z_i^* 값을 찾는다. 이것이 붓스트랩 하한 관리한계이다.

<Table 1> Sensitivity Analysis : Gamma distribution of shape parameter $\alpha=0.5(n=5, k=5, \alpha=0.05)$

shift	λ	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
	shift	EUCL	0.66212	0.70095	0.73505	0.76637
BUCL		0.60756	0.63508	0.65998	0.68351	0.70624
TUCL		0.64219	0.67649	0.70660	0.73426	0.76037
ELCL		0.34013	0.30130	0.26720	0.23588	0.20632
BLCL		0.39991	0.37570	0.35439	0.33484	0.31643
TLCL		0.35781	0.32351	0.29340	0.26574	0.23963
0.0	EWMA	12.68660	10.09617	8.78863	8.02320	7.56627
	Bootstrap	5.80947	4.60630	3.95930	3.60717	3.37893
	True	10.02713	7.93347	6.82827	6.21670	5.84103
1.0	EWMA	3.50033	3.10770	2.87923	2.72483	2.61657
	Bootstrap	2.58690	2.34680	2.20387	2.11817	2.05613
	True	3.16133	2.81073	2.60950	2.48250	2.38857
2.0	EWMA	1.78387	1.56930	1.44770	1.37247	1.31997
	Bootstrap	1.36910	1.25980	1.20100	1.16800	1.14690
	True	1.62650	1.44423	1.34583	1.28553	1.24560
3.0	EWMA	1.25157	1.12710	1.07633	1.04967	1.03380
	Bootstrap	1.05160	1.02223	1.01290	1.00807	1.00623
	True	1.15797	1.07690	1.04227	1.02673	1.01857

[단계 9] $(1 - \frac{\alpha}{2}) \cdot B$ 와 같은 값이 그 값 아래 있게 되는 가장 적은 Z_i^* 값을 찾는다. 이것이 붓스트랩 상한 관리한계이다. 여기서 α 는 관리도의 제 1종 오류확률이다.

3. 수치실험 및 민감도 분석

공정이 비정규공정인 경우는 EWMA 관리도와 붓스트랩 관리도의 수행도를 평가하기 위해 치우침 공정을 감마분포하에서 관측치를 발생시킨다. 여기서 감마분포의 척도모수 θ 는 1로 유지하고 형상모수 α 는 0.5, 2 로 변환시킨다. 이때 EWMA 통계량의 모수 λ 는 0.1에서

<Table 2> Sensitivity Analysis : Gamma distribution of shape parameter $\alpha=0.5(n=5, k=5, \alpha=0.0026)$

shift	λ	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
	shift	EUCL	0.74850	0.80816	0.86055	0.90867
BUCL		0.66519	0.70799	0.74666	0.78280	0.81774
TUCL		0.71847	0.77117	0.81744	0.85994	0.90005
ELCL		0.25375	0.19409	0.14170	0.09358	0.04816
BLCL		0.35010	0.31624	0.28745	0.26200	0.23895
TLCL		0.28153	0.22883	0.18256	0.14006	0.09995
0.0	EWMA	38.72867	32.02887	28.80217	26.82913	24.89373
	Bootstrap	11.84577	9.29533	7.87587	7.08093	6.54030
	True	26.92820	21.91323	19.61453	18.71803	18.39133
1.0	EWMA	5.17463	4.58833	4.26063	4.05960	3.92097
	Bootstrap	3.55093	3.19280	2.99293	2.85610	2.76840
	True	4.55073	4.03763	3.73783	3.55037	3.42003
2.0	EWMA	2.48273	2.16353	1.98030	1.85313	1.75967
	Bootstrap	1.80787	1.60780	1.49423	1.41937	1.37163
	True	2.23293	1.95563	1.78930	1.67640	1.59497
3.0	EWMA	1.75933	1.50707	1.35660	1.25993	1.19920
	Bootstrap	1.26753	1.14347	1.09240	1.06457	1.04790
	True	1.58600	1.35920	1.23393	1.16603	1.12540

<Table 3> Sensitivity Analysis : Gamma distribution of shape parameter $\alpha=2.0(n=5, k=5, \alpha=0.05)$

shift	λ	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
	shift	EUCL	2.35667	2.44098	2.51500	2.58300
BUCL		2.24576	2.30653	2.36129	2.41262	2.46208
TUCL		2.28438	2.35297	2.41320	2.46852	2.52073
ELCL		1.65758	1.57327	1.49925	1.43124	1.36707
BLCL		1.77659	1.72021	1.67028	1.62407	1.58020
TLCL		1.71562	1.64703	1.58680	1.53148	1.47927
0.0	EWMA	12.92980	9.77983	8.14907	7.17137	6.51693
	Bootstrap	6.07343	4.79150	4.05273	3.58790	3.28000
	True	8.61380	6.59337	5.54050	4.88237	4.42087
1.0	EWMA	3.74163	3.29120	3.02217	2.85267	2.73533
	Bootstrap	2.78563	2.48053	2.31727	2.20657	2.12780
	True	3.10663	2.75477	2.54100	2.41113	2.31170
2.0	EWMA	1.91920	1.68233	1.54267	1.45373	1.39330
	Bootstrap	1.48467	1.34550	1.27110	1.22693	1.19897
	True	1.63280	1.45107	1.35417	1.29480	1.25323
3.0	EWMA	1.34497	1.18203	1.10947	1.07350	1.05347
	Bootstrap	1.08943	1.04370	1.02657	1.01823	1.01393
	True	1.16167	1.07623	1.04530	1.03087	1.02310

0.3까지 0.05씩 증가시키고, 관측치는 샘플링된 관측치의 평균값을 취하여 $n=5, k=5$ 일때 시뮬레이션 하였다. 그리고 관리한계 밖으로 나갈 확률 α 는 0.05와 0.0026으로 두고, EWMA 관리도와 붓스트랩 관리도의 관리한계를 설정하고, 평균상의 변화를 검출하기 위해 공정평균을 0.0~3.0까지 1.0씩 변화를 증가시켜 평균런 길이를 구한다. 이때 EWMA 관리한계는 일반적인 관리한계식

에서 평균과 표준편차를 감마분포의 값으로 사용한다.

<Table 1> ~ <Table 4>는 비정규공정일 경우로써, $n=5$ 이고, $k=5$ 일 때 비정규공정 즉, 감마분포의 형상모수 α 이 0.5, 2로 설정하고, 관리한계를 벗어날 확률 α 를 0.05과 0.0026으로 설정한 경우 공정평균상에 여러 가지 변화, 즉 0.0~3.0까지 0.5씩 증가시킬 경우의 민감도를 조사한 결과이다. 그리고 <Table 5> ~ <Table

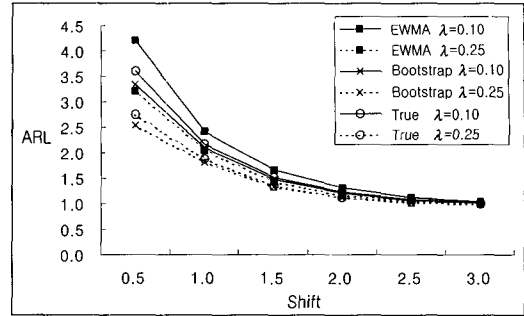
<Table 4> Sensitivity Analysis : Gamma distribution of shape parameter $\alpha=2.0(n=5, k=5, \alpha=0.0026)$

shift	λ	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
	shift	EUCL	2.54420	2.67373	2.78747	2.89196
BUCL		2.37074	2.46300	2.54577	2.62332	2.69721
TUCL		2.43695	2.54233	2.63487	2.71988	2.80010
ELCL		1.47005	1.34052	1.22678	1.12229	1.02369
BLCL		1.65882	1.57699	1.50600	1.44157	1.38162
TLCL		1.56305	1.45767	1.36513	1.28012	1.19990
0.0	EWMA	40.09880	30.33337	25.48737	22.74337	20.96057
	Bootstrap	13.33327	10.08953	8.37803	7.38160	6.69797
	True	21.96070	16.64607	13.90177	12.28217	11.17277
1.0	EWMA	5.60773	4.96787	4.60713	4.37180	4.21890
	Bootstrap	3.87403	3.43027	3.17897	3.01897	2.91533
	True	4.50023	3.97137	3.65977	3.45133	3.30970
2.0	EWMA	2.69010	2.34300	2.13517	1.99337	1.89490
	Bootstrap	1.97370	1.74277	1.60557	1.51660	1.45600
	True	2.23823	1.96063	1.79290	1.68190	1.60043
3.0	EWMA	1.88970	1.62597	1.45430	1.34797	1.27323
	Bootstrap	1.38363	1.21557	1.13807	1.09520	1.07267
	True	1.58420	1.35880	1.23590	1.17003	1.12577

8>은 그외의 n 와 k 에 따른 치우침 분포하의 관리한계와 평균상에 변화가 발생하였을 때, 표준 EWMA 방법과 붓스트랩 방법에 대한 관리한계를 설정한 결과이다.

이 결과로부터 공정변화가 없을 경우, 표준 방법은 참값보다 크게 나타나고, 붓스트랩 방법은 참값보다 더 작게 나타나고 있다. 이것은 붓스트랩 방법이 표준 방법보다 공정불안정 상태를 잘 반영해주고 있다는 것이다. 또한 공정상에 변화가 발생할때에도 붓스트랩 방법이 표준 방법보다 ARL이 빨리 짧아지고 있으므로 붓스트랩 방법이 공정불안정 상태에 더욱 민감하다고 할 수 있다.

<Figure 1> ~ <Figure 4>은 $n = 10$ 이고 k 가 5와 20일 때의 공정평균상의 변화에 따른 민감성을 ARL로 도시하였다.



<Figure 1> Comparison of ARL, EWMA and Bootstrap control charts for Gamma distribution with $\chi=2(n=10 k=5 \alpha=0.05)$

<Table 5> Sensitivity Analysis : Gamma distribution of shape parameter $\chi=0.5(n=5, k=20)$

control limit	λ	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
	α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
EUCL		0.64114	0.67521	0.70512	0.73260	0.75853
BUCL		0.60722	0.63486	0.65988	0.68345	0.70620
TUCL		0.64219	0.67649	0.70660	0.73426	0.76037
ELCL		0.35865	0.32458	0.29467	0.26719	0.24126
BLCL		0.39851	0.37422	0.35288	0.33318	0.31464
TLCL		0.35781	0.32351	0.29340	0.26574	0.23963
α		0.0026	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026
EUCL		0.71692	0.76926	0.81522	0.85744	0.89729
BUCL		0.66494	0.70777	0.74642	0.78267	0.81757
TUCL		0.71847	0.77117	0.81744	0.85994	0.90005
ELCL		0.28287	0.23053	0.18457	0.14235	0.10250
BLCL		0.34848	0.31453	0.28571	0.26014	0.23716
TLCL		0.28153	0.22883	0.18256	0.14006	0.09995

<Table 6> Sensitivity Analysis : Gamma distribution of shape parameter $\chi=2.0(n=5, k=20)$

control limit	λ	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
	α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
EUCL		2.29780	2.37181	2.43680	2.49650	2.55284
BUCL		2.22525	2.28489	2.33866	2.38897	2.43745
TUCL		2.28438	2.35297	2.41320	2.46852	2.52073
ELCL		1.68405	1.61004	1.54505	1.48535	1.42901
BLCL		1.76306	1.70743	1.65817	1.61249	1.56920
TLCL		1.71562	1.64703	1.58680	1.53148	1.47927
α		0.0026	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026
EUCL		2.46243	2.57615	2.67601	2.76774	2.85430
BUCL		2.34792	2.43902	2.52050	2.59639	2.66892
TUCL		2.43695	2.54233	2.63487	2.71988	2.80010
ELCL		1.51942	1.40570	1.30584	1.21411	1.12755
BLCL		1.64564	1.56482	1.49473	1.43114	1.37226
TLCL		1.56305	1.45767	1.36513	1.28012	1.19990

<Table 7> Sensitivity Analysis : Gamma distribution of shape parameter $\chi=0.5(n=10, k=5)$

control limit	λ	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
	α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
EUCL		0.61372	0.64044	0.66391	0.68547	0.70581
BUCL		0.59064	0.61309	0.63319	0.65203	0.67010
TUCL		0.60054	0.62479	0.64609	0.66565	0.68411
ELCL		0.39210	0.36538	0.34191	0.32035	0.30001
BLCL		0.42026	0.40095	0.38416	0.36886	0.35456
TLCL		0.39946	0.37521	0.35391	0.33435	0.31589
α		0.0026	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026
EUCL		0.67317	0.71423	0.75029	0.78341	0.81467
BUCL		0.63895	0.67465	0.70653	0.73663	0.76567
TUCL		0.65448	0.69174	0.72446	0.75451	0.78288
ELCL		0.33266	0.29159	0.25554	0.22241	0.19116
BLCL		0.37956	0.35219	0.32915	0.30861	0.28985
TLCL		0.34552	0.30826	0.27554	0.24549	0.21712

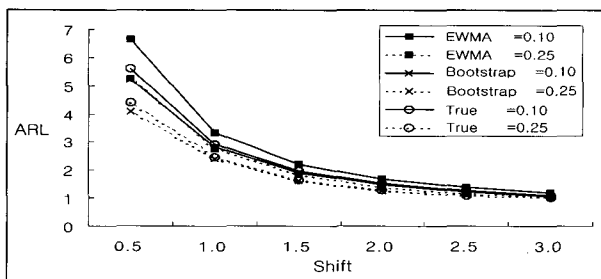
<Table 8> Sensitivity Analysis : Gamma distribution of shape parameter $\chi=2.0(n=10, k=5)$

control limit	λ	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
	α	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
EUCL		2.23689	2.29282	2.34193	2.38704	2.42961
BUCL		2.19125	2.23805	2.27982	2.31878	2.35595
TUCL		2.20109	2.24959	2.29217	2.33129	2.36821
ELCL		1.77312	1.71719	1.66808	1.62297	1.58039
BLCL		1.82527	1.78222	1.74459	1.70999	1.67739
TLCL		1.79891	1.75041	1.70783	1.66871	1.63179
α		0.0026	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026
EUCL		2.36130	2.44723	2.52268	2.59200	2.65741
BUCL		2.29052	2.36317	2.42829	2.48922	2.54716
TUCL		2.30897	2.38349	2.44892	2.50903	2.56575
ELCL		1.64871	1.56278	1.48732	1.41801	1.35259
BLCL		1.73272	1.66896	1.61414	1.56453	1.51794
TLCL		1.69103	1.61651	1.55108	1.49097	1.43425

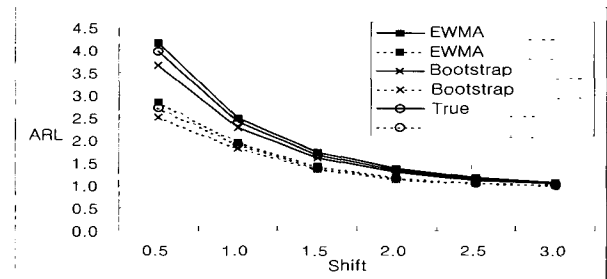
<Table 1> ~ <Table 8>과 <Figure 1> ~ <Figure 4> 에서 볼 수 있듯이 비정규공정일 경우, 즉 감마분포의 모수변화에 따른 TUCL과 TLCL에 근사한 것은 붓

스트랩 방법에 의한 것이고, ARL 또한 참값(true value)에 근사하고 있다.

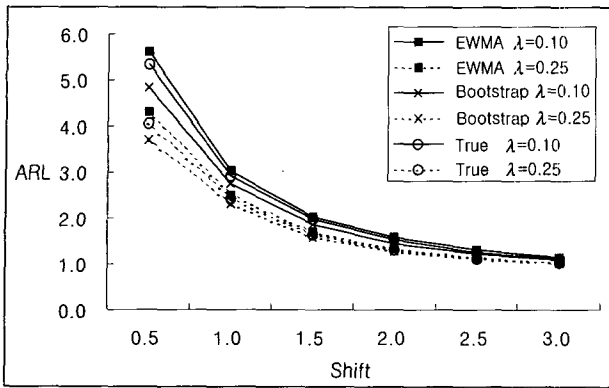
따라서 사전분포를 모를 경우 즉, 비모수적 방법에서



<Figure 2> Comparison of ARL, EWMA and Bootstrap control charts for Gamma distribution with $\chi=2(n=10 k=5 \alpha=0.0026)$



<Figure 3> Comparison of ARL, EWMA and Bootstrap control charts for Gamma distribution with $\chi=5(n=10 k=20 \alpha=0.05)$



<Figure 4> Comparison of ARL, EWMA and Bootstrap control charts for Gamma distribution with $\chi=5(n=10 k=20 \alpha=0.0026)$

붓스트랩 기법이 표준 방법보다 더 좋은 수행도를 보여 주고 있다.

4. 결론

기업 현장에서 사용하고 있는 대부분의 통계적 기법들이 정규성의 가정하에서 적용되는 모수적인 방법이므로, 관측치가 취해진 공정의 분포 형태나 이를 특징지우는 모수들에 관한 정보를 얻기 어려워 더 이상 일반적인 가정에 의한 통계적 공정관리를 적용할 수 없다. 따라서 모수적인 방법인 통계적 공정관리를 모집단의 분포로부터 자유로운 비모수적 방법으로의 전환이 필요한데 이를 위한 방법들 중 손쉽게 사용할 수 있는 방법이 재샘플링 방법을 이용한 붓스트랩 기법이다.

본 연구에서는 전통적인 관리도가 가지는 일반적인 가정에 위배되는 관측치의 분포가 치우침을 가지는 경우 사전분포에 대한 가정없이 적용할 수 있는 재샘플링 절차를 이용하여 EWMA 관리도에 적용하여 붓스트랩 관리한계를 설정하고, 다양한 조건하에서 이들 붓스트랩 관리도들에 대한 민감도를 분석하여 표준 방법과 비교하였다.

시뮬레이션 결과에 따르면, 정규공정인 치우침을 가진 분포하에서 붓스트랩 EWMA 관리도가 표준 방법에 의한 관리도보다 ARL이 더욱 짧게 나와 공정의 이상상태를 잘 감지한다는 것을 알 수 있었고, 공정의 평균상에 변화가 발생하였을 경우도 표준 방법보다 공정의 이상상태를 더욱 빨리 검출할 수 있다.

그러므로 본 연구에서 제시하고 있는 붓스트랩 기법의 사용이 정규공정과 비정규공정에서 우수함으로 샘플링 횟수를 줄이고 그 비용까지 줄일 수 있는 붓스트랩 기법을 이용한 붓스트랩 EWMA 관리도의 사용을 추천할 수 있다.

앞으로 본 연구에서 수행된 붓스트랩 기법과 관련되어 산출된 이론적인 결과를 여러 가지 공정 환경에서 확장·적용할 수 있는 방안들을 모색하는 연구와 다른 유형의 관리도나 통계적 공정관리 수단을 설계하는데 붓스트랩을 응용할 수 있도록 더 많은 연구가 수행되어야 할 것이다.

참고문헌

- [1] Bajgier, S. M., "The Use of Bootstrapping to Construct Limits on Control Charts," *Proceeding of the Decision Science Institute*, San Diego, CA., pp. 1611-1613, 1992.
- [2] Seppala, T., Moskowitz, H., Plante, R. and Tang, J., "Statistical Process Control via the Subgroup," *Journal of Quality Technology*, 27(2): pp. 139-153, 1995.
- [3] Liu,R.Y. and Tang, J., "Control Charts for Dependent and Indepent Measurements Based on Bootstrap," *Journal of the American Statistical Association*, 91(436): pp. 1694-1700, 1996.
- [4] Box, G. E. P. and Jenkins G. M., *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, 2nd edition, Holden Day, San Francisco, CA., 1976.
- [5] Roberts. S. W., "Control Chart Tests Based on Geometric Moving Average," *Technometrics*, 1(2) : pp. 85-93, 1959.
- [6] Crowder, S. V., "A Simple Method for Studying Run Length Distribution of Exponentially Weighted Moving Average Control Chart," *Technometrics*, 29(1):pp. 401-407, 1987.
- [7] Henter, J. S., "The Exponentially Weighted Moving Average," *Journal of Quality Technology*, 18 : pp. 203-210 ,1986.
- [8] Lucas, J.M. and M.S. Saccucci, "Exponentially Weighted Moving Average Control Scheme : Properties and Enhancements," *Technometrics*, 32(1) : pp. 1-12 1990.